Corso di Matematica e Statistica
Prova di Matematica - prof. Valentina Beorchia
4 febbraio 2025

Cognome	Nome

(1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 - 9$. Dire se:
   (a) **(2 punti)** f è iniettiva, motivando la risposta;
   (b) **(2 punti)** f è suriettiva, motivando la risposta.

(a) Osservo che $f(1) = 1^2 - 9 = -8 = f(-1)$, quindi non è iniettiva (in generale, le funzioni polinomiali quadratiche non sono mai iniettive)

(b) f non è nemmeno suriettiva; infatti, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $x^2 \geq 0$, quindi: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9 \geq -9$. In particolare, se $y = -10$, non appartiene all'immagine di f: l'equazione $x^2 - 9 = -10 \iff$
$x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

(2) Siano $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ i termini di una progressione aritmetica. La somma dei primi n termini è

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n(n+3).$$

   (a) **(2 punti)** Quanto vale a_0? Quanto vale a_1?
   (b) **(2 punti)** Qual'è la ragione della progressione aritmetica? Calcolare il termine a_{11}.

(a) per $n=1$ otteniamo $a_0 = 1 \cdot (1+3) = 4$
per $n=2$ otteniamo $a_0 + a_1 = 2 \cdot (2+3) = 10 \Rightarrow a_1 = 10 - a_0 = 6$

(b) $a_1 = a_0 + d$, quindi $6 = 4 + d \Rightarrow d = 2$
$a_{11} = a_0 + 11d = 4 + 11 \cdot 2 = 26$

(3) **(3 punti)** Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ ammette punti di massimo e minimo.

Osservo che il dominio di f è $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cons. $f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot (x^2-1)' = \frac{2x}{x^2-1}$: per $x > 1$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ su $(1, +\infty)$ è strettamente crescente

da cui vediamo che f è derivabile su tutto il dominio

per $x < -1$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ su $(-\infty, -1)$ è strettamente decrescente

$\Rightarrow$ f non ammette minimi né massimi locali.

(4) **(2 punti)** Usando la derivata seconda, si determinino intervalli di convessità e concavità, nonchè eventuali punti di flesso, della funzione $f(x) = e^{x^3 - 27}$.

(2 punti) Si scriva, inoltre, il polinomio $P_2(x)$ al secondo ordine di $f(x)$ nel punto $x_0 = 3$.

- $f(x) = e^{x^3-27}$, $f'(x) = e^{x^3-27} \cdot (x^3-27)' = e^{x^3-27} \cdot 3x^2$, $f''(x) = (e^{x^3-27})' \cdot 3x^2 + e^{x^3-27} \cdot (3x^2)'$

$= e^{x^3-27} \cdot 9x^4 + e^{x^3-27} \cdot 6x$

$= 3x \cdot e^{x^3-27}(3x^3+2)$

$f''(x) \geq 0 \iff 3x(3x^3+2) \geq 0 \iff x \geq 0 \wedge x \geq -\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \iff \boxed{x \geq 0}$ ⟶ f CONVESSA

oppure $x \leq 0 \wedge x \leq -\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \iff \boxed{x \leq -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$

$f''(x) \leq 0 \iff 3x(3x^3+2) \leq 0 \iff \boxed{x \leq 0 \wedge x \geq -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$ f CONCAVA

oppure $x \geq 0 \wedge x \leq -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$: MAI

- $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$

$= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{1}{2} f''(3)(x-3)^2$

$= e^{27-27} + (e^{27-27}) \cdot 3 \cdot 3^2 (x-3) + \frac{1}{2}\, 3 \cdot 3 \cdot e^{27-27}(3 \cdot 3^3 + 2)(x-3)^2$

$= 1 + 27(x-3) + \frac{9 \cdot 83}{2}(x-3)^2$

Corso di Matematica e Statistica
Prova di Matematica - prof. Valentina Beorchia
4 febbraio 2025

Cognome	Nome

(1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1 - x^2$. Dire se:
  (a) **(2 punti)** f è iniettiva, motivando la risposta;
  (b) **(2 punti)** f è suriettiva, motivando la risposta.

