Corso di Statistica
Cenni di calcolo delle probabilità
Nozioni elementari

Domenico De Stefano

a.a. 2023/2024

Indice

1. Probabilità: nozioni base
2. Indipendenza e probabilità condizionate

Probabilità: cenni introduttivi I

La probabilità ha a che fare con eventi incerti, una circostanza che non è per niente insolita

- il gioco d'azzardo (ad es. la roulette);
- il tempo atmosferico;
- nei processi, l'incertezza sulla colpevolezza di un imputato è spesso il punto centrale;
- in medicina stabilire l'efficacia di una cura richiede un esperimento casuale;
- finanza, elezioni, ...

Probabilità: cenni introduttivi II

Allora perché è così difficile?

- (Sì, non negherò che sia difficile.)
- In effetti, gli psicologi hanno mostrato sperimentalmente che le euristiche (=scorciatoie) su cui ci si basa per valutare l'incertezza portano spesso a errori.
- (Perché? Chiedetelo agli psicologi.)
- Lancio sei volte una moneta e registro l'uscita di Testa o Croce, quale di questi risultati è più probabile?

$$TTTTCCCC \quad TTCTCCTC$$

- Insomma, attenzione all'intuizione.

Probabilità: cenni introduttivi III

Come facciamo a non sbagliare?

- O cambiamo cervello... difficile.
- O usiamo il formalismo matematico... facile (o almeno, meno difficile).
- Servono le 4 operazioni e un po' di logica, niente di che.
- Introdurremo alcune regole base, tutto sommato intuitive e semplici.
- Seguendo quelle, non sbaglieremo (si spera).

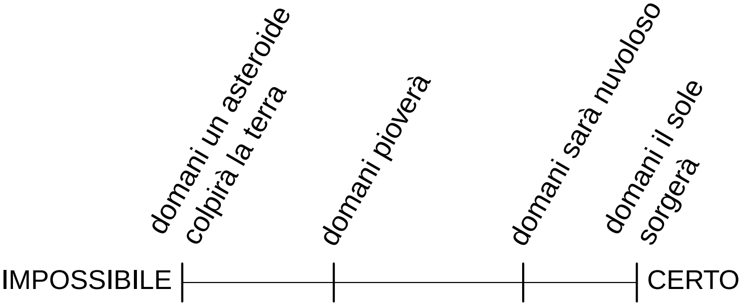
Probabilità: cenni introduttivi II

La maggior parte delle cose che ci succedono intorno sono incerte.

Gli eventi senza incertezza di solito sono banali.

Probabilità: cenni introduttivi II

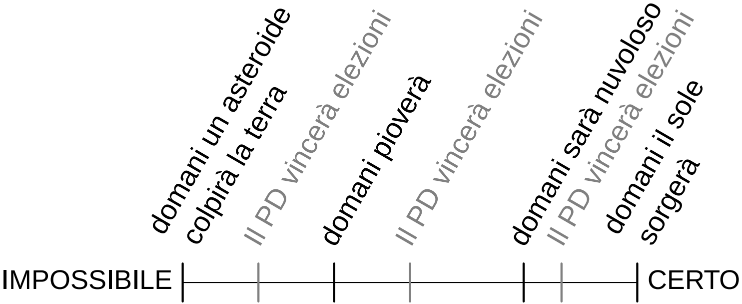
La maggior parte delle cose che ci succedono intorno sono incerte.



La maggior parte degli eventi sta nel mezzo.

Probabilità: cenni introduttivi II

La maggior parte delle cose che ci succedono intorno sono incerte.



Può essere più o meno facile graduarli.

Cos'è la probabilità

Probabilità

La probabilità di un evento è il grado di fiducia – convenzionalmente espresso tra 0 e 1 – che un individuo ha nel verificarsi di un evento.

Bruno De Finetti

(Si noti che spesso esprimiamo la probabilità come una percentuale.)
Esempi di eventi sono

- domani piove,
- il M5S vincerà le prossime elezioni,
- è stato il maggiordomo (l'autore di un delitto, naturalmente).

