ROTTURA DELLA SIMMETRIA ELETTRODEBOLE [DG.3.3]

La Lagrangiana $\mathcal{L}_{SM}^{gauge}$ che abbiamo appena costruito ha vari problemi:

1) I bosoni $W_\mu^{1,2,3}$ e B_μ sono massless, ma l'unico veramente massless deve essere il fotone A_μ mentre $W_\mu^\pm$ e Z_μ devono prendere massa.

2) A bassa energia il gruppo di simmetria di gauge non è $\mathcal{G}_{SM}$ ma $SU(3)_c \times U(1)_{em}$

3) Le masse dei fermioni sono vietate da $\mathcal{G}_{SM}$:

$$\mathcal{L}_m \sim m_e \left(\bar{L} e_R + \bar{e}_R L \right)$$

non è permessa in quanto l'operatore $(\bar{L} e_R)$ non è invariante di $\mathcal{G}_{SM}$ ma trasforma con:

$$(\bar{L} e_R) \sim \left(1, \bar{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

I punti 1) e 2) sono correlati: la simmetria elettrodebole è "nascosta" a basse energie.
La "rottura" della simmetria di gauge non può infatti essere ESPLICITA, dato che ciò porterebbe ad inconsistenze nella teoria. Può però esserci una ROTTURA SPONTANEA DELLA SIMMETRIA DI GAUGE, in maniera simile a quanto visto per la simmetria globale di ISOSPIN.

I lavori di Anderson, Englert, Kibble e Higgs degli anni '60 mostrarono per primi questo meccanismo.
Vediamolo prima per un caso semplice di una teoria di gauge con simmetria $U(1)$.

MECCANISMO DI HIGGS PER U(1)

Consideriamo una teoria di un campo scalare complesso $\varphi(x)$, invariante sotto $\varphi(x) \to e^{i\alpha}\varphi(x)$, $\alpha \sim$ const, ed accoppiamo φ ad un fotone A_μ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - m^2(\varphi^+\varphi) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^+\varphi)^2$$

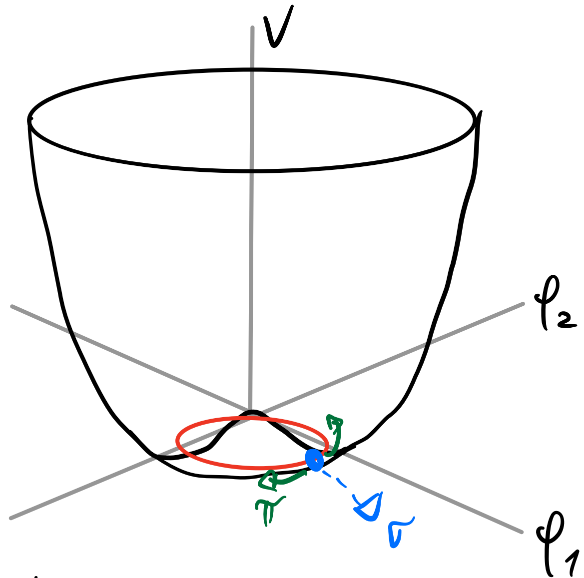
dove $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è invariante sotto U(1) di gauge
$$\begin{cases} \varphi(x) \to e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{cases}$$

Prendiamo $m^2 \equiv -\mu^2 < 0$.

Il potenziale classico $V(\varphi) = -\mu^2\varphi^+\varphi + \lambda(\varphi^+\varphi)^2$ è instabile a $\varphi = 0$ ma è minimizzato

per $\varphi^+\varphi\Big|_{min} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$



$\Rightarrow$ Adesso c'è un numero infinito di vuoti, che possiamo descrivere come

$$\langle 0_\vartheta|\varphi|0_\vartheta\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta}, \quad \forall\,\vartheta \in \mathbb{R}$$

Per simmetria, tutti i vuoti sono equivalenti.
È conveniente scegliere $\vartheta = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle 0|\varphi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}} \qquad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Descriviamo le fluttuazioni attorno al vuoto in coordinate POLARI:

