- Un mezzo dielettrico si dice anisotropo se le sue proprietà ottiche macroscopiche dipendono dalla direzione.
- Ordinamento microscopico di materiali isotropi e anisotropi

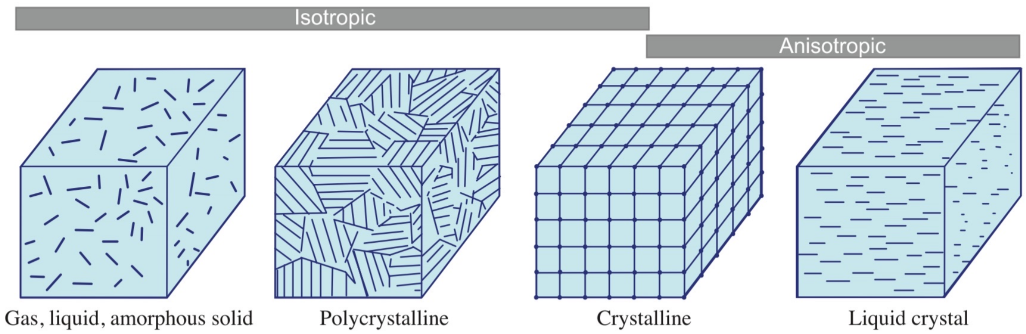


Figure 6.3-1 Positional and orientational order in different types of materials.

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

- Per un mezzo dielettrico anisotropo lineare si ha

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \qquad i,j = 1,2,3 \text{ oppure } x,y,z$$

spostamento elettrico

campo elettrico

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots \\ \vdots & \varepsilon_{ij} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$ è il tensore permeabilità dielettrica

In forma simbolica la relazione costitutiva si scrive

$$D = \varepsilon E$$

- Per la maggior parte dei materiali il tensore ε è simmetrico $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ⇒ il rapporto tra D ed E è invariato se le loro direzioni sono scambiate.
- In generale i materiali non-magnetici che non presentano attività ottica godono di questa simmetria
- Se $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ⇒ ε ha solo 6 componenti indipendenti

Rappresentazione geometrica di vettori e tensori

- SCALARE 1 NUMERO TENSORE DI RANGO 0

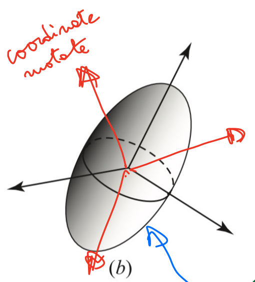
VETTORE 3 NUMERI TENSORE DI RANGO 1

Descrive una grandezza fisica dotata di modulo, direzione e verso

TENSORE DI RANGO 2 → ESPRIME LA RELAZIONE TRA DUE VETTORI

- In un dato sistema di coordinate è rappresentato da 9 numeri. Questi variano se si cambia sistema di coordinate, ma la natura fisica della relazione espressa dal tensore non cambia.

- Se il tensore di rango 2 è simmetrico ha solo 6 componenti indipendenti (ε ad esempio) si può rappresentare con un ellissoide definito da



da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij} x_i x_j = 1 \qquad j = 1,2,3 \text{ oppure } x, y, z$$

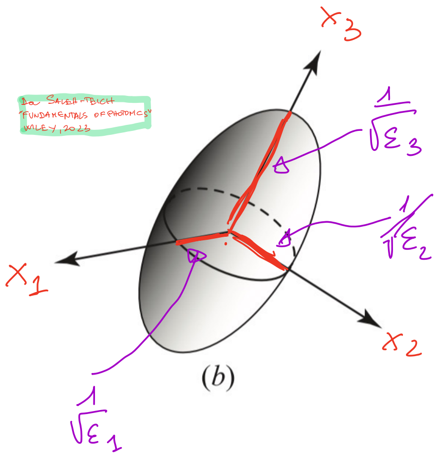
TENSORE SIMMETRICO

superficie quadratica "invariante": se si ruota il sistema di coordinate variano sia ε_{ij} sia x_j, ma la giacitura nello spazio della superficie rimane invariata

- L'ellissoide ha 6 gradi di libertà (gli ε_{ij}) e contiene tutta l'informazione contenuta anche nel tensore.

- Esiste un sistema di coordinate in cui ε è diagonale, detto "sistema principale" e l'equazione dell'ellissoide è

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1 \qquad x_1, x_2, x_3 \equiv \text{ASSI PRINCIPALI}$$



Ellissoide nel sistema di coordinate principale dove il tensore che esso rappresenta è diagonale.

Se ci mettiamo in un sistema di coordinate in cui il tensore permeabilità dielettrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ è diagonale otteniamo

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_2 E_2 \qquad D_3 = \varepsilon_3 E_3$$

dove $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$ ed $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$.

- In questo sistema gli assi coordinati sono assi principali e lungo le loro direzioni $\mathbf{D}$ ed $\mathbf{E}$ sono paralleli. D'ora in poi useremo sempre il sistema degli assi principali.
- $n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}$ $\quad n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$ $\quad n_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}$ si dicono indici di rifrazione principali.

$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \implies$ CRISTALLI BIASSICI

$n_1 = n_2 \neq n_3 \implies$ CRISTALLI UNIASSICI

Di solito si scrive $n_1 = n_2 = n_o$ "indice ordinario"

$n_3 = n_e$ "indice straordinario"

Se $n_e > n_o \implies$ UNIASSICO POSITIVO

$n_e < n_o \implies$ UNIASSICO NEGATIVO

L'asse $z = x_3$ è chiamato ASSE OTTICO

Se $n_1 = n_2 = n_3$ il mezzo è isotropo

• la relazione $D = \varepsilon E$ può essere invertita $E = \varepsilon^{-1} D$

e si può definire il tensore impermeabilità $\eta = \varepsilon_0 \varepsilon^{-1}$,

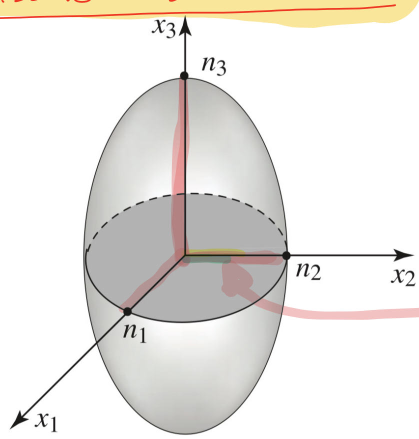
quindi $\varepsilon_0 E = \eta D$

• Se ε è simmetrico lo è anche η e gli assi principali sono gli stessi. Nel sistema principale è diagonale

$$\eta = \begin{pmatrix} \varepsilon_0/\varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_0/\varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_0/\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2} & & 0 \\ & \frac{1}{n_2^2} & \\ 0 & & \frac{1}{n_3^2} \end{pmatrix}$$

η oppure ε descrivono completamente le proprietà del cristallo

ELLISSOIDE DEGLI INDICI



Nel sistema degli assi principali come in figura

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$

Le semilunghezze degli assi sono n_1, n_2, n_3

→ CRISTALLO UNIASSICO → ellissoide di rotazione

→ MEZZO ISOTROPO → sfera

PROPAGAZIONE LUNGO UN ASSE PRINCIPALE

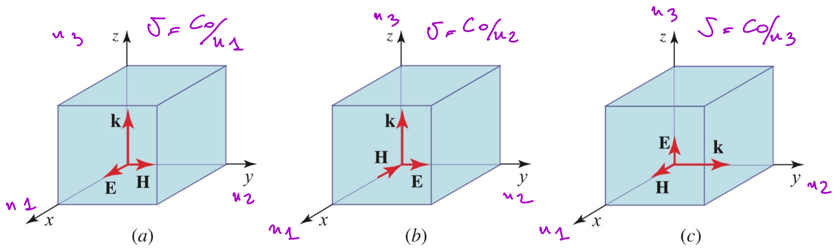


Figure 6.3-4 A wave traveling along a principal axis and polarized along another principal axis has phase velocity c_o/n_1, c_o/n_2, or c_o/n_3, when the electric-field vector points in the x, y, or z directions, respectively. (a) $k = n_1 k_o$; (b) $k = n_2 k_o$; (c) $k = n_3 k_o$.

