

FISICA DEL SAPORE

Il "sapore" (o "flavour") indica la specie della particella elementare considerata (campi fermionici)

Nel **MODELLO STANDARD** abbiamo:

$$\text{QUARKS: } \left\{ \begin{array}{lll} u & c & t \\ d & s & b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q = \frac{2}{3} \\ Q = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{LEPTONI: } \left\{ \begin{array}{lll} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q = 0 \\ Q = -1 \end{array}$$

La **FISICA DEL SAPORE** studia i processi che mostrano una trasformazione del sapore tra lo stato iniziale e quello finale.

Abbiamo visto che l'unica interazione dello SM che produce un cambio di sapore è l'**INTERAZIONE ELETTRODEBOLLE DI CORRENTE CARICA**.

L'accoppiamento tra quark di diverse generazioni è possibile grazie agli elementi non diagonali della **MATRICE CKM**.

MATRICE CKM

Nelle correnti di interazione carica abbiamo trovato:

$$\sum_{cc}^\mu = \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu e_{Li} + \bar{u}_{Li} V_{ij} \gamma^\mu d_{Lj}$$

dove $V \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL}$ è la MATRICE CKM
(CABIBBO-KOBAYASHI-MASKAWA)
è unitaria: $V^\dagger V = 1$

PARAMETRI FISICI

- Una matrice **ortogonale** $n \times n$ ha

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ angoli indipendenti}$$

$$\sum_k O_{ki} O_{kj} = \delta_{ij} : \frac{n(n+1)}{2} \text{ vincoli indipendenti}$$

- Una matrice **unitaria** $n \times n$ ha

$$2n^2 - n^2 = n^2 \text{ parametri indep.}$$

$$\sum_k V_{ki}^* V_{kj} = \delta_{ij} : n^2 \text{ vincoli indep.}$$

come matrice
ortogonale $\rightarrow$

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

angoli $\uparrow$ $\leftarrow$ fasi

$(2n-1)$ di queste **fasi** NON SONO FISICHE.

Possono essere rimosse da cambio di fase dei quark che lascia invariato il resto della Lagrangiana:

$$u_{L,R}^i \rightarrow e^{i\theta_i^u} u_{L,R}^i \quad d_{L,R}^i \rightarrow e^{i\theta_i^d} d_{L,R}^i \quad i=1, \dots, n$$

L'effetto è

$$\mathcal{L}_{SM} \rightarrow \mathcal{L}_{SM} \left(V_{CKM}^{ij} \rightarrow V_{CKM}^{ij} e^{i(\theta_j^d - \theta_i^u)} \right)$$

Se tutti $\theta_j^d = \theta_i^u \quad \forall i, j$ allora $V_{CKM} \rightarrow V_{CKM}$
(simmetria $U(1)_B$ di numero barionico)

Quindi posso rimuovere $2n-1$ fasi.

$$V_{CKM} \text{ ha } \frac{n(n+1)}{2} - 2n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ FASI FISICHE}$$

$\Rightarrow$ Esiste una fase fisica solamente se $n \geq 3$!

Occorrono almeno 3 generazioni.

- Oltre ad angoli e fase di V_{CKM} , ho anche $n+n$ masse per quark up & down.

PARAMETRI DI YUKAWA PER I QUARK ($n=3$)

6 MASSE + 3 ANGOLI + 1 FASE

PARENTESI:

VIOLAZIONE DI CP NELLO SM

Abbiamo visto che sotto la **COMBINAZIONE CP**:

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \xrightarrow{P} \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R \xrightarrow{C} \bar{\psi}_L^T \gamma_\mu \psi_L = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$$

Vediamo come trasforma la Lagrangiana di corrente carica:

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L V W^+ d_L + \bar{d}_L V^\dagger W^- u_L \right)$$

$$\xrightarrow{CP} \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W^- \bar{d}_L V^T \gamma^\mu u_L + W^+ \bar{u}_L (V^\dagger)^T \gamma^\mu d_L \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{CP \text{ e' conservato se } V = V^*}$$

$\Rightarrow$ Una fase non nulla della CKM VIOLA CP.

