

- Ricordiamo che diciamo **onde piane** quelle onde in cui le normali si fanno fronte fanno angoli piccoli con l'asse ottico (asse z)
- Le onde piane devono soddisfare l'equazione di Helmholtz piana.
- I **fasci gaussiani** costituiscono un'importante insieme di soluzioni dell'equazione di Helmholtz piana.
- **Proprietà principali dei fasci gaussiani**
 - **potenza** del fascio concentrata in una piccola zona cilindrica intorno all'asse del fascio
 - la **distribuzione dell'intensità** in un qualsiasi piano trasverso è una gaussiana o simmetrica circolare centrata sull'asse
 - la **larghezza della funzione** è minima in una posizione, detta "waist", e poi si allarga allontanandosi dal "waist"
 - I **fronti d'onda** sono approssimativamente piani nella zona del waist, poi diventano gradualmente sferici allontanandosi dal waist.
 - la **divergenza angolare** delle normali ai fronti d'onda è la minima possibile per una data larghezza del fascio
 - i **fasci luminosi emessi dai laser** sono normalmente gaussiani.

- Onde piane monocromatiche che si propagano lungo z - ikz

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

\nearrow ampiezza complessa
 \nwarrow involucro complesso

$$U(\vec{r}), A(\vec{r}) \in \mathbb{C}$$

$A(\vec{r})$ è n costante in un intorno di dimensione nd , dove l'onda è circa piana e le normali ai fronti d'onda sono piane.

- Perché $U(\vec{r})$ soddisfi l'equazione complessa deve soddisfare

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad \text{EQ. DI HELMHOLTZ}$$

$$\nabla_T^2 A - ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad \text{EQ. DI HELMHOLTZ PARASSIALE}$$

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- L'onda parabolica è una semplice soluzione dell'equazione di Helmholtz parassiale

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z} e^{-ik \frac{r^2}{2z}}$$

$r^2 = x^2 + y^2$
 $A_1 \text{ costante} \in \mathbb{C}$

ONDA PARABOLICA

- L'onda parabolica è l'approssimazione parassiale dell'onda sferica $U(r) = \frac{A_1}{r} e^{-ikr}$ quando $x, y \ll z$

- Una seconda possibile soluzione dell'equazione di Helmholtz parassiale conduce al fascio gaussiano.
- Si parte dall'onda parabolica, che è centrata intorno a $z=0$ e la ricentra traslando da z a $z - \xi$, dove ξ è una costante $\in \mathbb{C}$:

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik \frac{r^2}{2q(z)}} \quad q(z) = z - \xi$$

- Anche $A(\vec{r})$ "traslata" è una soluzione dell'equazione di Helmholtz parassiale.

- Se $\xi = -jz_0$ con $z_0 \in \mathbb{R}$, cioè ξ è puramente immaginario, si ottiene il fascio gaussiano

$q(z) \rightarrow q$ -parameter
 $z_0 \rightarrow$ distanza di Rayleigh

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}} \quad q(z) = z + jz_0$$

- Per separare ampiezza e fase di $A(\vec{r})$ scriviamo preliminarmente $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{1}{\pi W^2(z)}$ e sostituirlo in $A(\vec{r})$

si trova l'espressione complessa del fascio gaussiano

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}} e^{-i \left[k z + \frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)} - \zeta(z) \right]}$$

dove $W(z)$ è una misura della larghezza del fascio,
 $R(z)$ è una misura del raggio di curvatura dei fronti d'onda e

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right]$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_0}$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad A_0 = \frac{A_1}{i z_0}$$

A_0 e z_0 sono due parametri indipendenti determinati dalle condizioni al contorno

PROPRIETA' DEI FASCI GAUSSIANI

INTENSITA'

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2 = I(r, z) = I_0 \left| \frac{W_0}{W(z)} \right|^2 e^{-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_0 = |A_0|^2$$

$$\text{nell'axe } I(0, z) = I_0 \left| \frac{W_0}{W(z)} \right|^2 = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Rayleigh range, l'intensità si dimezza per $z = z_0$