(È un fatto che può verificarsi o meno – tertium non datur – solo che non lo sappiamo.)

Quale probabilità I

- Dicendo che la probabilità è il 'grado di fiducia' abbiamo dato un'ottima definizione, che è però di scarso aiuto quando si tratta di determinare tale grado di fiducia.
- Qual è la probabilità che domani piova?
  - A occhio?
  - Piovosità media del mese: 28%, ossia $P(piove) = 0.28$
  - OSMER: 5%, ossia $P(piove) = 0.05$
- In effetti, tutte le valutazioni vanno bene: sono opinioni, ciascuna legittima, magari qualcuna più ragionevole o più informata.

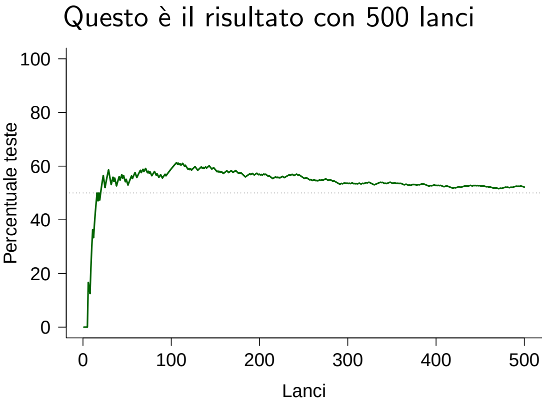
Quale probabilità II

- In effetti, non si possono dare regole generali per assegnare una probabilità.
- Tale assegnazione è, in molti casi, estremamente complessa, ad esempio l'OSMER, per un evento tutto sommato banale come 'domani piove', impiega modelli meteorologici complessi e combina molte informazioni.
- Vedremo, nel seguito, dei metodi statistici per stimare una probabilità con un certo tipo di informazioni.
- Per intanto, vedremo alcuni casi in cui l'assegnazione è semplice e intuitiva.
- In tali situazioni sarà agevole capire anche alcune regole per combinare probabilità.

Approccio frequentista I

- La probabilità non è un qualcosa di direttamente osservabile.
- Per avere un modo di determinarla, possiamo provare a legarla a qualcosa di osservabile.
- Consideriamo allora un evento E come $E =$'esce testa al lancio di una moneta'.
- Questo evento è ripetibile, nel senso che possiamo lanciare una moneta molte volte.
- Facciamolo, o immaginiamo di farlo, e calcoliamo a ciascun lancio la percentuale di teste osservate fino a quel momento.
- (In realtà, lo facciamo fare al computer.)

Approccio frequentista II



Approccio frequentista III

C'è però una certa regolarità: man mano che si va avanti il risultato si stabilizza intorno al 50%, che è la probabilità che, intuitivamente, attribuiremmo all'evento 'esce testa'.

Approccio frequentista IV

C'è però una certa regolarità: man mano che si va avanti il risultato si stabilizza intorno al 50%, che è la probabilità che, intuitivamente, attribuiremmo all'evento 'esce testa'.

Probabilità: approccio frequentista

La probabilità di un evento è la frequenza con cui questo si verifica in un (ideale) infinito numero di ripetizioni dell'evento stesso.

Approccio frequentista V

- Abbiamo così una definizione più operativa.
- Ci permette almeno di assegnare delle probabilità per eventi semplici come
  - esce testa al lancio di una moneta;
  - esce 1 al lancio di un dado;
- Questi eventi elementari possono però essere combinati per definire eventi più complessi ossia eventi composti.
- Vedremo ora delle regole per combinare le probabilità di questi eventi elementari per calcolare quella di eventi composti.

Leggi del calcolo delle probabilità (c.d.p.)