ELEMENTI DELLA MATRICE CKM

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{u}_L^\alpha V_{\alpha\beta} \gamma^\mu d_L^\beta + \text{h.c.} \right)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

In completa generalità può essere parametrizzata con 3 angoli ed una fase in questo modo:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij} \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

Sperimentalmente, questi angoli sono stati misurati e si ha $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12}$.

$$s_{12} \approx 0,226$$

$$s_{23} \approx 0,042$$

$$s_{13} \approx 0,0036 \quad \delta \approx 69^\circ$$

La fase δ è grande

La parametrizzazione di Wolfenstein riflette questa gerarchia:

$$S_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda$$

$$S_{23} \stackrel{\text{def}}{=} A \lambda^2$$

$$S_{13} e^{-i\delta} \stackrel{\text{def}}{=} A \lambda^3 (\rho - i\eta)$$

Si ottiene

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

Definendo $\bar{\rho} \equiv \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots\right)$ $\bar{\eta} \equiv \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots\right)$

$$\Rightarrow \bar{\rho} + i\bar{\eta} = - \frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \quad \bar{\rho} \text{ indipendente dalla parametrizzazione di fase.}$$

Dalle misure:

$$\lambda \approx 0.226, \quad A \approx 0.81, \quad \bar{\rho} \approx 0.14, \quad \bar{\eta} \approx 0.35$$

IL TRIANGOLO DI UNITARIETÀ

UNITARIETÀ

$$V^\dagger V = \mathbb{1} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^3 |V_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^3 |V_{kj}|^2 = 1 & \forall i, j \\ \sum_{k=1}^3 V_{ik} V_{jk}^* = \sum_{k=1}^3 V_{ki} V_{kj}^* = 0 & \forall i, j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Questi sono importanti TEST dello SM

Vogliamo testare le relazioni $\sum_k V_{ki} V_{kj}^* = 0, \quad i \neq j$

$\Rightarrow$ sensibile alla fase δ .

ij

sd) $V_{us} V_{ud}^* + V_{cs} V_{cd}^* + V_{ts} V_{td}^* = 0$

$\mathcal{O}(\lambda)$ $\mathcal{O}(\lambda)$ $\mathcal{O}(\lambda^5)$

un elemento e^- molto più piccolo degli altri

$\Rightarrow$ trascurabile, la relazione è meno interessante

bs) $V_{ub} V_{us}^* + V_{cb} V_{cs}^* + V_{tb} V_{ts}^* = 0$

$\mathcal{O}(\lambda^4)$ $\mathcal{O}(\lambda^2)$ $\mathcal{O}(\lambda^2)$

bd) $V_{ub} V_{ud}^* + V_{cb} V_{cd}^* + V_{tb} V_{td}^* = 0$

$\mathcal{O}(\lambda^3)$ $\mathcal{O}(\lambda^3)$ $\mathcal{O}(\lambda^3)$

} tutti i termini sono della stessa grandezza

Dividiamo per $V_{cb} V_{cd}^*$ per far sì:

- Tutti termini $\mathcal{O}(1)$

- Uno $e^- = 1$

- Termini invarianti per riparametrizzazione di fase

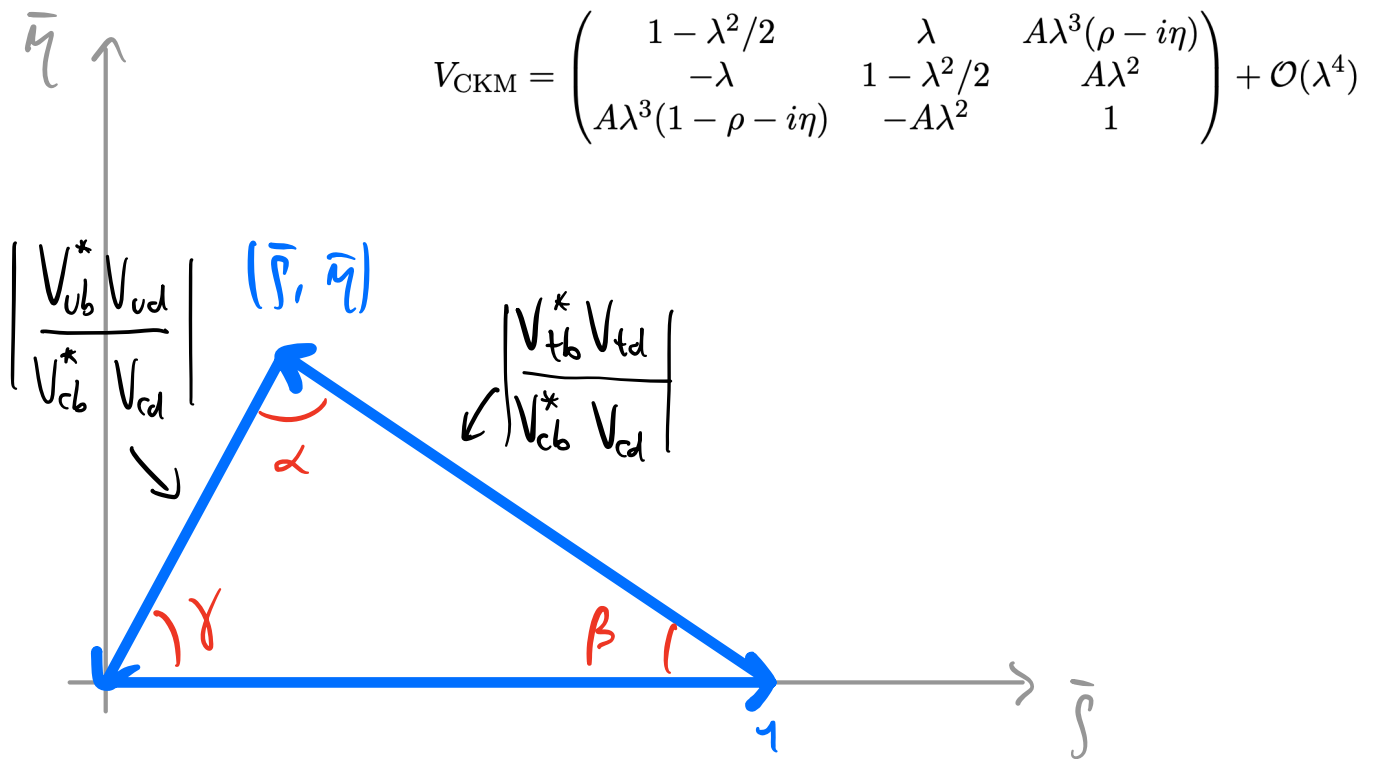
$\Rightarrow$ Prendiamone il coniugato (per convenzione)

$$1 + \frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} + \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + (-\bar{\rho} - i\bar{\eta}) + (-1 + \bar{\rho} + i\bar{\eta}) + \mathcal{O}(\lambda^4) = 0$$

È la somma di 3 numeri complessi

$\Rightarrow$ somma vettoriale nel piano complesso



$$\alpha = \arg \left(- \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*} \right) \quad \beta = \arg \left(- \frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right) \quad \gamma = \arg \left(- \frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \right)$$