Per $|z| \gg z_0$ $I(0, z) \approx \frac{I_0 z_0^2}{z^2}$, similmente all'andamento $\frac{1}{r^2}$ della onda sferica e neobolabile



DA SIEBELT BUCH
FUNDAMENTALS OF FIBER OPTICS
MILEY 2013

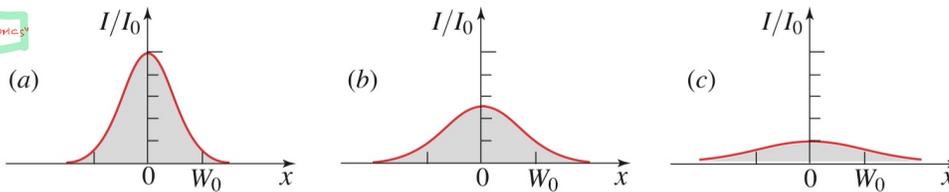
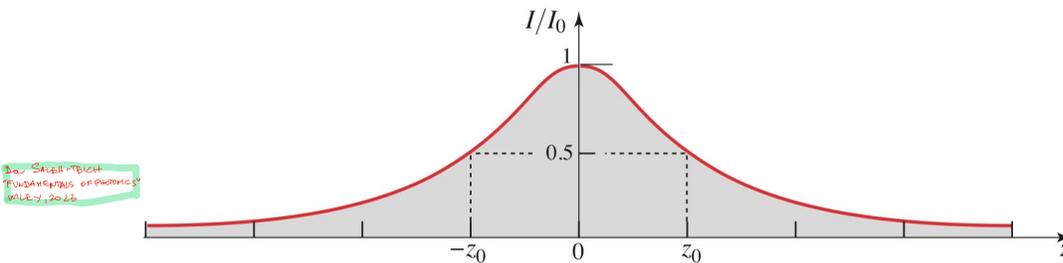


Figure 3.1-1 Normalized Gaussian beam intensity I/I_0 as a function of the radial distance ρ at different axial distances: (a) $z = 0$; (b) $z = z_0$; (c) $z = 2z_0$.



DA SIEBELT BUCH
FUNDAMENTALS OF FIBER OPTICS
MILEY 2013

Figure 3.1-2 The normalized beam intensity I/I_0 at points on the beam axis ($\rho = 0$) as a function of distance along the beam axis, z .

POTENZA

la potenza totale trasportata dal fascio è

$$P = \int_0^{\infty} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2)$$

Si può ricavare $I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}}$

- È interessante il rapporto tra la potenza contenuta in un cerchio di raggio ρ_0 in un piano trasverso e P

$$\eta = \frac{1}{P} \int_0^{P_0} I(r, z) 2\pi r dr = 1 - e^{-\frac{2R^2}{W^2(z)}}$$

- Si vede che per una data posizione z , la potenza contenuta in un raggio $P_0 = W(z)$ è il 86% della potenza totale. Se prendiamo $P_0 = 1.5 W(z)$ la percentuale sale al 99% \Rightarrow si può parlare di confinamento spaziale intorno all'axe z e quindi di fascio.

LARGHEZZA DEL FASCIO

- In un piano trasverso qualsiasi l'intensità del fascio è massima sull'axe e decresce di un fattore $\frac{1}{e^2} \approx 0.135$ alla distanza radiale $r = W(z)$, dove è contenuta l'86% della potenza

$W(z) \rightarrow$ larghezza o "raggio" del fascio

Ricordiamo che $W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ che ha il suo

valore minimo W_0 per $z=0$. W_0 è detto "waist", mentre

$2W_0$ è la dimensione del spot (not size)

