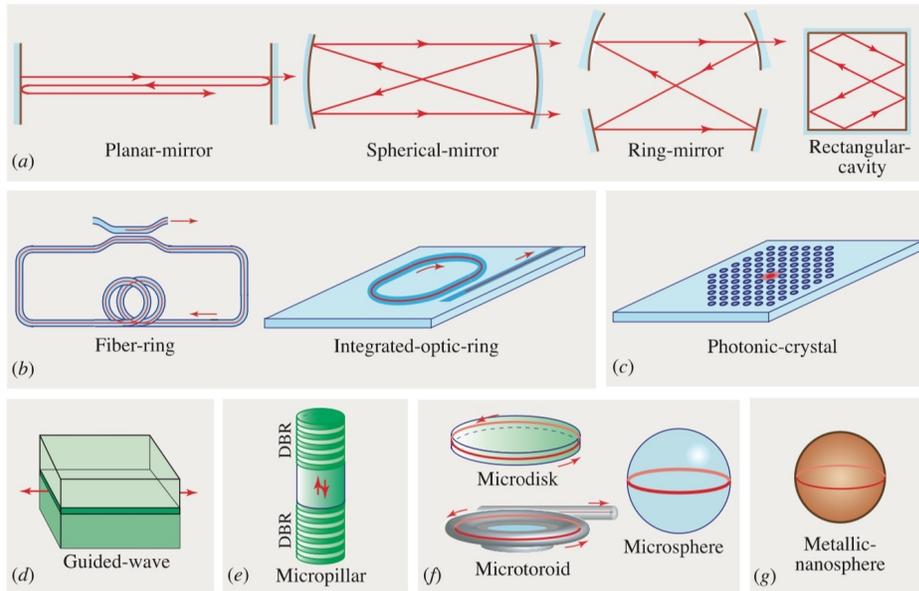
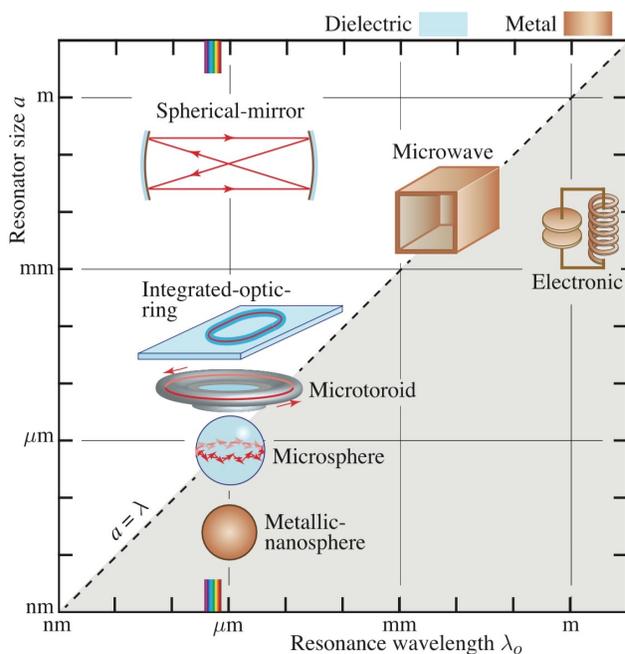


• Un risonatore ottico è l'analogo di un circuito elettronico risonante: confina e immagazzina la luce secondo frequenze di risonanza determinate dalla sua configurazione.



Da SAJEH+BICH  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
WILEY, 2023

**Figure 11.0-1** Storage of light in optical resonators via: (a) multiple reflections from mirrors; (b) propagation through closed-loop optical fibers and integrated-photonic waveguides; (c) trapping of light within defects in photonic crystals; (d) multiple Fresnel reflections at semiconductor-air boundaries; (e) reflections from periodic structures such as distributed Bragg reflectors (DBRs); (f) whispering-gallery mode reflections near the surfaces of dielectric microresonators such as disks, toroids, and spheres; and (g) localized surface plasmon oscillations in metallic nanospheres.



