Principio di conservazione dell'energia per il volume elementare di atmosfera – equazione di conservazione dell'energia interna.

Consideriamo un volume unitario di aria e chiediamoci qual'è l'energia totale del volume.

$$E_{TOT} = E_{meccanica} + E_{interna}$$

$$E_{meccanica} = E_{cinetica} + E_{potenziale}$$

Se imponiamo il principio di conservazione dell'energia totale, dobbiamo ipotizzare che le variazioni di energia siano solo dovute a trasformazioni da una forma all'altra oppure che siano dovute al lavoro compiuto dal volume contro le forze esterne. Sia dL tale lavoro elementare.

Pertanto la variazione dell'energia totale sarà descritta da questa identità differenziale

$$dE_{TOT} = -dL \quad \text{cioè} \quad d(E_{cinetica} + E_{potenziale} + E_{interna}) = -dL$$

Scriviamo i singoli addendi

$$dE_{cinetico} = d\frac{1}{2}\rho(\bar{v}\cdot\bar{v})$$

$$dE_{potenziale} = -\rho\bar{g}\cdot d\bar{l} = -\rho\vec{g}\cdot\bar{v}\,dt \quad \left\{ \begin{array}{l}\text{Il solo potenziale} \\ \text{è quello gravitazionale terrestre}\end{array}\right.$$

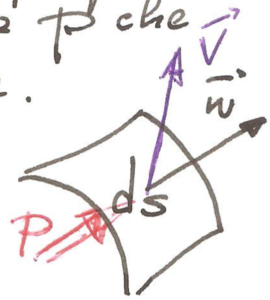
$$dE_{interna} = \rho C_v\, dT$$

C_v calore specifico a volume costante

T Temperatura aria nel volume (T in K)

Determiniamo la forma del lavoro elementare dL.

Se il volume elementare cambia forma, lo fa per effetto della pressione interna al volume p che viene esercitata sulle pareti del volume.



La forza esercitata è:

$p\,ds\,\bar{n}$ con p pressione

ds superficie elementare

$\bar{n}$ normale alla superficie

Essendo il fluido in movimento con velocità $\vec{V}$ la superficie si sposterà di $d\vec{l} = \bar{V}dt$ nel tempo dt

Pertanto il lavoro compiuto dalla pressione sull'ambiente esterno sarà, per la sola superficie ds

$$dL_{ds} = p\,ds\,\bar{n}\cdot d\bar{l} = p\,ds\,\bar{n}\cdot\bar{V}dt$$

Il lavoro va considerato come il contributo di tutta la superficie che racchiude il volume elementare perciò

$$dL = \oiint_S dL_{ds} = \oiint_S p\,ds\,\bar{n}\cdot\bar{v}\,dt$$

questo integrale rappresenta il flusso netto del vettore $p\vec{V}$ attraverso la superficie chiusa S che delimita il volume elementare di fluido atmosferico

Utilizzando il teorema di Gauss

$$dL = \oiint_S (p\bar{v})\cdot d\vec{n}\,ds\,dt = \iiint_{V(S)} \bar{\nabla}\cdot(p\bar{v})\,dvol\,dt$$

volume elementare

Essendo l'operatore $\bar{\nabla}\cdot$ definito come il limite del rapporto tra il flusso del vettore attraverso la superficie che racchiude il volume ed il volume si deduce che per un volume unitario (piccolo a piacere) si ha

$$dL = \bar{\nabla}\cdot(p\bar{v})\,dt$$

Questo è lavoro svolto dal fluido.

NB
È possibile dedurre la forma elementare del lavoro fatto dal fluido del volume unitario utilizzando un caso particolare di volume a forma di parallelepipedo, dove si considera il lavoro netto risultante dalla pressione esercitata su facce opposte (Esercizio)

Aggiungiamo questo risultato sommandolo agli altri addendi coinvolti nella conservazione dell'energia.

$$dE_{cinetica} + dE_{potenziale} + dE_{interna} = -dL$$

$$d\left(\frac{1}{2}\rho\bar{v}\cdot\bar{v}\right) + \rho\bar{g}\cdot\bar{v}\,dt + \rho c_v\,dT = -\bar{\nabla}\cdot(p\bar{v})\,dt$$