Dr. SACCHETTI
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
MAY 7, 2023

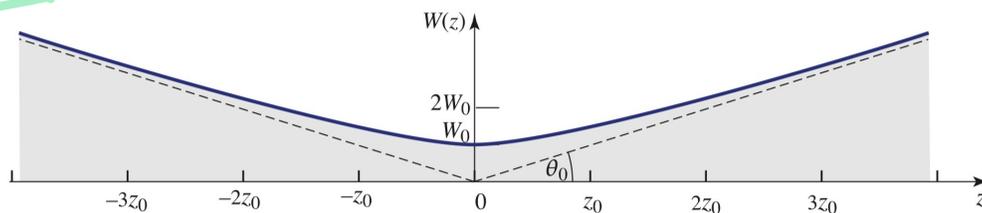


Figure 3.1-3 The beam width $W(z)$ assumes its minimum value W_0 at the beam waist ($z = 0$), reaches $\sqrt{2}W_0$ at $z = \pm z_0$, and increases linearly with z for large z .

DIVERGENZA DEL FASCIO

Per $z \gg z_0$ abbiamo

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z$$

dove $\theta_0 = \frac{W_0}{z_0}$ è la semiapertura del cono di divergenza
 e le onde $\theta_0 = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}$.
 circa l'86% della potenza è contenuta in questo cono

$2\theta_0 = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{2W_0}$
 apertura del cono \rightarrow spot size \rightarrow

PROFONDITÀ DI CAMPO

$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$

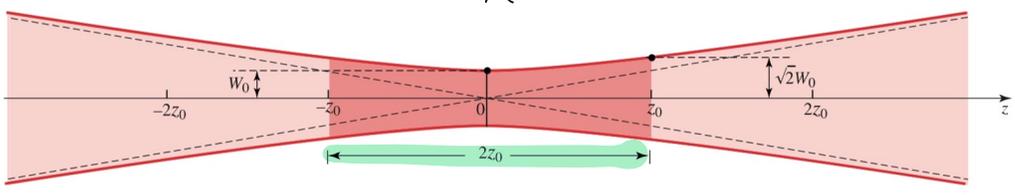


Figure 3.1-4 Depth of focus of a Gaussian beam.

FASE DEL RASO GAUSSIANO

Dall'espressione per $U(\vec{r})$, la fase è data da

$$\varphi(r, z) = kz - \int(z) + \frac{k r^2}{2R(z)}$$
 Fase dell'onda viene \rightarrow kz
 ritardo aggiuntivo della fase di Gouy \rightarrow $-\int(z)$
 curvatura dei fronti d'onda \rightarrow $\frac{k r^2}{2R(z)}$

La fase di Gouy origina dal fatto che essendo l'onda confinata specialmente in senso trasverso, i vettori d'onda delle onde piane che la compongono hanno, a causa della trasformata di Fourier, delle componenti trasverse che si allargano a spese delle componenti assiali k_z rispetto al valore delle k_z di un'onda piana che è dato da $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$

FASE DI GOUY

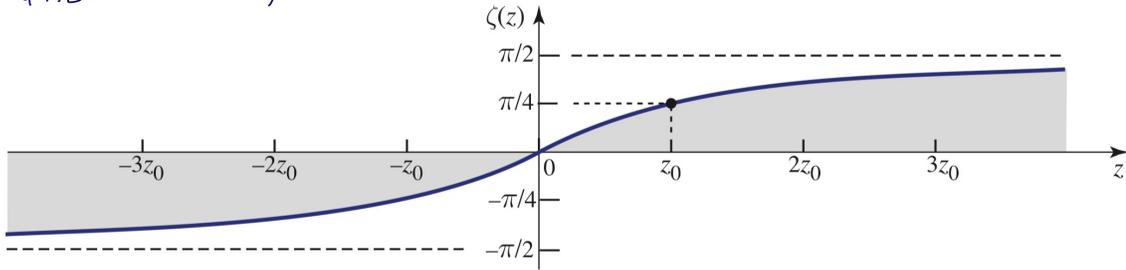


Figure 3.1-5 The function $\zeta(z)$ represents the phase retardation of the Gaussian beam relative to a uniform plane wave at points on the beam axis.