- Illustreremo le regole del c.d.p. nel contesto di giochi d'azzardo.
- S'usa il gioco d'azzardo perché è una situazione in cui il ruolo del caso è evidente.
- Inoltre, il c.d.p. nasce nel contesto del gioco d'azzardo, precisamente nel '700, quando il gioco era un primario interesse dei nobili, da cui gli studiosi erano spesso pagati.

Il gioco dei dadi

Einstein [...] sbagliò quando disse: 'Dio non gioca a dadi'. Tutto sembra indicare che Dio sia un giocatore inveterato e che non perda occasione di lanciare i dadi.

Stephen Hawking, 1993

- Consideriamo un dado a sei facce, numerate da 1 a 6.
- Indichiamo con $E_1, \ldots, E_6$ i possibili esiti di un lancio (eventi semplici)
- Se il dado non è truccato si ha

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6) = 1/6$$

Dado romano
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roman_dice_IMG_4367.JPG

Il gioco dei dadi: probabilità della somma

- Qual è la probabilità che esca pari (pari = evento composto)?
- Esce pari se si realizza E_2 o E_4 o E_6

$$E_2 \cup E_4 \cup E_6$$

- La probabilità che si realizzi uno qualunque di essi, essendo gli eventi disgiunti, è la somma

$$P(\text{pari}) = P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) = 1/2$$

- N.B.: disgiunti vuol dire che non si possono verificare contemporaneamente,

Bartolomé Esteban Murillo
Niños jugando a los dados
circa 1665-1675

Il gioco dei dadi: probabilità della somma

Regola della somma per due eventi incompatibili

Dati due eventi disgiunti – cioè tali che non possono verificarsi contemporaneamente – la probabilità che si verifichi uno qualunque dei due (uno "oppure" l'altro) è la somma delle loro probabilità.

Se i due eventi A, B sono tali che $A \cap B = \varnothing$ allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bartolomé Esteban Murillo
Niños jugando a los dados
circa 1665-1675

Probabilità della somma

Regola della somma per n eventi a due a due incompatibili

Dati n eventi a due a due disgiunti – cioè tali che non possono verificarsi contemporaneamente – la probabilità che si verifichi uno qualunque di essi è la somma delle loro probabilità.

Se $E_1, \ldots, E_n$ sono tali che $E_i \cap E_j = \varnothing$ qualunque siano i e j

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$$

Il gioco dei dadi: probabilità del complementare

Claus Meyer
Die Würfelspieler
circa 1886

- Qual è la probabilità che esca dispari?
- Esce pari se non esce dispari e, evidentemente (in base alla regola della somma)

$$P(\text{non pari}) + P(\text{pari}) = 1$$

- La probabilità che non si realizzi pari è

$$P(\text{non pari}) = 1 - P(\text{pari})$$

Il gioco dei dadi: probabilità del complementare

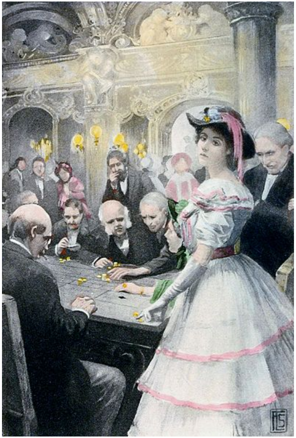
Claus Meyer
Die Würfelspieler
circa 1886

Regola del complementare

La probabilità che si verifichi il complementare di un evento è il complemento a uno della probabilità dell'evento stesso.

$$P(\text{non } E) = 1 - P(E)$$

Il gioco della *roulette*

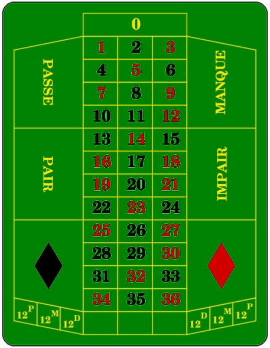


Daniel Deronda
Gwendolen Harleth at the roulette table
1910

- Una pallina viene fatta girare una ruota e l'esito che interessa è il numero su cui si ferma.
- Gi esiti possibili sono i 37 numeri da 0 a 36.
- Varie scommesse sono possibili.