• I modi normali per la propagazione lungo z sono onde polarizzate linearmente nelle direzioni x e y

• Polarizzazione in direzione arbitraria

• Supponiamo che l'onda si propaghi lungo un asse principale, ad esempio z e che sia linearmente polarizzata nel piano x-y

• Si considera l'onda come una sovrapposizione dei due modi normali, cioè le polarizzazioni lungo x ed y

• Componente x → viaggia con $v_x = \frac{c_0}{n_1} \Rightarrow \varphi_x = n_1 k_0 d$

Componente y → viaggia con $v_y = \frac{c_0}{n_2} \Rightarrow \varphi_y = n_2 k_0 d$

(d = distanza di propagazione)

• Si genera quindi un ritardo di fase $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = (n_2 - n_1) k_0 d$ e quindi l'onda in uscita è polarizzata ellitticamente

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023

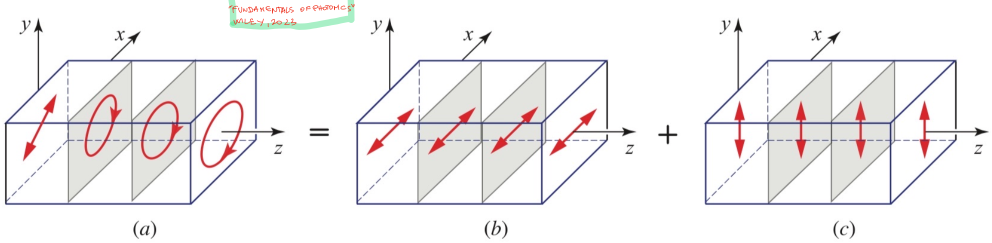
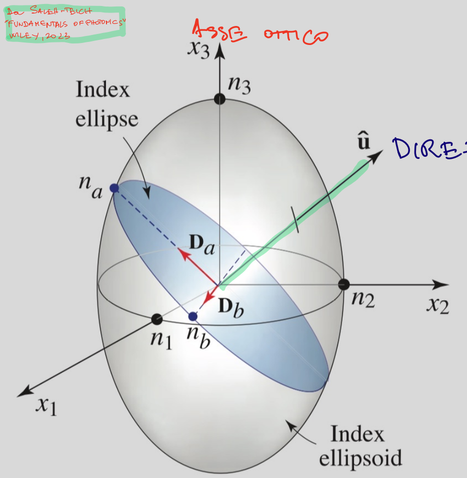


Figure 6.3-5 A linearly polarized wave at 45° in the $z = 0$ plane (a) is analyzed as a superposition of two linearly polarized components in the x and y directions (normal modes), which travel at velocities c_o/n_1 and c_o/n_2 [(b) and (c), respectively]. As a result of phase retardation, the wave is converted from plane polarization to elliptical polarization (a). It is therefore clear that the initial linearly polarized wave is not a normal mode of the system.

PROPAGAZIONE LUNGO UNA DIREZIONE ARBITRARIA

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023



$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1.$$

DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

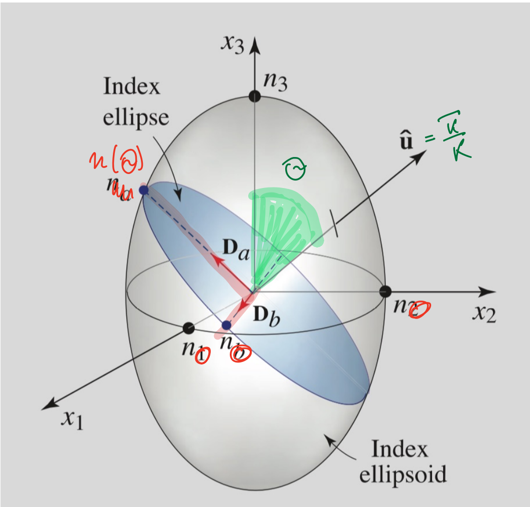
$E_a = \frac{D_a}{\varepsilon_a} = \frac{D_a}{\varepsilon_0 n_a^2}$ $\quad E_b = \frac{D_b}{\varepsilon_b} = \frac{D_b}{\varepsilon_0 n_b^2}$

Figure 6.3-6 Determination of the normal modes from the index ellipsoid.

• I MODI NORMALI sono onde linearmente polarizzate nelle direzioni D_a e D_b e si propagano con velocità c_0/n_a e c_0/n_b

CRISTALLI UNIASSICI

- Nei cristalli uniassici l'ellissoide degli indici è un ellissoide di rotazione ($n_1 = n_2 = n_o$ e $n_3 = n_e$)
- Se l'onda forma un angolo θ con l'asse ottico, i semiassi dell'ellisse degli indici sono n_o e $n(\theta)$



Per trovare $n(\theta)$ si pone

$$x_1 = n(\theta)\cos\theta$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -n(\theta)\sin\theta$$

nell'equazione

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$

e si ottiene

$$\frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} = \frac{1}{n^2(\theta)}$$

- Quindi i due modi normali sono

ONDA ORDINARIA $\rightarrow n = n_o$

Il vettore **D** è $\perp$ al piano $\hat{z}-\vec{K}$

E e **D** sono paralleli (*)

ONDA STRAORDINARIA $\rightarrow n = n(\theta)$

Vale che $n(0) = n_o$ e $n(90°) = n_e$

D è $\perp$ **K** e giace nel piano $\hat{z}-$**K**

E e **D** non sono paralleli (**)

(*) $\vec{D}_o = D_x \hat{x} + D_y \hat{y}$ $\quad D_x = \varepsilon_{xx} E_x$ e $D_y = \varepsilon_{yy} E_y$, ma $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$

per cui $\vec{D}_o = \varepsilon_{xx} E_x \hat{x} + \varepsilon_{xx} E_y \hat{y} = \varepsilon_{xx} \vec{E}$

(**) $\vec{D}_E = D_x \hat{x} + D_y \hat{y} + D_z \hat{z} = \varepsilon_{xx} E_x \hat{x} + \varepsilon_{xx} E_y \hat{y} + \varepsilon_{zz} E_z \hat{z} \neq \varepsilon_{xx} \vec{E}$

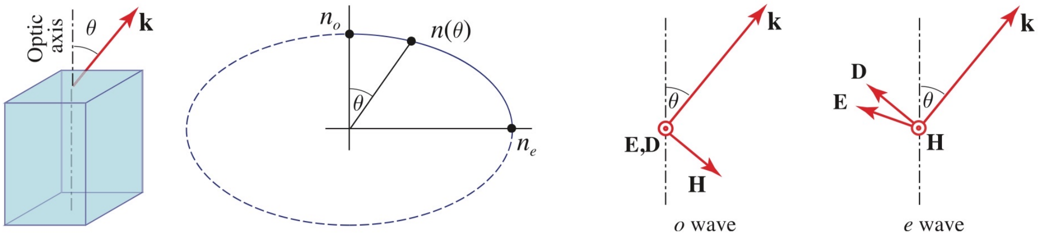


Figure 6.3-7 Variation of the refractive index $n(\theta)$ of the extraordinary wave with θ (the angle between the direction of propagation and the optic axis) in a uniaxial crystal, and directions of the electromagnetic fields of the ordinary (o) and extraordinary (e) waves. The circle with a dot at the center located at the origin signifies that the direction of the vector is out of the plane of the paper, toward the reader.

