

DERIVARE LA STRUTTURA DI GAUGE G_{SM}

[Dalle note del corso "Standard Model" di A. Romanino in SISSA]

1) $G_{SM} = SU(3)_c \times U(1)_{em}$

\Rightarrow I generatori di QCD e QED sono anche generatori di G_{SM}

2) Assumiamo che il bosone W^\pm sia un bosone di gauge di G_{SM} .

(non una risonanza composta tipo la ρ^\pm in QCD)

\Rightarrow Le interazioni deboli del bosone W viste prima devono avere la forma predetta dall'invarianza di gauge:

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - i g_A V_\mu^A \bar{\psi} \gamma^\mu T_\psi^A \psi$$

• V_μ^A : campo di gauge REALE

• T_ψ^A : generatore del gruppo di gauge associato a V_μ^A nella rappresentazione di ψ .

LEPTONI

Cominciamo considerando i leptoni (1 generazione per semplicità). Vogliamo riprodurre questa interazione:

$$\mathcal{L}_{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} e_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{e}_L \gamma^{\mu} \nu_L$$

• Definiamo $L_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{L}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{L}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_L$$

• Passiamo da W_{μ}^{\pm} a campi REALI: $W_{\mu}^{\pm} = \frac{W_{\mu}^1 \mp i W_{\mu}^2}{\sqrt{2}}$

$$\mathcal{L}_{cc} = -g W_{\mu}^1 \bar{L}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} L_L - g W_{\mu}^2 \bar{L}_L \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} L_L$$

$$\equiv -g \bar{L}_L \gamma^{\mu} (W_{\mu}^1 T_L^1 + W_{\mu}^2 T_L^2) L_L \quad T_L^{1,2} \equiv \frac{\sigma^{1,2}}{2}$$

Ha la forma corretta ed abbiamo trovato
2 generatori di G_{SM} .

• Se T_L^1 e T_L^2 sono generatori, anche $[T_L^1, T_L^2]$ lo è:

$$[T_L^1, T_L^2] = i T_L^3 \quad \rightarrow \quad T_L^3 = \frac{\sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$T_L^{1,2,3}$ sono i 3 generatori di $SU(2)$ nella rapp.

fondamentale $t_a^{(2)}$: $L_L \sim 2$ di $SU(2) \Rightarrow G_{SM} \supset SU(2)$

⇒ **PREVISIONE**

Deve esserci un bosone di gauge

W_μ^3 associato a $t_{SU(2)}^3$ con interazione:

$$\mathcal{L}_{W_\mu^3} \supset -g \bar{L}_L \gamma^\mu T_L^3 L_L W_\mu^3$$

$$= -\frac{g}{2} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^3 \quad \text{CORRENTE NEUTRA}$$

• Come agisce $SU(2)$ su e_R ?

→ e_R non interagisce con W_μ^\pm , quindi e^- neutro sotto $SU(2)$: UN SINGOLETTO

$$e_R \sim 1 \text{ di } SU(2)$$

Per questo motivo viene chiamato $SU(2)_L$

(da non confondere con la sottoalgebra di Lorentz $su(2)_L$)

• $G_{SM} \supset SU(2)_L$ e $G_{SM} \supset SU(3)_c \times U(1)_em$

È qualche generatore di QCD ($t_{SU(3)}^A$) o QED (Q) identificabile con quelli di $SU(2)_L$?

$SU(3)_c$) L_L è neutro sotto QCD quindi $T_L^A = 0$
e $t_{SU(3)}^A$ e $t_{SU(2)}^a$ sono INDIPENDENTI

$U(1)_{em}$) Sappiamo già come deve agire su L_L :

$$\hat{Q}_L L_L = \begin{pmatrix} Q_\nu & \nu_{eL} \\ Q_e & e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_\nu & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{Q}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Non è una combinazione dei T_L^a quindi è un generatore indipendente.

L'unica matrice Hermitiana 2×2 indipendente da quelle di Pauli è l'identità:

Definiamo $\hat{Y} \equiv Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **IPERCARICA** come nuovo generatore.