`http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sahara_Hotel_and_Casino_2.jpg?uselang=it`

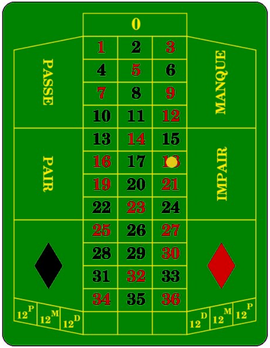
Il gioco della *roulette*



Panno da *roulette*

- Varie scommesse sono possibili.

Il gioco della *roulette*



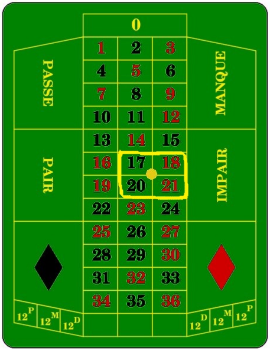
Scommessa in pieno sul 18.

- Varie scommesse sono possibili.
- *Pieno* scommettiamo su un singolo numero, diciamo il 18.
- Essendo 37 i numeri, la probabilità di vincere è

$$P(18 \text{ pieno}) = \frac{1}{37}$$

- Per la cronaca, si vince 35 volte la posta.

Il gioco della *roulette*



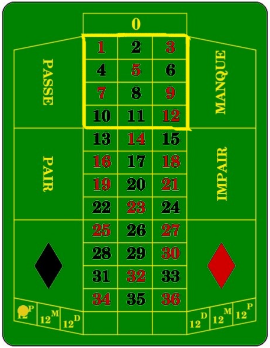
Scommessa sui quattro numeri 17, 18, 20, 21.

- Varie scommesse sono possibili.
- *Quartina* scommettiamo su quattro numeri.
- Vinco se esce uno qualunque dei quattro.
- Sono disgiunti.
- Si applica la regola della somma

$$P(\text{quartina } 17,\, 18,\, 20,\, 21) = \frac{4}{37} = 0.11$$

- Si vince 8 volte la posta.

Il gioco della *roulette*



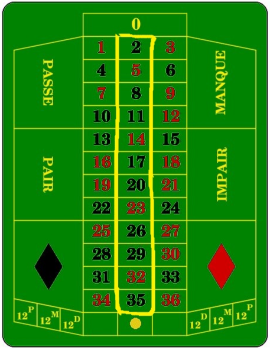
Scommessa sulla prima dozzina: da 1 a 12.

- Varie scommesse sono possibili.
- *dozzina* scommetto su 12 numeri.
- Vinco se esce uno qualunque dei dodici.
- Sono disgiunti.
- Si applica la regola della somma

$$P(\text{Prima dozzina}) = \frac{12}{37} = 0.324$$

- Si vince 2 volte la posta.

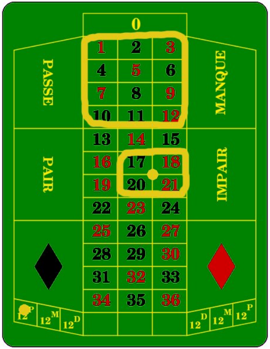
Il gioco della *roulette*



Scommessa sulla seconda colonna: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

- Varie scommesse sono possibili.
- *colonna* scommetto su 12 numeri.
- $$P(\text{Seconda colonna}) = \frac{12}{37} = 0.324$$
- Si vince 2 volte la posta.