Da SALEH-TEICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

Relazione di dispersione, fronti d'onda e trasporto di energia

- L'onda è caratterizzata dai vettori

$\vec{k}$ → vettore d'onda

$\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$ e $\vec{B}$ → vettori di campo

$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$ → vettore di Poynting complesso

Vale $\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ ⇒ $\vec{D}$ è ⊥ a $\vec{k}$ ed $\vec{H}$

$\vec{k}\times\vec{E} = \mu_0\omega\vec{H}$ ⇒ $\vec{H}$ è ⊥ a $\vec{k}$ ed $\vec{E}$

Assumendo onde piane del tipo $e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega t}$ le equazioni di Maxwell $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ e $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ diventano quelle sopra

Da SALEH-TEICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

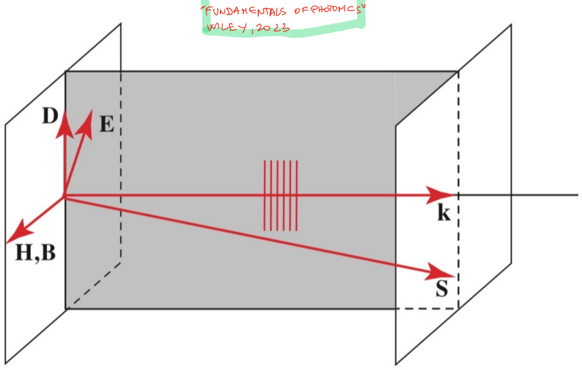


Figure 6.3-8 The vectors **D**, **E**, **k**, and **S** all lie in a single plane, to which **H** and **B** are normal. Also **D** ⊥ **k** and **E** ⊥ **S**. The wavefronts are orthogonal to **k**.

Da $\vec{K}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$ sostituendo $\vec{K}\times\vec{E} = \omega\mu_0\vec{H}$ si ha

$$\vec{K}\times(\vec{K}\times\vec{E}) = -\omega^2\mu_0\vec{D} \Rightarrow \vec{K}\times(\vec{K}\times\vec{E}) + \omega^2\mu_0\varepsilon\vec{E} = 0$$

Se si esprime questa equazione usando le componenti di $\vec{K}$ ed $\vec{E}$ lungo gli assi principali (~~dove~~ ε è diagonale) si ottiene un sistema di equazioni lineari omogenee per le tre componenti di $\vec{E}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n_1^2K_0^2 - K_2^2 - K_3^2 & K_1K_2 & K_1K_3 \\ K_2K_1 & n_2^2K_0^2 - K_1^2 - K_3^2 & K_2K_3 \\ K_3K_1 & K_3K_2 & n_3^2K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 \end{bmatrix}}_{M}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\vec{K} \equiv (K_1, K_2, K_3)$

$K_0 = \frac{\omega}{c_0}$

n_1, n_2, n_3 sono gli indici di rifrazione principali

- Il sistema ha soluzione non banale quando $\det M = 0$, che dà

$$\boxed{\sum_{j=1,2,3} \frac{K_j^2}{K^2 - n_j^2K_0^2} = 1} \Rightarrow$$

corrisponde all'equazione di una superficie

$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$

$K_0 = \omega / c_0$

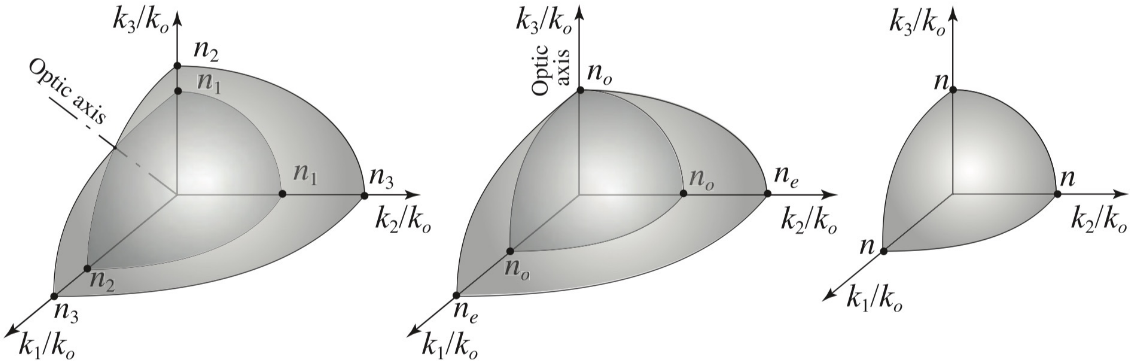
RELAZIONE DI DISPERSIONE

$\omega = \omega(K_1, K_2, K_3)$ nello spazio (K_1, K_2, K_3)

SUPERFICIE NORMALE o SUPERFICIE K

- La superficie K è centrosimmetrica ed consiste di due fogli, ciascuno corrispondente ad una soluzione, cioè ad un modo normale.
- La superficie K interseca ciascuno dei piani principali in un ellisse ed in un cerchio

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023



(a) Biaxial (b) Uniaxial (c) Isotropic

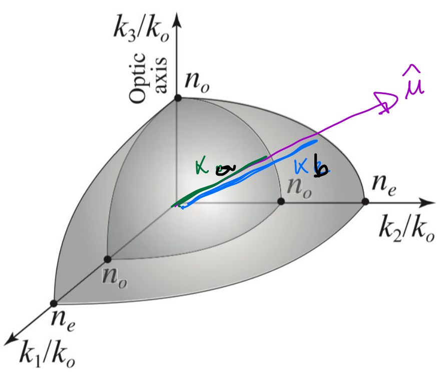
Figure 6.3-9 One octant of the **k** surface for (a) a biaxial crystal ($n_1 < n_2 < n_3$); (b) a uniaxial crystal ($n_1 = n_2 = n_o, n_3 = n_e$); and ($c$) an isotropic crystal ($n_1 = n_2 = n_3 = n$).

SIGNIFICATO FISICO DELLA SUPERFICIE K ⇒ PROPRIETÀ DEI MODI NORMALI

- La superficie K, analogamente all'ellissoide degli indici, può essere usata per determinare i modi normali relativi ad una certa direzione di propagazione e anche le loro proprietà.

INDICI DI RIFRAZIONE

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023



(b) Uniaxial

- L'intersezione di una direzione assegnata $\hat{u}$ di propagazione con i fogli della superficie K è un punto che dista $k = \frac{n\omega}{c_0}$ dall'origine, dove n è l'indice di rifrazione corrispondente.
- Le due intersezioni corrispondono ai due numeri d'onda ed ai due indici di rifrazione dei due modi normali.

$$k_a = \frac{n_a \omega}{c_0} \qquad k_b = \frac{n_b \omega}{c_0}$$

- Dato un vettore $\vec{K} \equiv (K_1, K_2, K_3)$ allora per definizione di $\hat{u}$, anche $\vec{K} \equiv (u_1 K, u_2 K, u_3 K)$ che possiamo sostituire nell'equazione per la superficie K

$$\sum_{j=1,2,3} \frac{k_j^2}{k^2 - n_j^2 k_0^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_{j=1,2,3} \frac{u_j^2 k^2}{k^2 - n_j^2 k_0^2} = 1}$$

• Equazione di 4° grado in K che ammette 4 soluzioni, $\pm K_a$ e $\pm K_b$, delle quali teniamo solo $+K_a$ e $+K_b$, visto che quelle negative corrispondono ad una direzione di propagazione invertita.