Il primo addendo può essere espresso facendo uso della equazione di conservazione della quantità di moto

$$\cancel{+\bar{g}\cdot\bar{v}\rho\,dt} - \bar{\nabla}p\cdot\bar{v}\,dt \cancel{+\bar{g}\cdot\bar{v}\rho\,dt} + \rho c_v\,dT = -\bar{\nabla}\cdot(p\bar{v})\,dt$$

Ricordando le proprietà della divergenza di uno scalare per un vettore

$$-\bar{\nabla}\cdot(p\bar{v}) = -(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})p - p(\bar{\nabla}\cdot\bar{v})$$

che sostituita al secondo membro dell'equazione

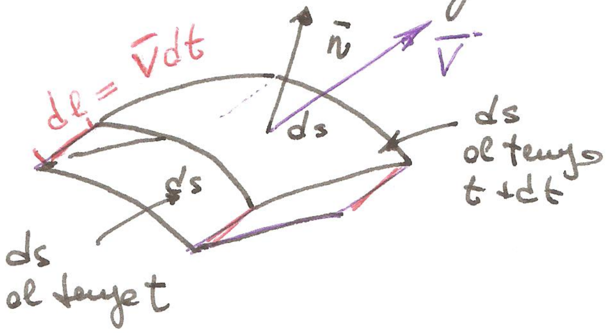
$$\cancel{-\bar{\nabla}p\cdot\bar{v}}\,dt + \rho c_v\,dT = \cancel{-(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})p}\,dt - p(\bar{\nabla}\cdot\bar{v})\,dt$$

Pertanto l'equazione per la conservazione dell'energia totale del volume elementare diventa

$$\boxed{\rho c_v\,dT + p(\bar{\nabla}\cdot\bar{v})\,dt = 0}$$

Osservazione

$\bar{\nabla} \cdot \bar{V}$ rappresenta la variazione di volume relativa, per unità di tempo del volume che si modifica nel tempo



$$\delta vol = ds\, \bar{v} \cdot \vec{n}\, dt$$

Integrando la variazione su tutta la superficie del volume

$$\Delta vol = \oiint_{S(vol)} ds\, \bar{v} \cdot \bar{n}\, dt \underset{\text{Teorema di Gauss}}{=} \iiint_{Vol} (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})\, dvol \cdot dt$$

da cui $\dfrac{\Delta vol}{Vol \cdot dt} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V}$

Considerazioni sulla conservazione dell'energia

$$\rho\, C_v\, dT + p\, (\bar{\nabla} \cdot \bar{V})\, dt = 0$$

variazione energia interna dovuta al cambio della temperatura

Lavoro fatto dal gas in espansione $(\bar{\nabla} \cdot \bar{V} > 0)$ o in compressione $(\bar{\nabla} \cdot \bar{V} < 0)$

Utilizzando l'equazione di continuità si può riscrivere l'equazione utilizzando solo grandezze termodinamiche

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

da cui

$$\boxed{\rho\, C_v\, dT - \frac{p}{\rho}\, d\rho = 0}$$

La conservazione dell'energia introduce una nuova grandezza nel sistema di equazioni fino ad ora utilizzato, si tratta della temperatura (T) che si aggiunge a $\bar{V}$, P

Estensione del principio di conservazione dell'energia a processi NON adiabatici

La conservazione dell'energia derivata con la

$$\rho c_v dT - \frac{p}{\rho} d\rho = 0$$

riguarda volumi d'aria in cui gli scambi di energia con l'ambiente che circonda il volume sono puramente meccanici e relegati agli effetti della pressione della miscela di gas.

Se il volume riceve o emette energia in forma radiante o sotto forma di calore latente per passaggi di fase, ad esempio dell'acqua, o perfino per conduzione, allora si deve tenere conto anche di tali apporti (o perdite) di energia. Pertanto va aggiunto lo scambio di energia con l'ambiente

$$\boxed{\rho c_v dT - \frac{p}{\rho} d\rho = dq}$$

energia acquisita ($dq > 0$) o rilasciata ($dq < 0$) nell'ambiente.

Osservazione

Il numero di relazioni indipendenti tra i campi atmosferici che si intende studiare (conoscere) non è sufficiente in quanto il numero di incognite (campi) è maggiore del numero di equazioni: 6 campi e 5 equazioni

a) Conservazione energia ρ, p, T 1 eq. scalare

b) Conservazione massa $\rho\ \bar{V} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ 1 eq scalare

c) Conservazione quantità di moto $\rho\ p\ \bar{V} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ 3 eq scalari