Il gioco della *roulette*

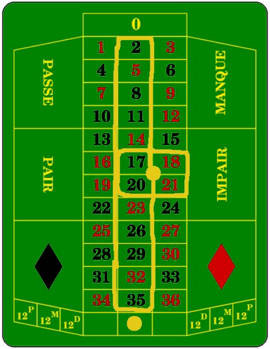


Scommessa multipla: prima dozzina quartina 17, 18, 20, 21

- Varie scommesse sono possibili. Combiniamo due scommesse
  - prima dozzina
  - quartina 17, 18, 20, 21
- La probabilità di vincere una o l'altra è sempre la somma, perché sono disgiunte

$$
\begin{aligned}
P(D_1 \cup Q) &= P(D_1) + P(Q) = \\
&= \frac{12}{37} + \frac{4}{37} = \\
&= \frac{16}{37} = 0.432
\end{aligned}
$$

Il gioco della *roulette*

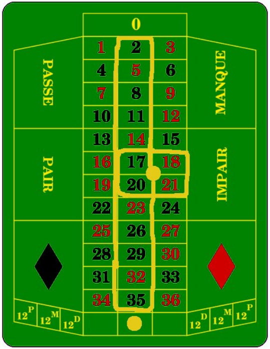


Scommessa multipla: seconda colonna quartina 17, 18, 20, 21

- Varie scommesse sono possibili. Combiniamo due scommesse
  - seconda colonna
  - quartina 17, 18, 20, 21
- La probabilità di vincere una o l'altra non è più la somma, perché non sono disgiunte (conterei due volte il 17 e il 20) ma

$$
\begin{aligned}
P(C \cup Q) &= P(C) + P(Q) - P(C \cap Q) = \\
&= \frac{12}{37} + \frac{4}{37} - \frac{2}{37} = \\
&= \frac{14}{37} = 0.378
\end{aligned}
$$

Il gioco della *roulette*



Scommessa multipla:
seconda colonna
quartina 17, 18, 20, 21

Regola della somma con eventi non disgiunti

Dati due eventi A e B, la probabilità che se ene verifichi almeno uno è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ma quanto si vince? I

- Un'osservazione a margine, ma importante, si vince?
- Evidentemente, ogni tanto si vince e ogni tanto si perde.
- Il calcolo delle probabilità non ci permette di prevedere cosa succede su una scommessa (il gioco d'azzardo è totalmente casuale e il risultato di una mano è indipendente dal risultato dell'altra).
- Ci permette però di dire cosa succede su un gran numero di scommesse.

Ma quanto si vince? II

- Consideriamo la scommessa sulla quartina, si è detto che
  - la probabilità di vincere è $P(Q) = 4/37$
  - si vince 8 volte la posta: se scommetto 1€ possono succedere due cose
    - se perdo, perdo il mio euro e il saldo è -1€
    - se vinco, ricevo il mio euro più altri 8, totale 9€
- Supponiamo di scommettere 1000 volte, per quanto detto nell'interpretazione frequentista, mi aspetto che la percentuale di volte in cui vinco si avvicini a $P(Q) = 4/37$, diciamo sia esattamente $P(Q)$: vinco dunque $1000 \times 4/37 = 108$ volte.
- Ma dunque
  - ogni volta ho pagato 1€per giocare, totale 1000€
  - per 108 volte ho vinto, ricevendo $9 \times 108 = 972$€
- Alla fine, dunque, torno a casa con 28€ in meno, in media, si perde, ovvero, è più probabile perdere che vincere.

Ma quanto si vince? III

- Si perde 'in media' perché la somma che si vince è inferiore al reciproco della probabilità di vittoria, il saldo medio che abbiamo calcolato è

$$9 \times 1000 \times P(Q) - 1000 = 1000(9P(Q) - 1) = -28$$

- Il saldo sopra sarebbe 0 se in caso di vittoria si ricevesse $37/4 = 9.25$
- Questa differenza è il margine del casinò, c'è in tutti i giochi organizzati, o il banco non guadagnerebbe.
- Questo vantaggio della casa può essere più o meno alto.