Per normalizzare $\pi(x)$ in maniera canonica

$$\varphi(x) \equiv \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi(x)}{v}} \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \varphi = \frac{(v+h)^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $V(\varphi)$ dipende solo da $h(x)$.

$$V(h) = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}\underbrace{(2\mu^2)}_{= m_h^2 = 2\lambda v^2} h^2 + \sqrt{\lambda}\,\mu h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4$$

In assenza dell'interazione col campo di gauge A_μ il campo $\pi(x)$ sarebbe a MASSA NULLA: il Bosone di Goldstone di questa teoria.

La presenza di A_μ però cambia le cose.

La Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\tilde{\pi}\right)\left(A^\mu + \frac{1}{ev}\partial^\mu\tilde{\pi}\right)\left(1+\frac{h}{v}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - V(h)$$

- Dal termine $\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}e^2v^2 A_\mu A^\mu$ sembra che il fotone abbia preso una massa, ma c'è un mescolamento con $\partial_\mu \pi$
- $\pi(x)$ non ha un termine di massa
- $m_h^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2 \leftarrow$ massa del bosone di Higgs.

Sotto una trasformazione di gauge:

$$\begin{cases} A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \\ \pi \to \pi' = \pi + v\alpha \\ h \to h \end{cases}$$

"GAUGE UNITARIA"

per $\alpha = -\frac{\pi(x)}{v}$ $\Rightarrow$ $\pi'(x) = 0$

$A'(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{ev}\partial_\mu\pi(x)$

Chiamando $A' \equiv A$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - V(h)$$

- Bosone massivo $m_A^2 = e^2v^2$
- Scalare massivo di Higgs : $m_h^2 = 2\lambda v^2$

Un bosone massivo ha 3 gradi di libertà, le 2 polarizzazioni trasverse + 1 longitudinale.
Queste corrispondono alle 2 trasverse del fotone massless ed una del bosone di Goldstone π.

$\Rightarrow$ Il bosone di gauge ha "mangiato" il bosone di Goldstone, diventando la sua polarizzazione longitudinale.

Gradi di libertà fisici della teoria

SENZA SSB:

$Re(\varphi)$, $Im(\varphi)$

ε_μ^+, ε_μ^-

Polarizzazioni trasverse del vettore

CON SSB:

h

ε_μ^+, ε_μ^-, ε_μ^L

polarizzazione longitudinale

Meccanismo di Higgs per il Modello Standard

Nel caso dello SM vogliamo rompere spontaneamente

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$$

$\Rightarrow$ L'Higgs deve essere carico sotto $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$.

- I numeri quantici dell'Higgs possono essere fissati richiedendo che l'accoppiamento di Yukawa sia permesso. Serve a dare massa ai fermioni (vedremo dopo).

Ad esempio, per i leptoni:

$$\mathcal{L}_{Yuk} = y_e \left(\bar{L}\, e_R\right) H + h.c.$$

$$(\bar{L} e_R) \sim \left(1, \bar{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$H \sim \left(1, 2, +\tfrac{1}{2}\right) \to \begin{cases} H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \\ H^* = \begin{pmatrix} H^- \\ H^{0*} \end{pmatrix} \end{cases}$$

La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L}_{SM}^{Higgs} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H) \quad , \quad \text{dove}$$

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda \left(H^\dagger H\right)^2 \quad , \quad \mu^2 > 0$$

$$D_\mu H = \left(\partial_\mu + i g W_\mu^a t_a^{(2)} + i g' Y_H B_\mu\right) H$$

Come prima, il potenziale è minimizzato per

$$\boxed{\langle H^\dagger H \rangle_0 = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda}}$$

A meno di una rotazione $SU(2)_L$ possiamo sempre riportarci al caso:

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

☆ Equivale a scegliere la base di generatori di $SU(2)_L$

- v è lungo la componente neutra: $U(1)_{em}$ non è rotto

$$\hat{Q}\langle H \rangle = \left(t_3^{(2)} + \hat{Y}\right)\langle H \rangle = \left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)\langle H \rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Il vuoto non è carico sotto $U(1)_{em}$.