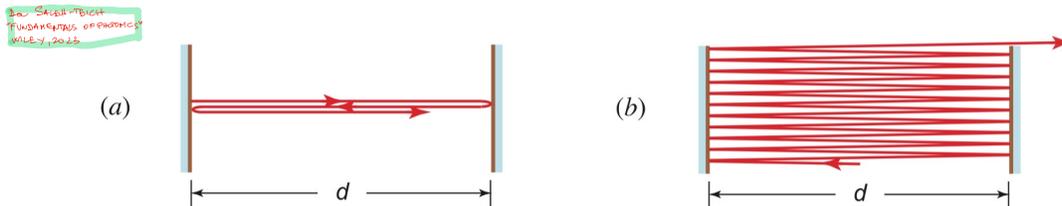
Da SAJEH+BICH  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
WILEY, 2023

**Figure 11.0-2** Resonator size  $a$  vs. resonance wavelength  $\lambda_0$  for various dielectric and metallic electromagnetic resonators. The size-to-wavelength ratio belongs to one of three regimes:  $a/\lambda_0 > 1$  (unshaded region),  $a/\lambda_0 \approx 1$  (dotted diagonal), and  $a/\lambda_0 < 1$  (shaded region). Metallic-nanosphere and electronic resonators lie well within the shaded region.

- I risonatori ottici sono di solito caratterizzati da:
  - FATTORE  $Q \rightarrow$  proporzionale al tempo di accumulo,  $Q$  grande rappresenta un forte confinamento temporale.
  - VOLUME  $V$  MODALE  $\rightarrow$  volume occupato dal modo confinato, nei micro-risonatori un piccolo valore di  $V$  rappresenta un alto grado di confinamento spaziale.
- I risonatori sono selettivi in frequenza, quindi possono essere usati come filtri o come analizzatori di spettro, ma il loro più importante è quello di "contenitori" di luce, specialmente nel caso dei laser, dove il mezzo attivo viene messo innanzi in un risonatore.

## RISONATORI A SPECCHI PIANI

- Il risonatore di Fabry-Perot è costituito da due specchi piani disposti parallelamente ad una data distanza  $d$ .



**Figure 11.1-1** Two-mirror planar resonator (Fabry-Perot resonator). (a) Light rays perpendicular to the mirrors reflect back and forth without escaping. (b) Rays that are only slightly inclined eventually escape. Rays also escape if the mirrors are not perfectly parallel.

- Consideriamo inizialmente un risonatore ideale con specchi privi di perdite.

## MODI DEL RISONATORE — ONDE STAZIONARIE

$\rightarrow$  Pansione in onde di un'onda monocromatica di freq.  $\nu$

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ U(\vec{r}) e^{i2\pi\nu t} \right\} \quad U(\vec{r}) \in \mathbb{C}$$

L'ampiezza complessa deve soddisfare l'equazione di Helmholtz

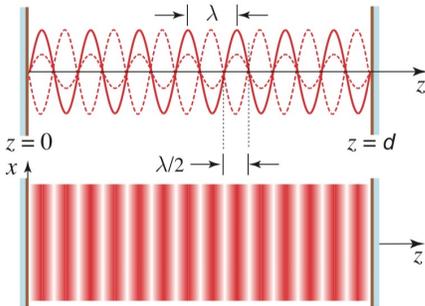
$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \text{ dove } k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

→  $U(\vec{r})$  rappresenta una componente trasversa del campo elettrico.

$c$  → velocità della luce nel mezzo considerato

- I modi del risonatore sono le soluzioni dell'equazione che soddisfano le condizioni al contorno  $U(\vec{r}) = 0$  nei piani  $z=0$  e  $z=d$

DA SAATCHI BOOK "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" WILEY, 2013



**Figure 11.1-2** (a) Wave function  $u(\mathbf{r}, t)$  for an ideal planar-mirror mode as a function of  $z$  (for  $x = y = 0$ ), portrayed at several different times. In this illustration, 14 half-wavelengths match the length of the resonator so that the mode number  $q = d/(\lambda/2) = 14$ . (b) Spatial distribution of the magnitude  $|u(\mathbf{r}, t)|$  as a function of  $x$  and  $z$  (for  $y = 0$ ) at a particular time, represented on a color scale where red represents a large magnitude and white represents zero.

→ L'onda stazionaria  $U(\vec{r}) = A \sin kz$  è una soluzione dell'equazione di Helmholtz ( $A$  è una costante) e soddisfa le condizioni al contorno per  $z=0$  e  $z=d$  se  $kd = q\pi$  dove  $q \in \mathbb{N}$ .