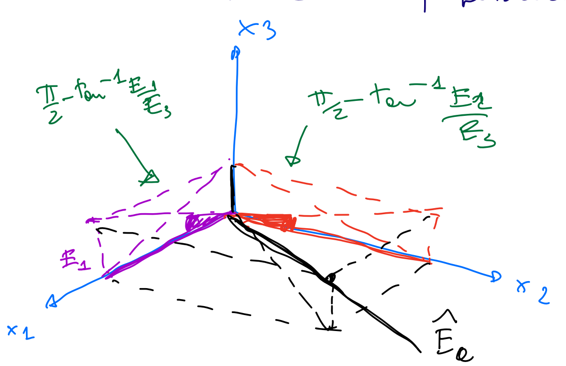
• Trovate le K_a e K_b il problema è risolto: K_a e K_b sono i numeri d'onda dei modi normali con i corrispondenti indici di rifrazione $n_a = \frac{c_0 K_a}{\omega} = \frac{K_a}{K_0}$ e $n_b = \frac{c_0 K_b}{\omega} = \frac{K_b}{K_0}$

POLARIZZAZIONE

Per trovare la direzione di polarizzazione dei due modi normali si parte dalle componenti $(K_1, K_2, K_3) = (u_1 K, u_2 K, u_3 K)$ dove sostituiamo a K una volta K_a ed una volta K_b. Da queste componenti si determinano gli elementi della matrice

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n_1^2 K_0^2 - K_2^2 - K_3^2 & K_1 K_2 & K_1 K_3 \\ K_2 K_1 & n_2^2 K_0 - K_1^2 - K_3^2 & K_2 K_3 \\ K_3 K_1 & K_3 K_2 & n_3^2 K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 \end{bmatrix}}_{M}$$

e si risolvono due delle 3 equazioni del sistema lineare per trovare $\frac{E_1}{E_3}$ ed $\frac{E_2}{E_3}$ da cui si ricava la direzione di $\vec{E}_a$ e, ripetendo per $K = K_b$, anche di $\vec{E}_b$



Analogamente per $\hat{E}_b$

VELOCITÀ DI GRUPPO

Pacchetti d'onda o impulsi $\longrightarrow$ $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ (dominio del tempo)

Per analogia

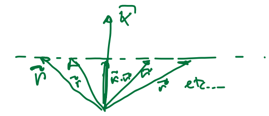
Raggi o pacchetti d'onda spaziali $\longrightarrow$ $\vec{v}_g = \vec{\nabla}_K\, \omega(\vec{K})$

gradiente nello spazio K

Dato che la superficie K è quella superficie per cui $\omega(K_1, K_2, K_3) =$ costante allora $\vec{v}_g$ deve essere $\perp$ alla superficie K. $\Rightarrow$ i raggi si propagano $\perp$ alla superficie K

I fronti d'onda, invece, sono $\perp$ al vettore $\vec{K}$ perché la fase dell'onda è $\vec{K}\cdot\vec{r}$ (*), cioè le normali ai fronti d'onda sono $\parallel$ al vettore $\vec{K}$.

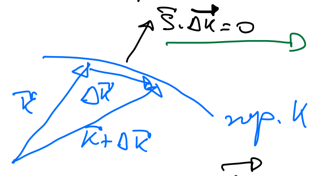
(*) Il fronte d'onda è definito da $\vec{K}\cdot\vec{r} =$ costante. Questo vuol dire che per i punti del fronte d'onda la proiezione di $\vec{r}$ su $\vec{K}$ è costante, cioè $\vec{r}$ spazza un piano $\perp$ a $\vec{K}$



TRASPORTO DI ENERGIA

Il vettore di Poynting complesso è pure $\perp$ alla superficie K.

$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$. Graficamente



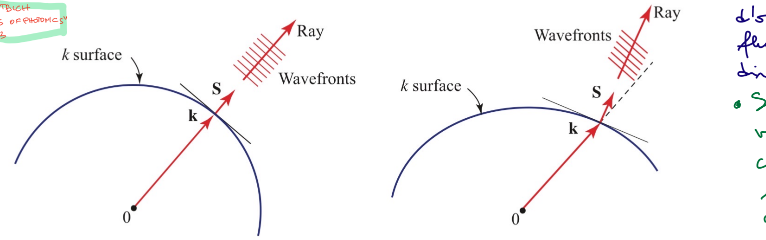
$\vec{S}\cdot\Delta\vec{K} = 0 \longrightarrow$ si può dimostrare a partire dalle eq. di Maxwell

$\Rightarrow \vec{S}$ è parallelo alla velocità di gruppo $\vec{v}_g$

RAGGI OTTICI

Se la superficie K è una sfera (come nei mezzi isotropi), $\vec{K}, \vec{S}$ e $\vec{v}_g$ sono paralleli, cioè i raggi sono $\parallel$ al vettore d'onda e l'energia fluisce nella medesima direzione. (a)

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



(*a*) Ordinary (*b*) Extraordinary

Figure 6.3-10 Rays and wavefronts for (*a*) a spherical **k** surface, and (*b*) a nonspherical **k** surface.

- Se la superficie K non è $\perp$ al vettore $\vec{K}$, per esempio se è ellittica come in (b), allora i raggi e la direzione di flusso dell'energia non sono $\perp$ ai fronti d'onda. I raggi hanno la proprietà "straordinaria" di viaggiare ad un angolo obliquo rispetto ai fronti d'onda.

CASO DEI CRISTALLI UNIASSICI

- Se $n_1 = n_2 = n_o$ e $n_3 = n_e$, l'equazione $\sum_{j=1,2,3} \frac{k_j^2}{k^2 - n_j^2 k_o^2} = 1$ per la superficie K si semplifica e si può riscrivere così

$$\left(k^2 - n_o^2 k_o^2\right)\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2} - k_o^2\right) = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni

i) $k^2 - n_o^2 k_o^2 = 0 \Rightarrow k = n_o k_o = \text{costante} \Rightarrow$ una sfera

ii) $\frac{k_1^2 + k_2^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2} - k_o^2 = 0 \Rightarrow \frac{k_1^2 + k_2^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2} = k_o^2 \Rightarrow$ ellissoide di rotazione

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

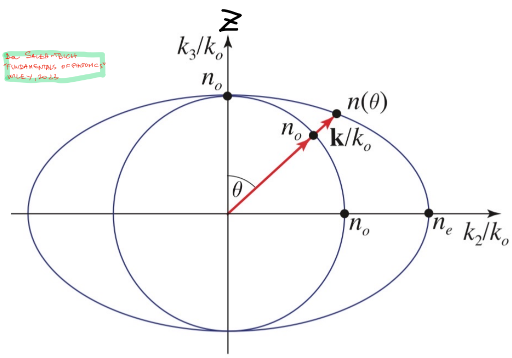
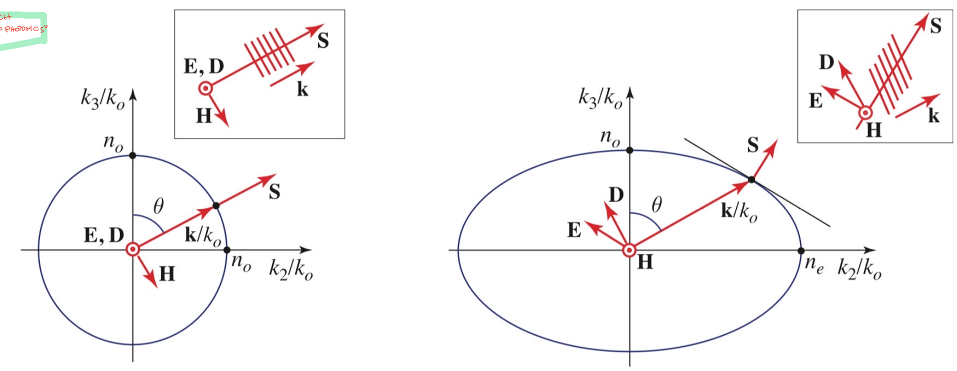


Figure 6.3-11 Intersection of the $\mathbf{k}$ surfaces with the y–z plane for a positive uniaxial crystal ($n_e > n_o$).