Quindi il valore di aspettazione sul vuoto (vev) dell'Higgs rompe spontaneamente la simmetria elettrodebole:

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{em}$$

\# generatori: $3 + 1 \rightarrow 1 \Rightarrow 3$ generatori "rotti"

$\Rightarrow$ Mi aspetto 3 bosoni di Goldstone, che corrisponderanno alle polarizzazioni longitudinali dei bosoni W^+, W^-, Z.

Scegliendo la gauge "unitaria" posso parametrizzare il campo con:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$h(x)$: scalare di Higgs
Neutro sotto $U(1)_{em}$

Il potenziale $V(h)$ sarà come quello visto prima.

SPETTRO DEI BOSONI ELETTRODEBOLI

Dal termine cinetico ottengo:

Termine cinetico del bosone di Higgs

Termini di massa per i bosoni E.W.!

$$\mathcal{L}_H^{kin} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{g^2 v^2}{8}\left((W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2\right)\left(1 + \frac{h}{v}\right)^2$$

$$+ \frac{v^2}{8}\left(W_\mu^3, B_\mu\right)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \cdot \left(1 + \frac{h}{v}\right)^2$$

Interazioni tra bosoni E.W e Higgs

- Per i bosoni $W_\mu^{1,2}$ posso definire $W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_H^{kin} \supset \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} \Rightarrow \boxed{m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4}}$$

MASSA DEL BOSONE W

- Per W^3_μ e B_μ occorre diagonalizzare la matrice.

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos\vartheta_W W^3_\mu - \sin\vartheta_W B_\mu \\ A_\mu = \sin\vartheta_W W^3_\mu + \cos\vartheta_W B_\mu \end{cases}$$

dove: $\boxed{\tan\vartheta_W = \frac{g'}{g}}$ Angolo di Weinberg

$$\sin\vartheta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \qquad \cos\vartheta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

Nella base di massa:

$$\mathcal{L}^{kin}_H \supset \frac{g^2+g'^2}{8} v^2 Z_\mu Z^\mu \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m_A^2 &= 0 \\ m_Z^2 &= \frac{(g^2+g'^2)v^2}{4} \end{aligned}}$$

MASSA DEL BOSONE Z

Il modello PREDICE una relazione tra masse:

$$\boxed{\rho \overset{def}{\equiv} \frac{m_W^2}{\cos^2\vartheta_W m_Z^2} = 1}$$

- m_W, m_Z : masse misurate direttamente
- $\cos^2\vartheta_W = \frac{g^2}{g^2+g'^2}$: dalle misure degli accoppiamenti di Z e W

$\downarrow$

La verifica di questa relazione è un TEST del Modello Standard.

In altri casi, ad esempio se l'Higgs fosse un tripletto di $SU(2)_L$ il parametro ρ sarebbe diverso da 1.

Valori numerici:

- Dal decadimento del muone

$$G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5}\ GeV^{-2}$$

Avevamo trovato la relazione:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \Rightarrow \boxed{v \simeq 246\ GeV}$$

- Dalla scoperta dei bosoni $W^\pm$ e Z:

$$\boxed{m_W \simeq 80{,}4\ GeV} \qquad \boxed{m_Z \simeq 91{,}2\ GeV}$$

$$\Rightarrow g = \frac{2m_W}{v} \simeq 0{,}65 \qquad g' = \frac{2}{v}\sqrt{m_Z^2 - m_W^2} \simeq 0{,}35$$

$$\sin^2\vartheta_W = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} \simeq 0{,}22$$

- Nota: $e = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_{em}}} \simeq 0{,}3$. Al confronto g e g' non sono piccoli. Le interazioni "deboli" non sono deboli perché l'accoppiamento è piccolo ma perché, a basse energie, sono soppresse dal fattore $\sim \frac{E^2}{m_W^2} \ll 1$.