Quindi  $k$  può assumere solo i valori  $k_q = q \frac{\pi}{d}, q=1,2,3,\dots$

e  $U(\vec{r}) = A_q \sin k_q z$ , dove  $A_q$  sono delle costanti.

Nota

- $\nabla^2 (A \sin kz) + k^2 A \sin kz = -A k^2 \sin kz + A k^2 \sin kz = 0$
- $\sin k_{-q} = -\sin k_q z \Rightarrow$  i valori di  $q$  negativi non danno modi indipendenti
- per  $q=0$   $k_0=0$  e  $\sin k_0 z = 0$ , quindi il modo non trasporta energia

- Un'onda arbitraria contenuta nel risonatore si può scrivere come una sovrapposizione di modi

$$U(\vec{r}) = \sum_q A_q \sin k_q z$$

- Le frequenze permesse sono date da

$$\nu_q = \frac{c k_q}{2\pi} = q \frac{c}{2d} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

FREQUENZE  
DI RISONANZA

- la distanza tra due frequenze di risonanza vicine è

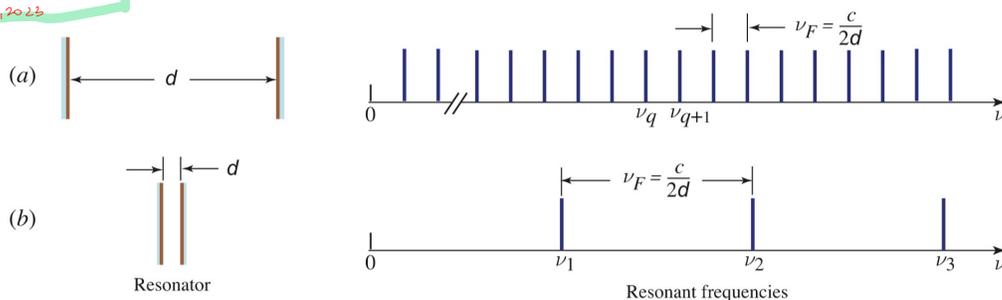
$$\nu_{FSR} = \frac{c}{2d} \quad \text{FREE SPECTRAL RANGE}$$

- La lunghezza d'onda di risonanza sono date da

$$\lambda_q = \frac{2d}{k_q} = \frac{2d}{q} \Rightarrow \text{la distanza } 2d \text{ di andata-ritorno deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda}$$

$$2d = q \lambda_q$$

DA "SALZER + BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023



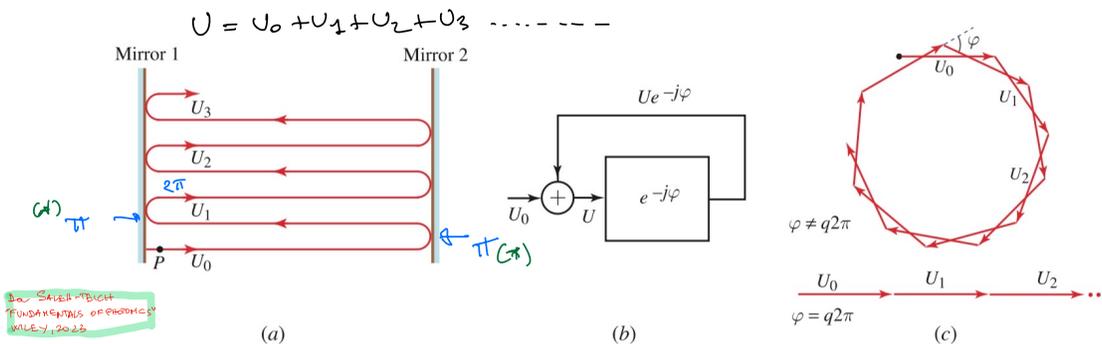
**Figure 11.1-3** The adjacent resonance frequencies of a planar-mirror resonator are separated by  $\nu_F = c/2d = c_0/2nd$ , as illustrated by two examples: (a) A 30-cm long resonator ( $d = 30$  cm) with air between the mirrors ( $n = 1$ ) has a frequency spacing between modes given by  $\nu_F = 500$  MHz. (b) A much shorter resonator with  $d = 3 \mu\text{m}$  has  $\nu_F = 50$  THz, so that the first mode has a frequency corresponding to a wavelength of  $6 \mu\text{m}$  and there are only two modes within the 700–900-nm optical band, which occupies a frequency range of 95 THz.