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



(a) Ordinary (b) Extraordinary

Figure 6.3-12 The normal modes for a plane wave traveling in a direction $\mathbf{k}$ that makes an angle θ with the optic axis z of a uniaxial crystal are: (a) An ordinary wave of refractive index n_o polarized in a direction normal to the k–z plane. (b) An extraordinary wave of refractive index $n(\theta)$ [given by (6.3-15)] polarized in the k–z plane along a direction tangential to the ellipse (the $\mathbf{k}$ surface) at the point of its intersection with $\mathbf{k}$. This wave is "extraordinary" in the following ways: $\mathbf{D}$ is not parallel to $\mathbf{E}$ but both lie in the k–z plane, and $\mathbf{S}$ is not parallel to $\mathbf{k}$ so that power does not flow along the direction of $\mathbf{k}$; the rays are therefore not normal to the wavefronts so that the wave travels "sideways."

BIRIFRANGENZA o DOPPIA RIFRAZIONE

ONDE PIANE

- Consideriamo la rifrazione di un'onda piana all'interfaccia tra un mezzo isotropo (p.es. aria con $n=1$) ed uno anisotropo.
- Principio base: i fronti d'onda delle onde incidente e rifratta devono essere in corrispondenza all'interfaccia.
- Dato che il mezzo anisotropo supporta due distinti modi con diversi indici di rifrazione, un'onda incidente genera due onde rifratte con diverse direzioni e diverse polarizzazioni.

- La corrispondenza dei fronti d'onda all'interfaccia richiede che sia soddisfatta la legge di Snell

$$K_0 \sin\Theta_1 = K \sin\Theta$$

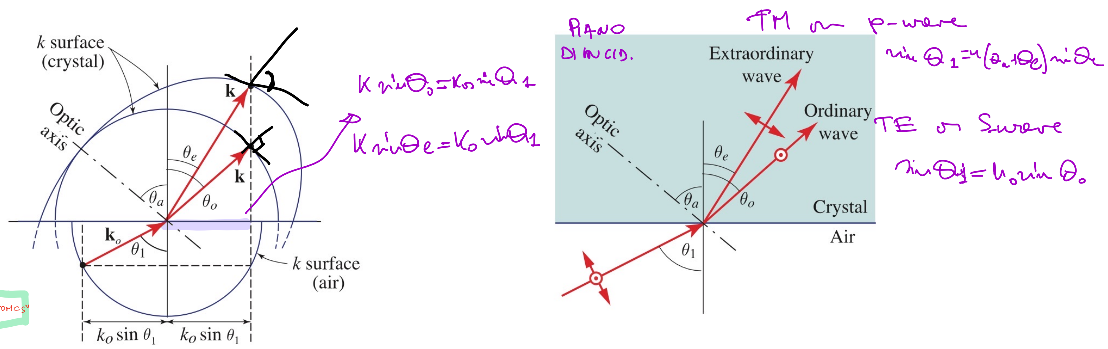
incidenza (Θ_1) — rifrazione (Θ)

$\Rightarrow$ Se il mezzo su cui si incide è anisotropo $K = n(\Theta) K_0$, cioè K è funzione di Θ, quindi la legge di Snell diventa

$$K_0 \sin\Theta_i = n(\Theta_a + \Theta) K_0 \sin\Theta$$

$$\sin\Theta_i = n(\Theta_a + \Theta) \sin\Theta$$

dove Θ_a è l'angolo tra l'asse ottico e la normale alla superficie di interfaccia. La legge di Snell con $K = K(\Theta)$ si può risolvere graficamente. Facciamo l'esempio del cristallo uniassiale.

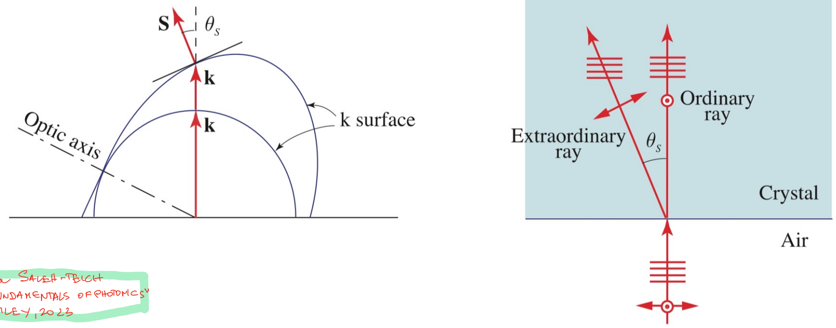


Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

Figure 6.3-13 Determination of the angles of refraction by matching projections of the **k** vectors in air and in a uniaxial crystal.

RAGGI

- In un mezzo anisotropo non è detto che i raggi si propaghino in direzione normale ai fronti d'onda.



Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023

Figure 6.3-14 Double refraction at normal incidence.

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023

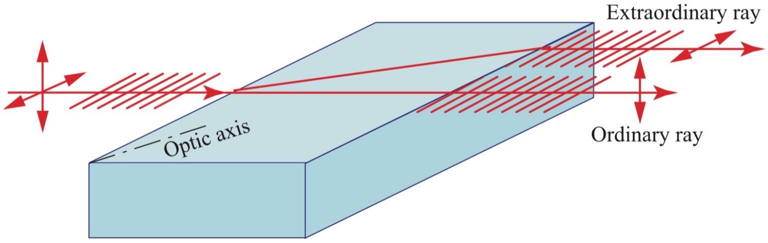


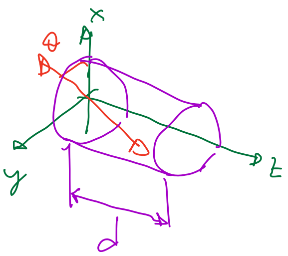
Figure 6.3-15 Double refraction through an anisotropic plate. The plate serves as a polarizing beamsplitter.

ATTIVITA' OTTICA ED EFFETTO FARADAY

- Alcuni materiali, detti otticamente attivi, hanno la proprietà di agire come rotatori della polarizzazione.
- I loro modi normali sono onde RCP e LCP, invece che onde linearmente polarizzate, che viaggiano con differenti velocità di fase.
- Poniamo
  $n_+ \rightarrow$ indice di rifrazione per l'onda RCP
  $n_- \rightarrow$ indice di rifrazione per l'onda LCP

le corrispondenti velocità di fase sono $v_+ = \frac{c_0}{n_+}$ e $v_- = \frac{c_0}{n_-}$

• Prendiamo un'onda polarizzata linearmente ad un angolo θ con l'asse x ed esprimiamola nella base delle polarizzazioni circolari (usiamo i vettori di Jones)



$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{-i\theta}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{i\theta}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

• Se l'onda si propaga attraverso uno spessore d di materiale otticamente attivo, le onde RCP e LCP acquistano le fasi

$$\varphi_{\pm} = \frac{2\pi n_{\pm} d}{\lambda_0} \qquad \left(\begin{array}{l} + \to \text{RCP} \\ - \to \text{LCP}\end{array}\right)$$

quindi

$$\frac{1}{2} e^{-i\theta} e^{-i\varphi_+}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{i\theta} e^{-i\varphi_-}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i(\theta-\varphi_+)} \\ i e^{-i(\theta-\varphi_+)}\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{i(\theta-\varphi_-)} \\ -i e^{-i(\theta-\varphi_-)}\end{bmatrix} \quad (*)$$