Esempio: elezioni, elettori di centro I

- Chiediamoci, preso a caso un elettore italiano, qual è la probabilità che abbia votato per la coalizione di centro.
- Gli elettori sono 46 905 154, in particolare

Partito	voti
Partito Democratico	8 644 523
Sinistra Ecologia Libertà	1 089 409
Centro Democratico	167 072
Svp	146 804
Scelta Civica Con Monti Per L'Italia	2 824 065
Unione di Centro	608 210
Futuro e Libertà	159 332

Esempio: elezioni, elettori di centro II

- Calcoliamo le probabilità che abbia votato per ciascuno dei partiti riportati

Partito	voti	probabilità
Partito Democratico	8 644 523	0.18430
Sinistra Ecologia Libertà	1 089 409	0.02323
Centro Democratico	167 072	0.00356
Svp	146 804	0.00313
Scelta Civica Con Monti Per L'Italia	2 824 065	0.06021
Unione di Centro	608 210	0.01297
Futuro e Libertà	159 332	0.00340

- La probabilità che l'elettore preso a caso abbia votato per la coalizione di centro si ottiene sommando le probabilità relative ai tre partiti della coalizione

$$0.06021 + 0.01297 + 0.0034 = 0.07658$$

- Si calcoli analogamente la probabilità che abbia votato per la coalizione di centrosinistra.

Indice

1 Probabilità: nozioni base

2 Indipendenza e probabilità condizionate

Indipendenza

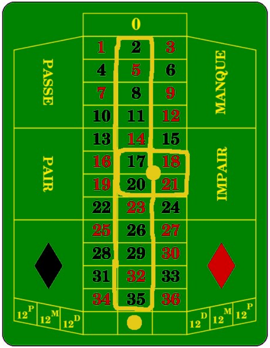
- Eventi quali
  - successivi lanci di un dado
  - mani di roulette

  sono indipendenti, l'esito del primo lancio (mano) non influenza l'esito del secondo.
- In termini di probabilità, la probabilità degli esisti del secondo lancio non cambia conoscendo l'esito del primo.
- $P(A|B)$ indica la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B.
- $P(\text{6 al secondo lancio}|\text{6 al primo}) = P(\text{esce 6 al secondo lancio})$
- Per questa ragione si ha anche

$$P((\text{6 al secondo}) \cap (\text{6 al primo})) = P(\text{6 al secondo}) \times P(\text{6 al primo})$$

Dipendenza

Per un esempio di eventi dipendenti riprendiamo la roulette



Scommessa multipla: seconda colonna quartina 17, 18, 20, 21

- La probabilità che sia vincente la scommessa sulla colonna è $P(C) = 12/37$;
- supponiamo però di sapere che è vincente la scommessa sulla quartina
- Quanto vale $P(C|Q)$?
- se è vincente la quartina è uscito uno tra 17, 18, 20, 21
- se è uscito 17 o 20 è vincente anche la colonna, se è uscito 20 o 21 no
- $P(C|Q) = 1/2 \neq P(C)$

Indipendenza e probabilità condizionate

Definizione: probabilità condizionata

Dati due eventi A e B, la probabilità di A sapendo che è accaduto B si indica con $P(A|B)$ ed è pari a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definizione: indipendenza stocastica

Dati due eventi A e B essi sono indipendenti se e solo se

$$P(A|B) = P(A)$$

Notiamo che l'indipendenza equivale anche a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Esempio: elezioni, elettori della lega e ‘nordisti’

Abbiamo queste informazioni sui voti presi dalla lega

Zona	Voti lega	Votanti	Elettori
Nord	1223131	13292602	16761578
Resto d’Italia	166883	21978939	30143576
Totale Italia	1390014	35271541	46905154

Esempio: elezioni, elettori della lega e 'nordisti'

Zona	Voti lega	Votanti	Elettori
Nord	1223131	13292602	16761578
Resto d'Italia	166883	21978939	30143576
Totale Italia	1390014	35271541	46905154

- Preso un votante a caso, la probabilità che abbia votato lega è

$$P(\text{Lega}) = \frac{1390014}{35271541} = 0.0394$$

- Preso un votante a caso, la probabilità che sia residente al nord è

$$P(\text{Nord}) = \frac{13292602}{35271541} = 0.3769$$

- Preso un votante a caso, la probabilità che sia residente al nord e abbia votato lega è

$$P(\text{Lega} \cap \text{Nord}) = \frac{1223131}{35271541} = 0.0347$$

Esempio: elezioni, elettori della lega e ‘nordisti’