## MODI DEL RISONATORE — ONDE PROGRESSIVE-REGRESSIVE

- I modi del risonatore si possono trovare anche seguendo un'onda che si propaga avanti e indietro tra gli specchi: un modo è un'onda che si riproduce identica dopo un percorso andata-ritorno.
- Perché questo avvenga, lo sfasamento dovuto ad un singolo percorso andata-ritorno deve essere un multiplo di  $2\pi$ . Cioè

$$\varphi = k2d = \frac{4\pi\nu d}{c} = q2\pi \quad \text{con} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

$\Rightarrow k = q\frac{\pi}{d}$  come prima



**Figure 11.1-4** (a) A wave reflects back and forth between the resonator mirrors, suffering a phase shift  $\varphi$  on each round trip. (b) Block diagram of an optical feedback system with a phase delay  $\varphi$ . (c) Phasor diagram representing the sum  $U = U_0 + U_1 + \dots$  for  $\varphi \neq q2\pi$  and for  $\varphi = q2\pi$ .

(\*) Per ogni andata-ritorno ci sono due riflessioni, ciascuna comporta uno sfasamento di  $\pi$ , per un totale di  $2\pi$  che non influisce.

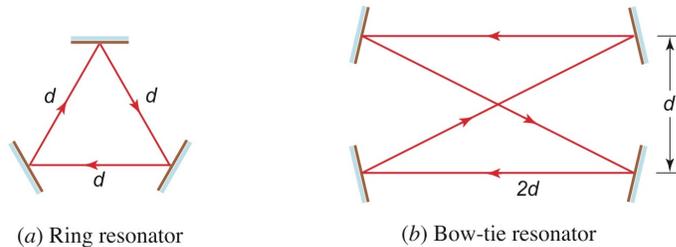
- Alternativamente, l'azione del risonatore può essere vista come una retroazione positiva, in cui l'uscita viene sommata in fase con l'ingresso.
- Infine si può analizzare il risonatore facendo una somma di infiniti modi, che dà un risultato  $\neq 0$  solo se i modi hanno una fase relativa

$$\varphi = 2q\pi, \quad q = 1, 2, \dots$$

## RISONATORI A ONDA PROGRESSIVA

- Le onde si propagano in una direzione lungo un percorso chiuso e si sovrappongono a se stesse senza cambiare direzione

Dr. Suresh Babu  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
WILEY, 2023



**Figure 11.1-5** Traveling-wave resonators. (a) Three-mirror ring resonator. (b) Four-mirror bow-tie resonator.

## PERDITE E LARGHEZZA DI RIGA

- In presenza di perdite, ad esempio assorbimento nel mezzo e/o perdite per riflessione delle riflettività rubite, i fasci da rinvolare non hanno tutti lo stesso modulo, ma ciascuno differisce dal precedente per un fattore  $h = |r|e^{-\alpha l}$ , dove  $|r| < 1$  tiene conto delle perdite per riflessione, cioè ad esempio  $U_1 = hU_0$ ,  $U_2 = hU_1 = h^2U_0$  etc..

- In definitiva

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots = U_0 + hU_0 + h^2U_0 + \dots = U_0 \sum_{j=0}^{\infty} h^j = \frac{U_0}{1-h}$$

- L'intensità luminosa è data da

$$I = |U(x)|^2 = \frac{|U_0|^2}{|1 - |r|e^{-i\phi}|^2} = \frac{I_0}{(1 - |r|e^{-i\phi})(1 - |r|e^{i\phi})} = \frac{I_0}{1 + |r|^2 - 2|r|\cos\phi}$$

che si scrive:

$$I = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2|r|}{\pi}\right)^2 \sin^2 \phi/2}$$