(a) Osservo che $f(1) = 1 - 1^2 = 0 = f(-1)$, quindi f non è iniettiva
(in generale, le funzioni polinomiali quadratiche non sono mai iniettive)

(b) f non è nemmeno suriettiva; infatti $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2 \geq 0$, quindi
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2 \leq 1$; in particolare, se $y = 2$, l'equazione
$f(x) = 2$, cioè $1 - x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = -1$ non ha soluzioni reali

(2) Siano $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ i termini di una progressione aritmetica. La somma dei primi n termini è

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n(n-6).$$

  (a) **(2 punti)** Quanto vale a_0? Quanto vale a_1?
  (b) **(2 punti)** Qual'è la ragione della progressione aritmetica? Calcolare il termine a_8.

(a) per $n = 1$: $a_0 = 1 \cdot (1-6) = -5$
per $n = 2$: $a_0 + a_1 = 2(2-6) = -8 \Rightarrow a_1 = -8 - a_0 = -8 + 5 = -3$

(b) $a_1 = a_0 + d$, $-3 = -5 + d \Rightarrow d = 2$
$a_8 = a_0 + 8d = -5 + 16 = 11$

(3) **(3 punti)** Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \ln(2-x)$ ammette punti di massimo e minimo.

Osservo che il dominio di f è $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2-x > 0\} = (-\infty, 2)$

Inoltre $f'(x) = \dfrac{1}{2-x} \cdot (2-x)' = \dfrac{-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2}$; in particolare, vedo che f è derivabile su tutto il dominio.

Infine: $f'(x) > 0 \iff \dfrac{1}{x-2} > 0 \iff x-2 > 0$ MAI

$f'(x) < 0 \iff \dfrac{1}{x-2} < 0 \iff x-2 < 0 \iff x < 2$: vale $\forall x \in D(f)$

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente su tutto il dominio

$\Rightarrow$ f non ammette punti di minimo né di massimo locali.

(4) **(2 punti)** Usando la derivata seconda, si determinino intervalli di convessità e concavità, nonchè eventuali punti di flesso, della funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

(2 punti) Si scriva, inoltre, il polinomio $P_2(x)$ al secondo ordine di $f(x)$ nel punto $x_0 = 1$.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$f''(x) > 0 \iff (x+1)^3 < 0 \iff \boxed{x < -1}$ f CONVESSA

$f''(x) > 0 \iff (x+1)^3 > 0 \iff \boxed{x > -1}$ f CONCAVA

- $$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$
$$= f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{1}{2} f''(1) \cdot (x-1)^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{8} (x-1)^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

Corso di Matematica e Statistica
Prova di Matematica - prof. Valentina Beorchia
4 febbraio 2025

Cognome	Nome

(1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{x+5}{x}$. Dire se:
 (a) **(2 punti)** f è iniettiva, motivando la risposta;
 (b) **(2 punti)** f è suriettiva, motivando la risposta.

(2) Siano $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ i termini di una progressione aritmetica. La somma dei primi n termini è

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n(n + 11).$$

 (a) **(2 punti)** Quanto vale a_0? Quanto vale a_1?
 (b) **(2 punti)** Qual'è la ragione della progressione aritmetica? Calcolare il termine a_5.

(3) **(3 punti)** Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $f(x) = \ln(x^2 - x)$ ammette punti di massimo e minimo.

(4) **(2 punti)** Usando la derivata seconda, si determinino intervalli di convessità e concavità, nonchè eventuali punti di flesso, della funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.
(2 punti) Si scriva, inoltre, il polinomio $P_2(x)$ al secondo ordine di $f(x)$ nel punto $x_0 = 1$.