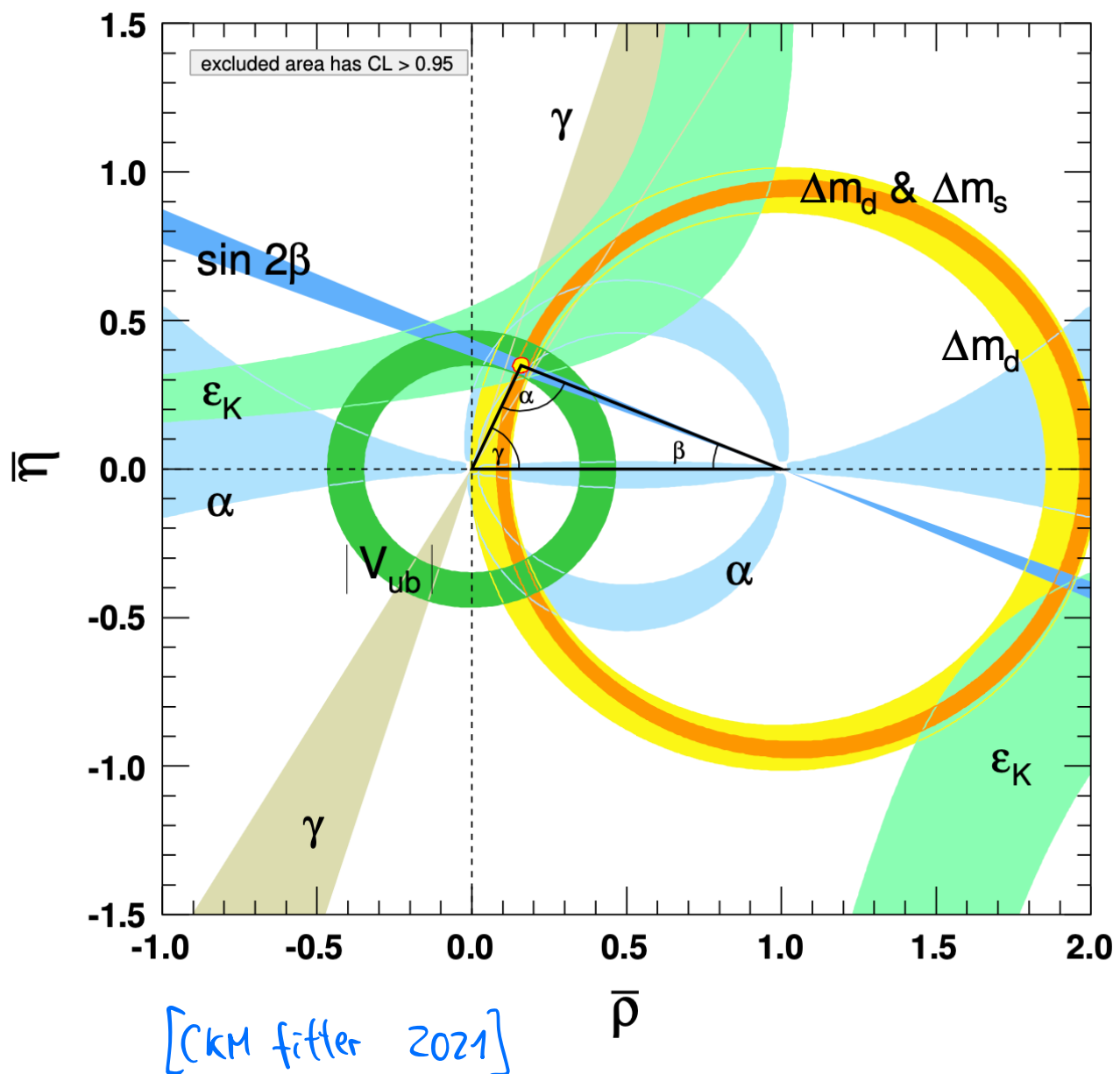
- Base normalizzata ad 1

- Misure delle lunghezze dei lati $\left| \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right|$ e $\left| \frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} \right|$

o di 2 degli angoli α, β, γ

forniscono test indipendenti dell'unitariet .

- Tutte queste misure devono essere compatibili con il vertice $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$



Per $\tilde{M}=0$ (parte immaginaria nulla) CP sarebbe conservato. In questo caso il triangolo di unitarietà avrebbe **AREA NULLA** (collapserebbe ad una linea).