INTENSITA'

$$I_{max} = \frac{I_0}{1 - |r|^2}$$

$$F = \frac{\pi \sqrt{|r|}}{1 - |r|}$$

FINESSE

Intensità

$$\frac{I_0}{1 + |r|^2 - 2|r|\cos\varphi} = \frac{I_0}{1 + |r|^2 - 2|r|(1 - 2\sin^2\varphi/2)} = \frac{I_0}{1 + |r|^2 - 2|r| + 4|r|\sin^2\varphi/2}$$

$$= \frac{I_0}{(1 - |r|)^2 + 4|r|\sin^2\varphi/2} = \frac{I_0/(1 - |r|)^2}{1 + \frac{4|r|}{1 - |r|^2} \sin^2\varphi} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2|r|}{1 - |r|^2}\right)^2 \sin^2\varphi/2}$$

- L'intensità è una funzione periodica di  $\varphi$  con periodo  $2\pi$ .
- Per grandi  $\mathcal{F}$ ,  $I$  ha picchi stretti centrati intorno ai valori  $\varphi = 2q\pi$  con  $q = 1, 2, 3, \dots$
- I picchi hanno FWHM  $\Delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\mathcal{F}}$
- L'intensità si può esprimere anche in termini della frequenza  $\varphi = 2kd = 4\pi\nu d/c$

$$I = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2R}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{FSR}}\right)}, \quad I_{max} = \frac{I_0}{(1 - |r|)^2}$$

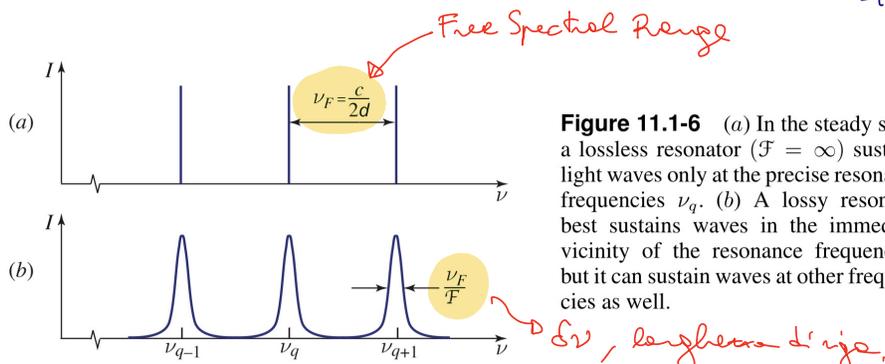
$$\nu_{FSR} = \frac{c}{2d}$$

- L'intensità massima si ottiene alle frequenze di risonanza, quando  $\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{FSR}}\right) = 0$ , cioè

$$\nu_{res} = \nu_q = q \nu_{FSR} \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

- L'intensità minima è invece data da  $I_{min} = \frac{I_{max}}{1 + \left(\frac{2R}{\pi}\right)^2}$

da SAHBI-TBICH  
"FUNDAMENTALS OF OPTICS"  
WILEY, 2023



**Figure 11.1-6** (a) In the steady state, a lossless resonator ( $\mathcal{F} = \infty$ ) sustains light waves only at the precise resonance frequencies  $\nu_q$ . (b) A lossy resonator best sustains waves in the immediate vicinity of the resonance frequencies, but it can sustain waves at other frequencies as well.

$\delta\nu$ , larghezza di risonanza

## PERDITE NEI RISUONATORI

- Due canali principali di perdite

— riflessione non completa sugli specchi

- specchi parzialmente riflettenti spesso si usano per permettere alla luce laser generata nel risonatore di uscire
- le dimensioni finite degli specchi causano la perdita della luce che si propaga intorno agli specchi stessi; inoltre l'onda riflessa viene troncata e produce una figura di diffrazione allo specchio opposto, che di nuovo tronca e così via → perdite per diffrazione

— assorbimento e diffrazione nel mezzo che riempie il risonatore. Il fattore di attenuazione andata-ritorno è espresso da  $e^{-2\alpha_s d}$ , dove  $d$  è la distanza tra gli specchi e  $\alpha_s$  è un coefficiente -

- Se chiamiamo  $R_1$  ed  $R_2$  le riflettività degli specchi, con  $R_i = |r_i|^2 < 1$ , l'intensità dell'onda decresce di un fattore  $R_1 R_2$  in una andata-ritorno