- $P(\text{Lega}) = 0.0394$
- $P(\text{Nord}) = 0.3769$
- $P(\text{Lega} \cap \text{Nord}) = 0.0347$

Esempio: elezioni, elettori della lega e 'nordisti'

- $P(\text{Lega}) = 0.0394$
- $P(\text{Nord}) = 0.3769$
- $P(\text{Lega} \cap \text{Nord}) = 0.0347$
- Vogliamo calcolare la probabilità che un votante preso a caso al Nord abbia votato Lega

$$P(\text{Lega}|\text{Nord}) = \frac{P(\text{Lega} \cap \text{Nord})}{P(\text{Nord})} = \frac{0.0347}{0.3769} = 0.092$$

Esempio: elezioni, elettori della lega e ‘nordisti’

- $P(\text{Lega}) = 0.0394$
- $P(\text{Nord}) = 0.3769$
- $P(\text{Lega} \cap \text{Nord}) = 0.0347$
- Vogliamo calcolare la probabilità che un votante preso a caso al Nord abbia votato Lega

$$P(\text{Lega}|\text{Nord}) = \frac{P(\text{Lega} \cap \text{Nord})}{P(\text{Nord})} = \frac{0.0347}{0.3769} = 0.092$$

- Si noti che si poteva calcolare la stessa probabilità anche come

$$P(\text{Lega}|\text{Nord}) = \frac{1223131}{13292602} = 0.092$$

Esempio: elezioni, elettori della lega e 'nordisti'

- $P(\text{Lega}) = 0.0394$
- $P(\text{Nord}) = 0.3769$
- $P(\text{Lega} \cap \text{Nord}) = 0.0347$
- Vogliamo calcolare la probabilità che un votante preso a caso al Nord abbia votato Lega

$$P(\text{Lega}|\text{Nord}) = \frac{P(\text{Lega} \cap \text{Nord})}{P(\text{Nord})} = \frac{0.0347}{0.3769} = 0.092$$

- Si noti che si poteva calcolare la stessa probabilità anche come

$$P(\text{Lega}|\text{Nord}) = \frac{1223131}{13292602} = 0.092$$

- Si calcoli analogamente $P(\text{Lega}|\text{non Nord})$ (Risp: 0.0076)

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

- I dati (presi da OpenIntroStat) riguardano 6224 persone esposte al virus del vaiolo a Boston nel 1721.
- Di questi, 244 vennero esposti – su base volontaria – alla malattia in modo controllato dai medici (una specie di vaccinazione ante litteram).
- È noto poi chi è sopravvissuto all'epidemia e chi no.

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di sopravvivere all'epidemia?

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di sopravvivere all'epidemia?

Risp: La probabilità si ottiene come

$$P(\text{Sopr}) = \frac{\#\text{Sopr}}{\#\text{Totale}} = \frac{5374}{6224} = 0.974$$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di essere inoculato?

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di essere inoculato?

Risp: La probabilità si ottiene come

$$P(\text{Inoc}) = \frac{\#\text{Inoc}}{\#\text{Totale}} = \frac{244}{6224} = 0.039$$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di essere inoculato e di sopravvivere?

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo preso a caso, qual è la probabilità di essere inoculato e di sopravvivere?

Risp: La probabilità si ottiene come

$$P(\text{Inoc} \cap \text{Sopr}) = \frac{\#\text{Inoc e Sopr}}{\#\text{Totale}} = \frac{238}{6224} = 0.038$$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo inoculato, qual è la probabilità di sopravvivere all'epidemia?

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo inoculato, qual è la probabilità di sopravvivere all'epidemia?