Poniamo

$$\varphi = \varphi_- - \varphi_+ \qquad \Rightarrow \qquad \varphi + 2\varphi_0 = 2\varphi_- \Rightarrow \varphi_- = \frac{\varphi}{2} + \varphi_0$$

$$2\varphi_0 = \varphi_+ + \varphi_- \qquad \qquad \varphi - 2\varphi_0 = -2\varphi_+ \Rightarrow \varphi_+ = -\frac{\varphi}{2} + \varphi_0$$

segue

$$e^{i(\theta-\varphi_+)} = e^{i(\theta-\varphi_0+\varphi/2)} = e^{-i\varphi_0} e^{i(\theta+\varphi/2)}$$

$$e^{i(\theta-\varphi_-)} = e^{i(\theta-\varphi_0-\varphi/2)} = e^{-i\varphi_0} e^{i(\theta-\varphi/2)}$$

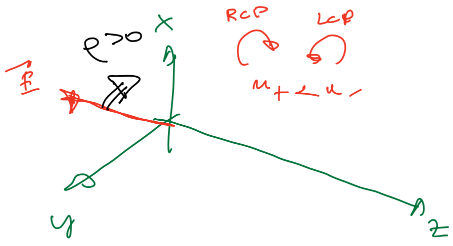
e in definitiva l'espressione di cui sopra (*) vale

$$e^{-i\varphi_0}\begin{bmatrix}\cos(\theta-\varphi/2)\\ \sin(\theta-\varphi/2)\end{bmatrix}$$

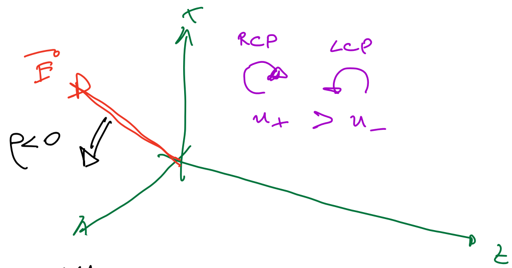
che, a parte una fase comune, rappresenta un'onda linearmente polarizzata ruotata di un angolo $\varphi/2 = \dfrac{\pi(n_- - n_+)d}{\lambda_0}$ rispetto alla polarizzazione iniziale.

la grandezza $\rho = \frac{\pi(n_- - n_+)}{\lambda_0}$ si chiama **potere rotatorio**.

→ la direzione in cui ruota il piano di polarizzazione è data dalla componente circolarmente polarizzata che ha l'indice di rifrazione minore (maggiore velocità di fase)

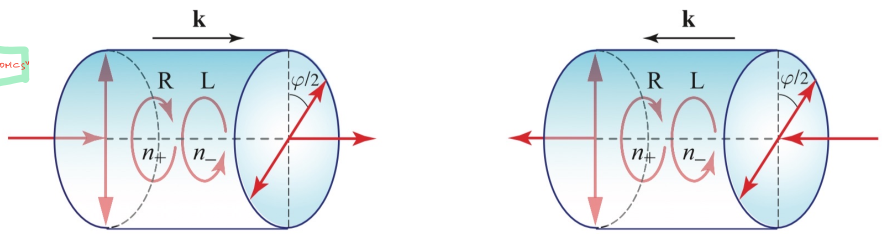


MATERIALE DESTROGIRO



MATERIALE LEVOGIRO

da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023



(a) Forward wave (b) Backward wave

Figure 6.4-1 (a) The rotation of the plane of polarization by an optically active medium results from the difference in the velocities for the two circular polarizations. In this illustration, the right circularly polarized wave (R) is faster than the left circularly polarized wave (L), i.e., $n_+ < n_-$, so that ρ is positive and the material is dextrorotatory. (b) If the wave in (a) is reflected after traversing the medium, the plane of polarization rotates in the opposite direction so that the wave retraces itself.

• Normalmente l'attività ottica si riscontra in mezzi che abbiano una struttura microscopica di tipo elicoidale.

Esempi: Se, Te, TeO_2, quarzo — sostanze inorganiche

zuccheri, aminoacidi — sostanze organiche

zuccheri: hanno entrambe le forme:

glucosio → destrosio → destrogiro

glucosio → fruttosio → levogiro

aminoacidi: quasi tutti levogiri

• Per misurare la concentrazione di zucchero di una soluzione si misura l'attività ottica (saccarimetro)

Equazioni costitutive

Il campo magnetico $\vec{B} \propto e^{+i\omega t}$ di un'onda luminosa che incide su un materiale a struttura elicoidale, induce una corrente, che a sua volta induce una polarizzazione elettrica:

$$\text{Polarizzazione} \propto \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B} = \underbrace{-\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{\text{R eq. di Maxwell}}$$

Segue che la relazione tra $\vec{D}$ ed $\vec{E}$ non è locale, cioè $\vec{D}(\vec{r})$ dipende da $\vec{E}(\vec{r})$, ma anche dai punti $\vec{r}'$ di un intorno di $\vec{r}$ che serve per poter fare le derivate parziali contenute in $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})$.

Per un'onda piana $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -i\vec{k}\times\vec{E}$ quindi in definitiva

$$\vec{D} = \underbrace{\varepsilon\vec{E}}_{\text{rapporto di un mezzo isotropo}} + i\varepsilon_0 \underbrace{\xi}_{\substack{\text{pseudoscalare}\\ \text{il cui segno dipende}\\ \text{dalla chiralità del}\\ \text{sistema di coordinate}}} \vec{k}\times\vec{E}$$

equazione costitutiva di un mezzo otticamente attivo

→ Pseudoscalare: scalare che cambia segno quando si invertono gli assi coordinati, cioè si fa una trasformazione per parità

- la relazione di cui sopra si può riscrivere

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + i\varepsilon_0\vec{G}\times\vec{E} \quad \text{, dove } \vec{G} = \xi\vec{k} \text{ è il vettore giratorio}$$

- Notare che $\vec{G}$ dipende dal vettore d'onda $\vec{k}$
- Nei mezzi otticamente attivi $\vec{D}$ ed $\vec{E}$ non sono paralleli visto che $\vec{G}\times\vec{E}$ è $\perp$ ad $\vec{E}$.

- Prendiamo ora un'onda che si propaghi lungo z, quindi $\vec{k} = (0,0,k)$ e $\vec{G} = \xi\vec{k} = (0,0,G)$

• Si ha $\vec{G}\times\vec{E} = \det\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & G \\ E_1 & E_2 & 0 \end{vmatrix} = -GE_2\hat{x} + GE_1\hat{y}$

quindi l'equazione $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + i\varepsilon_0\,\vec{G}\times\vec{E}$ si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -iG\varepsilon_0 & 0 \\ iG\varepsilon_0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_0\begin{bmatrix} n^2 & -iG & 0 \\ iG & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

attività ottica

contributo "isotropo"

• Prendiamo ora le due onde polarizzate circolarmente con $\vec{E}_+ = \begin{bmatrix} E_0 \\ iE_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (RCP) ed $\vec{E}_- = \begin{bmatrix} E_0 \\ -iE_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (LCP)

Si ha

$$\vec{D}_{RCP} = \varepsilon_0\begin{vmatrix} n^2 & -iG & 0 \\ iG & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_0 \\ iE_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_0 E_0\begin{bmatrix} n^2+G \\ i(n^2+G) \\ 0 \end{bmatrix} = (n^2+G)\varepsilon_0 E_0\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 n_+^2\,\vec{E}_+$$

$$\vec{D}_{LCP} = \varepsilon_0\begin{vmatrix} n^2 & -iG & 0 \\ iG & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_0 \\ -iE_0 \\ 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_0 E_0\begin{bmatrix} n^2-G \\ -i(n^2-G) \\ 0 \end{bmatrix} = (n^2-G)\varepsilon_0 E_0\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 n_-^2\,\vec{E}_-$$

dove $n_\pm^2 = n^2 \pm G$

• Si conclude che per le onde RCP e LCP il vettore $\vec{D}$ è parallelo ad $\vec{E}$ e che le onde RCP e LCP sono i modi normali di un mezzo otticamente attivo.