Si definisce la quantità J come il doppio dell'area del triangolo di unitarietà non riscalo:

$$J = 2 (\text{area}) = \text{Im} (V_{ud} V_{tb} V_{td}^* V_{ub}^*) = (2,96 \pm 0,20) \times 10^{-5}$$

$\downarrow$ $= s_{12} s_{23} s_{31} c_{12} c_{23} c_{31}^2 \sin \delta$

PICCOLO ANCHE
SE δ È GRANDE.

INVARIANTE DI JARLSKOG

- $J=0$ se e solo se CP non è violato
- È un invariante sotto la riparametrizzazione di fase dei campi dei quark.
- Qualsiasi violazione di CP nello SM è proporzionale a J .
- $J \rightarrow 0$ se un qualsiasi angolo di mixing $\rightarrow 0$ (oltre che se $\delta \rightarrow 0$). Questo perché servono 3 generazioni per avere violazione di CP.

MISURA DEGLI ELEMENTI DI V_{CKM}

Settore di "sapore" (flavour) del Modello Standard.

I decadimenti degli adroni sono controllati dagli elementi della matrice CKM delle interazioni di C.C.

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{u}_L^i V_{ij} \gamma^\mu d_L^j + \text{h.c.} \right)$$

- Transizioni $u_i \leftrightarrow d_j$ controllate da V_{ij}
- La fase controlla fenomeni di VIOLAZIONE di CP
- Non tutti gli elementi V_{ij} sono indipendenti:

UNITARIETÀ

$$V^\dagger V = \mathbb{1} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^3 |V_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^3 |V_{kj}|^2 = 1 & \forall i, j \\ \sum_{k=1}^3 V_{ik} V_{jk}^* = \sum_{k=1}^3 V_{ki} V_{kj}^* = 0 & \forall i, j \end{cases}$$

- Gli elementi $|V_{ij}|$ possono essere determinati da misure di larghezze di decadimento o di branching ratios (Br) (rapporti di disamazione) associati a decadimenti $u_i \leftrightarrow d_j$ a livello albero.
- Altre combinazioni di elementi CKM possono essere estratti da misure di processi che avvengono ad 1 loop.

$\Rightarrow$ A tal fine, oltre la misura è necessaria la predizione teorica. Questa è soggetta ad incertezze adroniche, dovute al calcolo degli elementi di matrice di operatori formati da quark tra stati adronici:

$$\langle H_2(p) | \mathcal{O}(u_i, d_j, \dots) | H_1(k) \rangle$$

Tecniche: $\swarrow$ Simulazioni di QCD sul reticolo,
 Lagrangiana chirale,
 Heavy quark CFT,
 light-cone sum rules, ...

[PDG. 12]

- $|V_{ud}|$ $d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e$: $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$ $|V_{ud}| = 0.97367(32)$
 $O(1)$ $O^+ \rightarrow O^+$ superallowed nuclear β -decays
 $u \rightarrow d e^+ \bar{\nu}_e$: $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \bar{\nu}$

- $|V_{us}|$ $s \rightarrow u l^- \bar{\nu}_l$: $K_L^0 \rightarrow \pi^- l^+ \bar{\nu}_l$
 $O(\lambda)$ $l = e, \mu$ $K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \bar{\nu}_l$

- $|V_{us}/V_{ud}|$ $\frac{Br(K^- \rightarrow \mu \bar{\nu})}{Br(\pi^- \rightarrow \mu \bar{\nu})}$ Il rapporto permette di ridurre le incertezze sull'elemento di matrice adronico

$$|V_{us}| = 0.22308(55)$$

UNITARIETÀ : $|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1$
 $\uparrow \sim 10^{-5}$: trascurabile

$$\Rightarrow |V_{ud}|_{exp}^2 + |V_{us}|_{exp}^2 = 0.99780 \pm 0.00067 \quad vs. \quad 1$$

3.2 σ deviazione da 1 Segnale di possibile nuova fisica,
 ANOMALIA DELL'ANGOLO problema nelle misure o predizioni teoriche
 DI CABIBBO o fluttuazione statistica ?