- L'attenuazione totale subita dall'onda in un percorso di andata-ritorno è esprimibile con un coefficiente

$$|r|^2 = R_1 R_2 e^{-2\alpha_s d} e^{-2\alpha_r d}$$

dove  $\alpha_r = \alpha_s + \frac{1}{2d} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$  è il coefficiente di perdite

- Se gli specchi hanno alte riflettività, cioè ad esempio  $R_1 \approx 1$  si ha

$$\ln \frac{1}{R_1} = -\ln R_1 = -\ln [1 - (1 - R_1)] \approx 1 - R_1$$

dove abbiamo usato l'espansione in serie di Taylor  $\ln(1 - \Delta) \approx -\Delta$  quando  $|\Delta| \ll 1$

Analogamente, se anche  $R_2 \approx 1$   $\ln R_2 \approx 1 - R_2$   
 Per cui il coefficiente di perdita si scrive

$$\alpha_r = \alpha_s + \frac{1}{2d} \left( \ln \frac{1}{R_1} + \ln \frac{1}{R_2} \right) \approx \alpha_s + \frac{1}{2d} (1 - R_1) + \frac{1}{2d} (1 - R_2)$$

e se gli specchi sono tali che  $R_1 = R_2 = R \approx 1$

$$\alpha_r = \alpha_s + \frac{1 - R}{d}$$

• Visto che la funzione  $\bar{g} = \frac{\pi \sqrt{|v|}}{1 - |v|}$ , se

sostituisco  $|v| = e^{-\alpha_r d}$  ho

$$\bar{g} = \frac{\pi e^{-\frac{\alpha_r d}{2}}}{1 - e^{-\alpha_r d}}$$

da cui si vede che se le perdite aumentano la funzione decresce

• Se infine  $\alpha_r d \ll 1$ , allora  $e^{-\alpha_r d} \approx 1 - \alpha_r d$  e quindi

$$\bar{g} = \frac{\pi}{\alpha_r d}$$

### VITA MEDIA DEI FOTONI

$$v_{FSR} = \frac{c}{2d}$$

$$\bar{g} = \frac{\pi}{\alpha_r d}$$

$$\Delta \nu \approx \frac{v_F}{\bar{g}} = \frac{c}{2d} \frac{\alpha_r d}{\pi} = \frac{c \alpha_r}{2\pi}$$

dove  $c \alpha_r$  rappresenta le perdite in unità di tempo.

Quindi la vita media di decadimento dei fotoni nel risonatore (o tempo medio che un fotone impiega per uscire) è similabile come

$$\tau_F = \frac{1}{c \alpha_r} = \frac{d \bar{g}}{\pi c} \quad \text{se } \alpha_r d \ll 1$$

### FATTORE DI QUALITÀ Q

• Il fattore di qualità  $Q$  è definito come  $Q = 2\pi \frac{\text{Energia immagazzinata}}{\text{Energia persa per ciclo}}$

in analogia con quanto si definisce per i circuiti elettrici risonanti

- Nel caso del risonatore ottico, detta  $E$  l'energia immagazzinata, l'energia persa per ciclo è

$$Cd\nu E \cdot \frac{1}{\nu_0} \Rightarrow$$

energia persa per unità di tempo

durata temporale di un ciclo

$$Q = \frac{2\pi\nu_0}{Cdn}$$

e ricorre  $\delta\nu = \frac{Cdn}{2\pi}$  oppure

e  $T_p = \frac{1}{Cdn}$

$Q \approx \frac{\nu_0}{\delta\nu}$  e anche  $Q = 2\pi\nu_0 T_p$

Infine

$$Q \approx \frac{\nu_0}{\delta\nu} = \frac{\nu_0}{\nu_{FSR}/Q} = \frac{\nu_0 Q}{\nu_{FSR}}$$

### Esempio

Il risonatore Fabry-Pérot di KALIP opera a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ,

per cui  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1.064 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

la distanza tra gli specchi è  $d = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m}$ ,

per cui  $\nu_{FSR} = \frac{c}{2d} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-1}} = 1.5 \cdot 10^9 = 1.5 \text{ GHz}$ ,

mentre la finezza minima è  $\mathcal{F} = 6.0 \cdot 10^4$

Quindi

$$Q = \frac{(3 \cdot 10^{14})(6.0 \cdot 10^4)}{1.5 \cdot 10^9} = \frac{1.8}{1.5} \times 10^{10} = 1.2 \times 10^{10} \quad \underline{\underline{\underline{\quad}}}$$