• Si noti che $G = \xi K = \frac{2\pi\xi}{\lambda_0}$ e $G = \left(\frac{n_+ + n_-}{2}\right)(n_+ - n_-) \propto (n_+ - n_-)$

quindi il potere rotatorio

$$\rho = \frac{\pi(n_- - n_+)}{\lambda_0} \text{ è } \propto \frac{1}{\lambda_0^2}$$

Se $G \ll n$ si può vedere che $\rho \approx -\frac{\pi G}{\lambda_0 n}$

ATTIVITÀ MAGNETO-OTTICA – EFFETTO FARADAY

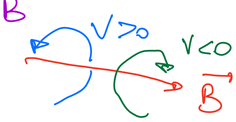
• Molti materiali agiscono da rotatori della polarizzazione in presenza di un campo magnetico statico → EFFETTO FARADAY

• In questo caso il potere rotatorio è dato da

$\rho = V B$ dove $V \to$ costante di Verdet

$B \to$ componente di $\vec{B}$ nella direzione di propagazione dell'onda

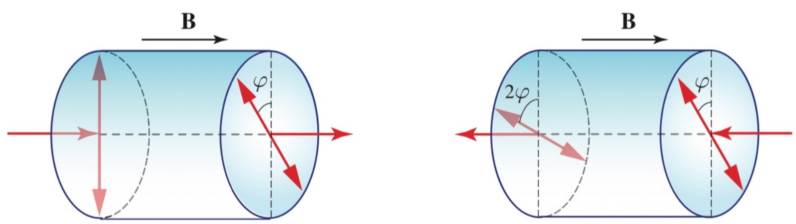
→ Il senso di rotazione è dato dalla direzione di $\vec{B}$



L'angolo totale di rotazione è dato da $\theta = \rho d = V B d$ dove d è lo spessore di materiale attraversato

NOTA BENE: Contrariamente al caso dei materiali otticamente attivi, nell'effetto Faraday la rotazione avviene sempre nello stesso verso relativamente a $\vec{B}$ indipendentemente dalla direzione di propagazione

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics", Wiley, 2023



(*a*) Forward wave (*b*) Backward wave

Figure 6.4-2 (*a*) Polarization rotation in a medium exhibiting the Faraday effect. (*b*) The sense of rotation is invariant to the direction of travel of the wave.

• Nei materiali magneto-ottici si ha che il tensore permeabilità dielettrica ε è alterato dalla presenza di un campo magnetico statico $\vec{H}$:

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{H})$$

• L'effetto ha origine dall'interazione di $\vec{H}$ con gli elettroni del mezzo che si mettono in moto in risposta al campo $\vec{E}$ dell'onda luminosa

ESEMPI DI COSTANTI DI VERDET

Magnetic materials	MO material	λ (nm)	V (rad Tm^{-1})	Reference
Diamagnetic	Dense flint glass	505	33.6	Thamaphat et al. (2006)
		525	30.4	
	YAG	632.8	5.86	Munin et al. (1992)
		514.5	9.13	
		501.7	9.67	
		496.5	9.9	
		488	10.27	
		476.5	10.78	
		472.4	11	
		465.8	11.36	
		457.9	11.82	
	BK-7 glass	632.8	4.30	
		514.5	6.72	
		501.7	7.16	
		496.5	7.29	
		488	7.58	
		476.5	7.98	
		472.4	8.13	
		465.8	8.41	
		457.9	8.70	
	Dynasil 1001	632.8	3.48	
		514.5	5.48	
		501.7	5.76	
		496.5	5.9	
		488	6.14	
		476.5	6.46	
		472.4	6.57	
		465.8	6.79	

Per l'effetto Faraday si ha dunque

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i \varepsilon_0 \vec{G} \times \vec{E}$$

dove però $\vec{G} = \gamma_B \vec{B} = \gamma_B \mu \vec{H}$

coefficiente magneto-giratorio

campo magnetico statico

Si noti che $\vec{G}$ non dipende da $\vec{k}$ in questo caso, e quindi invertendo la direzione di propagazione attraverso il mezzo il verso di rotazione del piano di polarizzazione rimane invariato.

- Nel caso dell'effetto Faraday il potere rotatorio è dato da

$$\rho \simeq -\frac{\pi G}{\lambda_0 n} = -\frac{\pi \gamma_B B}{\lambda_0 n} = VB$$

cioè $V \simeq -\frac{\pi \gamma_B}{\lambda_0 n}$, la costante di Verdet dipende da λ_0

ESEMPI DI DISPOSITIVI POLARIZZANTI

POLARIZZATORI

Polarizzazione per assorbimento selettivo o DICROISMO

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

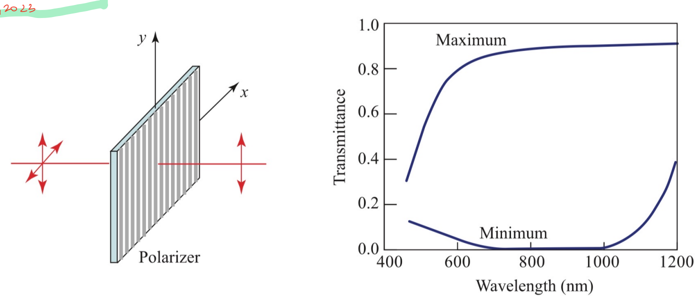


Figure 6.6-1 Power transmittances of a typical dichroic polarizer with the plane of polarization of the light aligned for maximum and minimum transmittance, as indicated.

Principio base

Il mezzo assorbe solo una di due polarizzazioni lineari ortogonali

Esempio: lastre "Polaroid"

Polarizzazione per riflessione all'angolo di Brewster

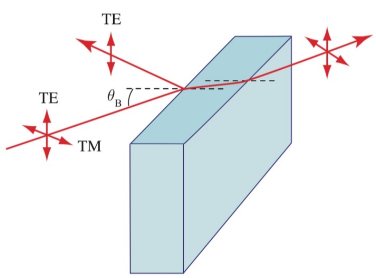


Figure 6.6-2 The Brewster-angle polarizer.

Principio base

Riflessione di Fresnel all'angolo di Brewster.

Polarizzazione per rifrazione nei mezzi anisotropi

· Principio base

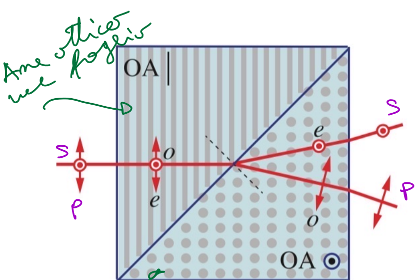
All'ingresso in un mezzo otticamente anisotropo, il raggio ordinario e quello straordinario si rifrangono ad angoli differenti e quindi si separano. Inoltre essi sono polarizzati ortogonalmente.

Esempi

PBS → Polarizing Beam Splitters
Consistono di due prismi di materiali uniassici incollati fra loro.