FRONTI D'ONDA

• le superfici equifase sferoidali

$$k \left[z + \frac{z^2}{2R(z)} \right] - j(z) = 2\pi q, \text{ con } q \in \mathbb{N}$$

• Siccome $R(z)$ e $j(z)$ variano lentamente, le poniamo considerate costanti, per un dato z , mi punti entro la lunghezza $\lambda(z)$ del fascio, quindi scriviamo

$$k \left[z + \frac{z^2}{2R} \right] \approx q\lambda + \frac{j\lambda}{2\pi}$$

dove $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e R e j sono costanti

Equazione di un paraboloide con raggio di curvatura R

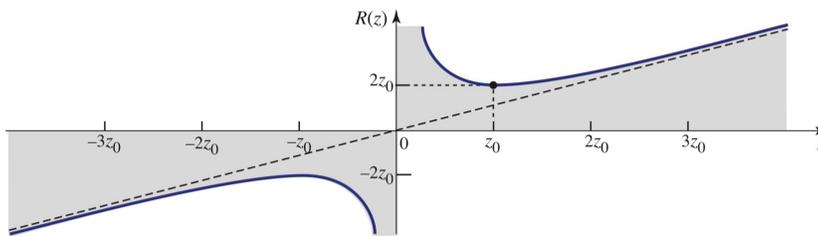


Figure 3.1-6 The radius of curvature $R(z)$ of the wavefronts of a Gaussian beam as a function of position along the beam axis. The dashed line is the radius of curvature of a spherical wave.

da SAHEB MEBCH
FUNDAMENTALS OF FIBER OPTICS
MAY 7, 2023

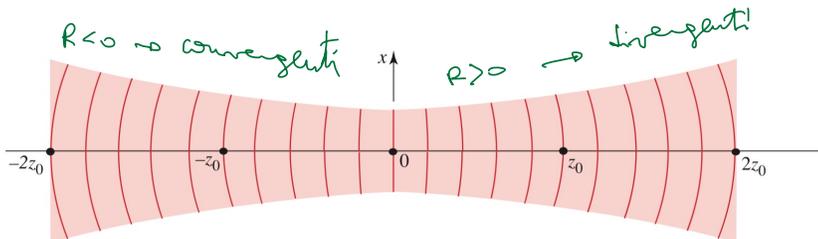


Figure 3.1-7 Wavefronts of a Gaussian beam.

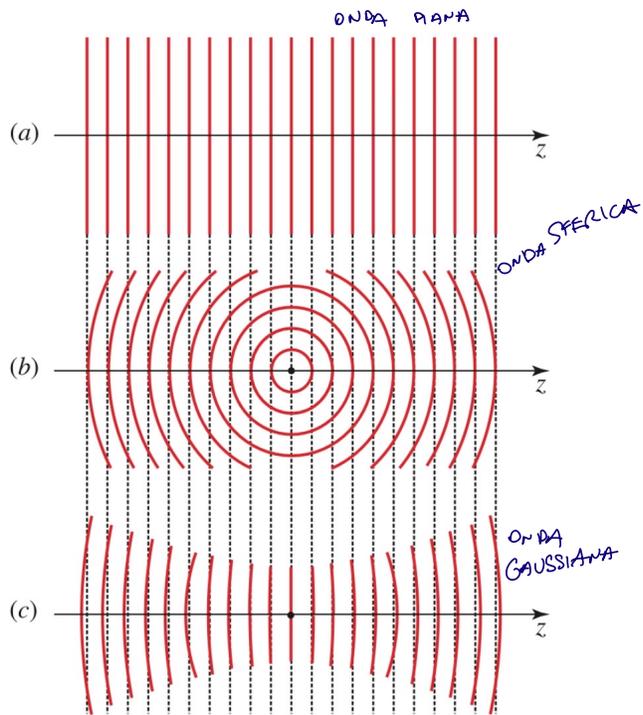


Figure 3.1-8 Wavefronts of (a) a uniform plane wave; (b) a spherical wave; (c) a Gaussian beam. At points near the beam center, the Gaussian beam resembles a plane wave. At large z the beam behaves like a spherical wave except that its phase is retarded by $\pi/2$ (a quarter of the distance between two adjacent wavefronts).