### RISONANZI A SPECCHI SFERICI

- Un risonatore a specchi sferici si realizza con due specchi di raggi di curvatura  $R_1$  ed  $R_2$  separati da una distanza

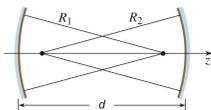


Figure 11.2-1 Geometry of a spherical-mirror resonator. In this illustration both mirrors are concave (their radii of curvature are negative).

DA: SIEGEL, 2014  
FISICA PER INGEGNERIA  
VOLUME 7, 2014

• convenzione sui raggi di curvatura

$R > 0 \rightarrow$  convesso  $\rightarrow$  (

$R < 0 \rightarrow$  concavo  $\rightarrow$  )

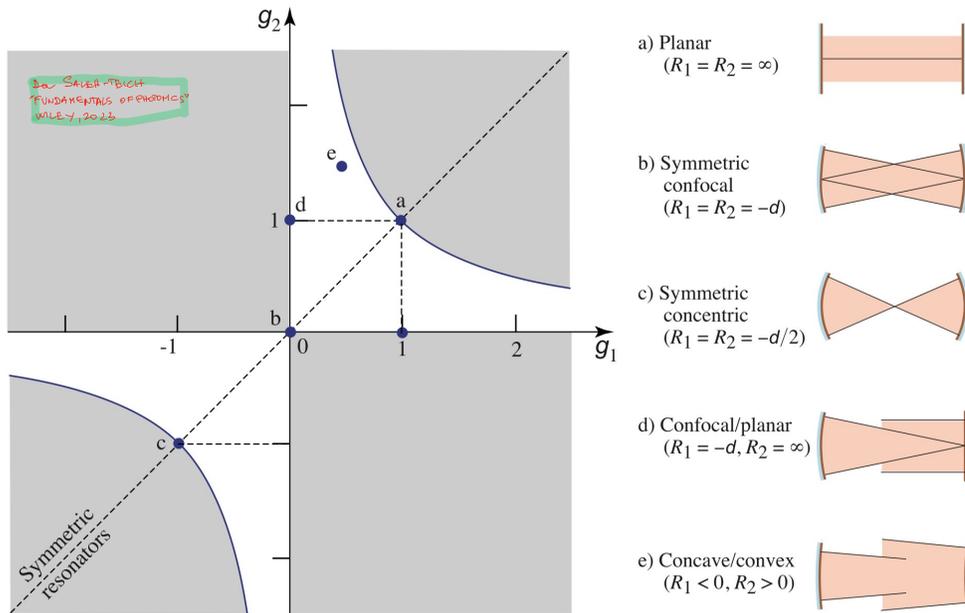
- Si può dimostrare che le condizioni per cui un fascio sia confinato nel risonatore è

$$0 \leq \left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

ovvero

CONDIZIONE DI STABILITÀ

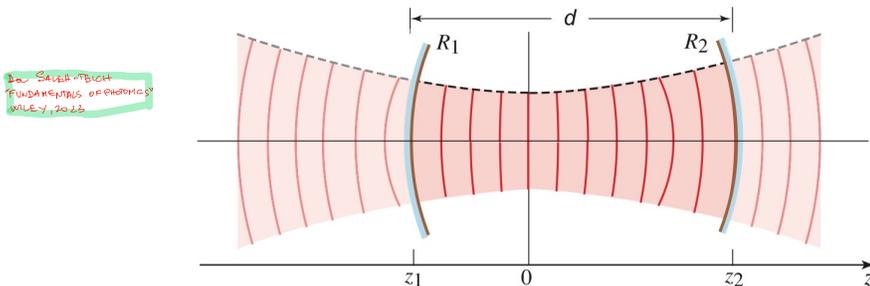


**Figure 11.2-3** Resonator stability diagram. A spherical-mirror resonator is stable if the parameters  $g_1 = 1 + d/R_1$  and  $g_2 = 1 + d/R_2$  lie in the unshaded regions, which are bounded by the lines  $g_1 = 0$  and  $g_2 = 0$ , and the hyperbola  $g_2 = 1/g_1$ .  $R$  is negative for a concave mirror and positive for a convex mirror. Commonly used resonator configurations are indicated by letters and are sketched at the right; shaded areas represent collections of rays perpendicular to the mirrors. All symmetric resonators lie along the line  $g_2 = g_1$ .