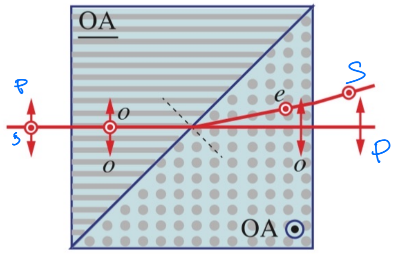
– Prisma di Wollaston ($n_o > n_e$ uniassico negativo)

La componente p (parallela al piano di incidenza) è straordinaria nel primo cristallo e ordinaria nel secondo, viceversa per la componente s.
Nel primo cristallo p ed s viaggiano insieme per l'incidenza normale, poi si separano per birifrangenza.



(a) Wollaston prism

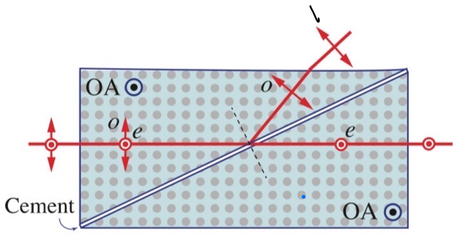
asse ottico ⊥ al foglio



(*b*) Rochon prism

Prisma di Rochon

- La componente p è ordinaria in entrambi i cristalli, per cui si trasmette senza rifrazione.
- La componente s è ordinaria nel primo cristallo e straordinaria nel secondo, per cui si rifrange e si separa



(*c*) Glan-Thompson prism

Prisma Glan-Thompson

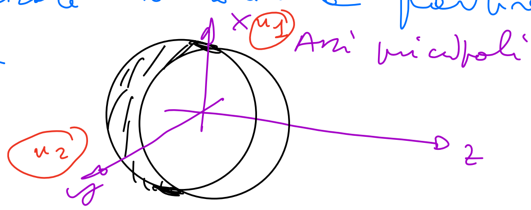
- La polarizzazione p è ordinaria nel primo cristallo ed S è straordinaria, con $n_o > n_e$.
- La polarizzazione p incide all'interfaccia all'angolo critico, per cui subisce riflessione totale, mentre la componente S è trasmessa perché si propaga con $n_e < n_o$ e quindi ha un angolo critico maggiore.

LAMINE RITARDANTI

- Le lamine ritardanti si utilizzano per convertire una polarizzazione in un'altra.

  Esempi già visti: lamina $\lambda/4$ e lamina $\lambda/2$
- Sono realizzate di solito a partire da cristalli anisotropi.

Se $n_1 < n_2$, x è l'asse veloce



Ritardo tra E_1 ed E_2

$$\Gamma = (n_2 - n_1) k_0 d = 2\pi (n_2 - n_1) \frac{d}{\lambda_0}$$

Da Saleh-Teich "Fundamentals of Photonics" Wiley, 2023

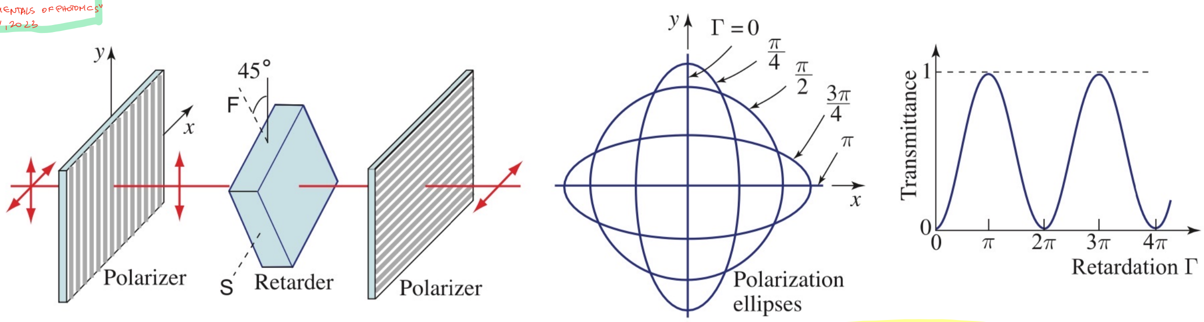


Figure 6.6-4 Controlling light intensity by means of a wave retarder with variable retardation Γ placed between two crossed polarizers.

ROTATORI

- Mezzi otticamente attivi e mezzi magneto-ottici si possono usare per ruotare la polarizzazione della luce.
- Un rotatore di Faraday, ad esempio, può essere posizionato tra due polarizzatori incrociati in modo da controllare l'intensità trasmessa mediante un campo magnetico.

DISPOSITIVI POLARIZZANTI NON RECIPROCI

- Se l'effetto di un dispositivo sulla polarizzazione è invariante rispetto all'inversione della direzione di propagazione, allora il dispositivo si dice reciproco, altrimenti non-reciproco.

- Esempi di dispositivi non-reciproci

ISOLATORE DI FARADAY

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

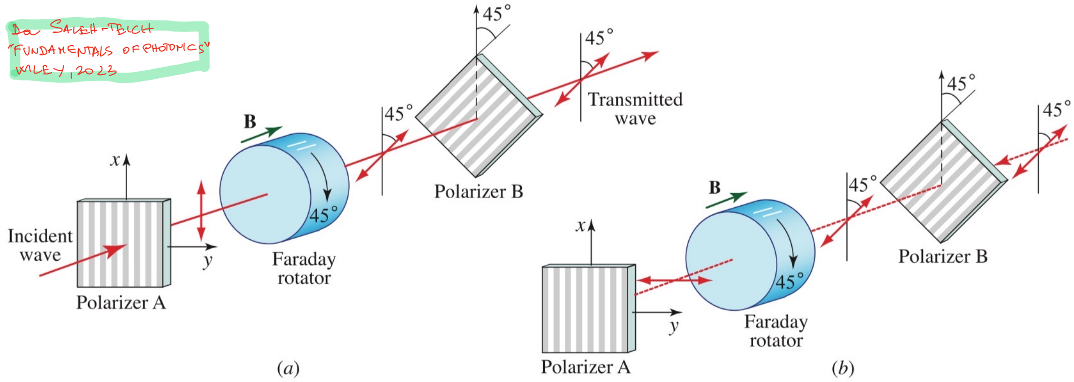


Figure 6.6-5 An optical isolator that makes use of a Faraday rotator transmits light in one direction. (*a*) A wave traveling in the forward direction is transmitted. (*b*) A wave traveling in the backward (or reverse) direction is blocked.

ROTATORE NON RECIPROCO

Da SALEH-TEICH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2023

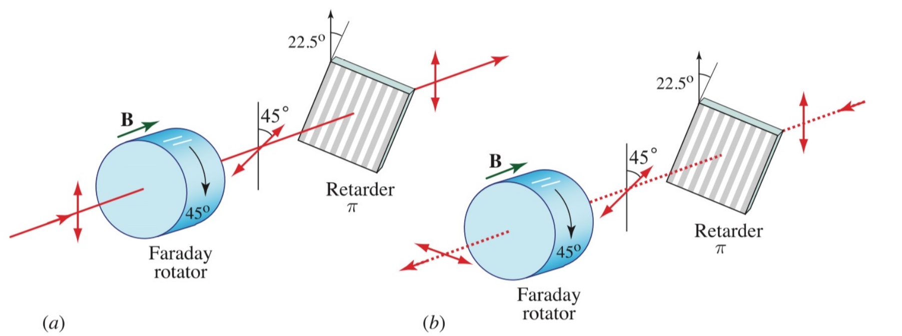


Figure 6.6-6 A Faraday rotator followed by a half-wave (π) retarder is a nonreciprocal device that: (a) maintains the polarization state of a linearly polarized forward-traveling wave, but (b) rotates the plane of polarization of the backward-traveling wave by 90°.