Allora abbiamo: $\hat{Q} = \hat{Y} + T_L^3$

Per L_L : $\hat{Y}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_L = -\frac{1}{2}$

Per e_R : $Y_e = Q_e - \phi = -1 \Rightarrow Y_e = -1$

$$[\hat{Y}, T_L^a] = 0 \rightarrow G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

• PREVISIONE

Il campo di gauge corrispondente B_μ ha interazioni:

$$\mathcal{L}_B = -g' B_\mu (Y_L \bar{L}_L \gamma^\mu L_L + Y_e \bar{e}_R \gamma^\mu e_R)$$

QUARK

Anche per i quark vogliamo riprodurre

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{u}_L \gamma^{\mu} d_L - \frac{g}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{d}_L \gamma^{\mu} u_L$$

Definiamo $Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$. Come per i leptoni troviamo:

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{CC} = -g \bar{Q}_L \gamma^{\mu} (W_{\mu}^1 T^1 + W_{\mu}^2 T^2) Q_L$$

Quindi le interazioni sono compatibili con la struttura di gauge $SU(2)_L$, con i quark LH che trasformano nella rappresentazione fondamentale e quelli RH singoletti.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{Q,W} = -g \bar{Q}_L \gamma^{\mu} \left(\sum_{i=1}^3 W_{\mu}^i T^i \right) Q_L$$

Vediamo ora l'ipercarica $\hat{Y} = \hat{Q} - T_L^3$

Per Q_L :

$$Y_{Q_L} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Commuta con $SU(2)_L$, come deve.
 \uparrow
 $\mathbb{1}_{2 \times 2}$

$$Y_{u_R} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$Y_{d_R} = -\frac{1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$$

LAGRANGIANA DI GAUGE DEL MODELLO STANDARD

È fissata una volta che abbiamo deciso il gruppo di simmetria di gauge G_{SM} ed il contenuto di materia, con le rispettive rappresentazioni sotto G_{SM} .

- $G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

campi di gauge associati: G_μ^A , W_μ^a , B_μ

- Contenuto di materia:

	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	Y	
L_i	1	2	$-\frac{1}{2}$	Tre generazioni: $i = 1, 2, 3$
e_{Ri}	1	1	-1	
Q_i	3	2	$\frac{1}{6}$	
u_{Ri}	3	1	$\frac{2}{3}$	
d_{Ri}	3	1	$-\frac{1}{3}$	

Da questo segue \mathcal{L}_{SM}^{gauge} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM}^{gauge} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{ghosts} \\ & + \bar{L}_i i \not{D} L_i + \bar{e}_{Ri} i \not{D} e_{Ri} + \\ & + \bar{Q}_i i \not{D} Q_i + \bar{u}_{Ri} i \not{D} u_{Ri} + \bar{d}_{Ri} i \not{D} d_{Ri} \end{aligned}$$

dove

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s T_A^{(3)} G_\mu^A + i g T_a^{(2)} W_\mu^a + i g' Y B_\mu$$

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A - g_s f_{ABC} G_\mu^B G_\nu^C$$

$$[t_A^{(3)}, t_B^{(3)}] = i f_{ABC} t_C^{(3)}$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

$$[t_a^{(2)}, t_b^{(2)}] = i \epsilon_{abc} t_c^{(2)}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

tenore antisimmetrico

$$\epsilon_{123} = +1$$

I generatori per i vari fermioni sono:

	$T_A^{(3)}$	$T_a^{(2)}$	Y
L_i	0	$t_a^{(2)}$	$-\frac{1}{2}$
e_{Ri}	0	0	-1
Q_i	$t_A^{(3)}$	$t_a^{(2)}$	$\frac{1}{6}$
u_{Ri}	$t_A^{(3)}$	0	$\frac{2}{3}$
d_{Ri}	$t_A^{(3)}$	0	$-\frac{1}{3}$

• $t_a^{(2)} = \frac{\sigma^a}{2} \leftarrow$ Matrici di Pauli

$$\text{Tr} [t_a^{(2)} t_b^{(2)}] = \frac{\delta_{ab}}{2}$$

• $t_A^{(3)} = \frac{\lambda^A}{2} \leftarrow$ Matrici di Gell-Mann

$$\text{Tr} [t_A^{(3)} t_B^{(3)}] = \frac{\delta_{AB}}{2}$$

Ci sono alcune domande che non trovano risposta nel Modello Standard, dove sono assunte come dato di fatto, per la cui risposta occorre ipotizzare possibili estensioni. Ad esempio:

- Perché ci sono 3 copie (generazioni) di fermioni?
- Perché il gruppo di gauge G_{SM} è proprio quello?
- Perché i numeri quantici dei fermioni (irreps di G_{SM} ed ipercarica) sono proprio quelli?
- Perché Q (ovvero Y) è quantizzata?
- A livello quantistico, le irreps e Y sono esattamente tali che le anomalie di gauge si cancellano "miracolosamente", rendendo la teoria consistente. Qual'è il motivo di questo?