## MODI GAUSSIANI DEI RISONATORI A SPECCHI SFERICI

- Si può dimostrare che i fasci gaussiani sono una soluzione dell'equazione di Helmholtz parassiale con le condizioni al contorno imposte dagli specchi sferici del risonatore.
- Un fascio gaussiano riflesso da uno specchio sferico si ripropone esattamente in se stesso se il raggio di curvatura del fronte d'onda è uguale a quello dello specchio.

- Se questa condizione è ripetuta da entrambi gli specchi allora il fascio si riflette sempre su se stesso nel risonatore e soddisfa le condizioni al contorno imposte dagli specchi.
- Se anche la fase varia in una oscillazione di un multiplo di  $2\pi$  allora il fascio gaussiano è proprio un modo del risonatore.



**Figure 11.2-6** Fitting a Gaussian beam to two mirrors separated by a distance  $d$ . Their radii of curvature are  $R_1$  and  $R_2$ . Both mirrors are taken to be concave so that  $R_1$  and  $R_2$  are negative, as is  $z_1$ .

### FREQUENZE DI RISONANZA

- la fase di un fascio gaussiano è data da

$$\varphi(r, z) = kz - \int(z) + \frac{k r^2}{2R(z)} \quad \text{con} \quad \int(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

- Sull'asse ottico  $r=0$  e  $\varphi(0, z) = kz - \int(z)$

ritardando rispetto all'onda piana

e in corrispondenza degli specchi (posti in  $z_1$  e  $z_2$ )

$$\varphi(0, z_1) = kz_1 - \int(z_1)$$

$$\varphi(0, z_2) = kz_2 - \int(z_2)$$

→ dato che la superficie degli specchi coincide con i fronti d'onda, tutti i punti della superficie hanno la stessa fase.

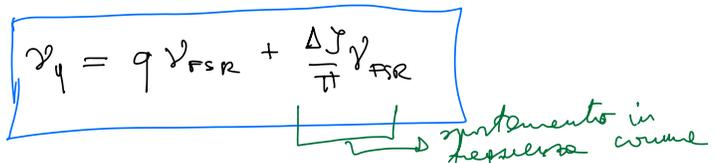
- Nella propagazione da specchio 1 a specchio 2 la fase varia di  $\varphi(0, z_2) - \varphi(0, z_1) = k(z_2 - z_1) - [\int(z_2) - \int(z_1)] = k\Delta - \Delta\int$

e in una endotto-ritorno la variazione della fase è  $2kd - 2\Delta\gamma$

- Perché l'onda si ripiegò esattamente su se stessa si deve avere  $2kd - 2\Delta\gamma = 2\pi q$  con  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- Se usiamo  $k = \frac{2\pi\gamma}{c}$  e  $v_{FSR} = \frac{c}{2d}$  otteniamo

$$2\pi \frac{\gamma}{c} d - 2\Delta\gamma = 2\pi q \Rightarrow \gamma_q = q v_{FSR} + \frac{\Delta\gamma}{\pi} v_{FSR}$$



- Notiamo che  $\gamma_{q+1} - \gamma_q = v_{FSR}$ , come nel caso del risonatore a speckle vicini -

Per il F.-P. simmetrico di KWSF in la

$$z_0 = \frac{L}{2} = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta\gamma = \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right), \text{ con } z_1 = -z_0, z_2 = z_0$$

$$\text{per cui } \Delta\gamma = \arctan(1) - \arctan(-1) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{quindi } \gamma_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) v_{FSR} = \left(q + \frac{1}{2}\right) (1.5 \text{ GHz})$$

Se vogliamo  $\gamma_q = \left(\frac{c}{1064 \text{ nm}}\right) = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , troviamo

$$\left(q + \frac{1}{2}\right) = \frac{3 \times 10^{14}}{1.5 \times 10^9} = 2 \times 10^6 \Rightarrow q \approx 2 \times 10^6$$