Risp: La probabilità si ottiene come

$$P(\text{Sopr}|\text{Inoc}) = \frac{P(\text{Inoc} \cap \text{Sopr})}{P(\text{Inoc})} = \frac{0.038}{0.039} = 0.974$$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Dom: Per un individuo inoculato, qual è la probabilità di sopravvivere all'epidemia?

Risp: La probabilità si ottiene come

$$P(\mathrm{Sopr}|\mathrm{Inoc}) = \frac{P(\mathrm{Inoc} \cap \mathrm{Sopr})}{P(\mathrm{Inoc})} = \frac{0.038}{0.039} = 0.974$$

Alt: Si noti che la stessa risposta si ottiene come

$$P(\mathrm{Sopr}|\mathrm{Inoc}) = \frac{\#\mathrm{Inoc} \cap \mathrm{Sopr}}{\#\mathrm{Inoc}} = \frac{238}{244}$$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato		
		sì	no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Eserc: Si calcoli $P(\text{Sopr}|\text{non Inoc})$

Esempio: vaiolo a Boston, 1721

		inoculato sì	inoculato no	Totale
Sopravvissuto	sì	238	5136	5374
	no	6	844	850
	Totale	244	5980	6224

Eserc: Si calcoli $P(\text{Sopr}|\text{non Inoc})$

Risp: (0.859)

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto nelle ultime elezioni politiche, questo abbia votato M5S?

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto nelle ultime elezioni politiche, questo abbia votato M5S? Gli elettori sono 46 905 154, i votanti 35 271 541

Partito	voti
Partito Democratico	8 644 523
Sinistra Ecologia Libertà	1 089 409
Centro Democratico	167 072
Svp	146 804
Scelta Civica Con Monti Per L'Italia	2 824 065
Unione di Centro	608 210
Futuro e Libertà	159 332
M5S	8689458

- Gli elettori sono 46905154.
- Tra questi, hanno votato M5S in 8689458

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto nelle ultime elezioni politiche, questo abbia votato M5S? Gli elettori sono 46 905 154, i votanti 35 271 541

Partito	voti
Partito Democratico	8 644 523
Sinistra Ecologia Libertà	1 089 409
Centro Democratico	167 072
Svp	146 804
Scelta Civica Con Monti Per L'Italia	2 824 065
Unione di Centro	608 210
Futuro e Libertà	159 332
M5S	8689458

- Gli elettori sono 46905154.
- Tra questi, hanno votato M5S in 8689458
- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto, questo sia andato a votare?

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto, questo sia andato a votare?
- $P(\text{Ha votato}) = 0.752$

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- $P(\text{Ha votato}) = 0.752$
- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto, questo sia andato a votare e abbia votato il M5S?

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- $P(\text{Ha votato}) = 0.752$
- Qual è la probabilità che, preso un individuo a caso tra gli aventi diritto al voto, questo sia andato a votare e abbia votato il M5S?
- $P(\text{M5S} \cap \text{Ha votato}) = P(\text{M5S})$

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- $P(\text{Ha votato}) = 0.752$
- $P(\text{M5S} \cap \text{Ha votato}) = P(\text{M5S})$ Supponiamo ora di sapere che l'individuo preso a caso è andato a votare, qual è la probabilità che abbia votato M5S?

Esempio: elezioni, elettori del M5S

- $P(\text{M5S}) = \frac{8689458}{46905154} = 0.1853.$
- $P(\text{Ha votato}) = 0.752$
- $P(\text{M5S} \cap \text{Ha votato}) = P(\text{M5S})$ Supponiamo ora di sapere che l'individuo preso a caso è andato a votare, qual è la probabilità che abbia votato M5S?
- Si ha

$$
\begin{aligned}
P(\text{voto M5S}|\text{Ha votato}) &= \frac{P(\text{voto M5S} \cap \text{Ha votato})}{P(\text{Ha votato})} \\
&= \frac{P(\text{voto M5S})}{P(\text{Ha votato})} = \frac{0.1853}{0.752} = 0.2464
\end{aligned}
$$