↓

Occorre aspettare ulteriori dati e migliorare le predizioni teoriche

• $|V_{cd}|$
 $O(\lambda)$

$c \rightarrow d \ell^+ \nu_\ell$

$D \rightarrow \pi \ell \nu$

$D \rightarrow K \ell \nu$

$D^+ \rightarrow \mu^+ \nu$

$|V_{cd}| = 0.221 \pm 0.004$

• $|V_{cs}|$
 $O(1)$

$c \rightarrow s \ell^+ \nu_\ell$

$D_s^+ \rightarrow \mu^+ \nu$

$D_s^+ \rightarrow \tau^+ \nu$

$D \rightarrow K \ell \nu$

$|V_{cs}| = 0.975 \pm 0.006$

• $|V_{cb}|$ $b \rightarrow c \ell^- \bar{\nu}_\ell$
 $O(\lambda^2)$

esclusivo: $B \rightarrow D^{(*)} \ell \nu$

$|V_{cb}| = (39,4 \pm 0,8) \times 10^{-3}$

inclusivo:

$\left[\begin{array}{l} \text{Somma su} \\ \text{tutti adroni} \\ \text{con charm} \end{array} \right] \sum_{X_c} B \rightarrow X_c \ell \nu$

$\updownarrow$ tensione ... ?

$|V_{cb}| = (42,2 \pm 0,8) \times 10^{-3}$

• $|V_{ub}|$ $b \rightarrow u \ell^- \bar{\nu}_\ell$
 $O(\lambda^3)$

esclusivo: $B \rightarrow \pi \ell \nu$

$|V_{ub}| = (3,67 \pm 0,15) \times 10^{-3}$

inclusivo: $\sum_{X_u} B \rightarrow X_u \ell \nu$

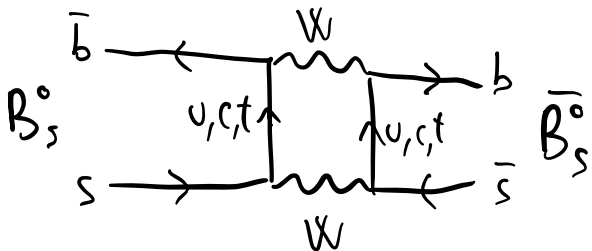
$\updownarrow$ tensione ... ?

$|V_{ub}| = (4,13 \pm 0,25) \times 10^{-3}$

- $|V_{ts}|$ e $|V_{td}|$
 $O(\lambda^2)$ $O(\lambda^3)$
- $$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow s l^+ \nu_l \\ t \rightarrow d l^+ \nu_l \end{array} \right\} \text{ non misurabili con alcuna precisione da decadimenti del top}$$

Bisogna affidarsi a processi dove queste transizioni $t \rightarrow s$ e $t \rightarrow d$ avvengono dentro loop.

Per esempio in oscillazioni $B_s^0 \leftrightarrow \bar{B}_s^0$ e $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$



$$|V_{ts}| = (47,5 \pm 0,9) \times 10^{-3}$$

$$|V_{td}| = (8,6 \pm 0,2) \times 10^{-3}$$

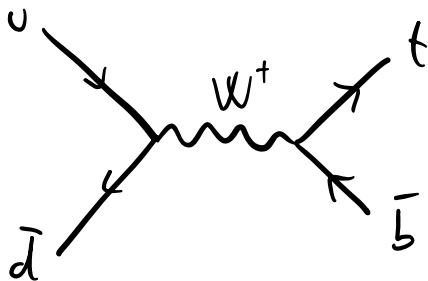
simile per $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ con $s \leftrightarrow d$

- $|V_{tb}|$ $t \rightarrow b W^+$:

Decadimenti del top:

$$\frac{\text{Br}(t \rightarrow W^+ b)}{\sum_{q=b,s,d} \text{Br}(t \rightarrow W^+ q)} = |V_{tb}|^2 \Rightarrow |V_{tb}| > 0.975 \text{ @ } 95\% \text{ CL}$$

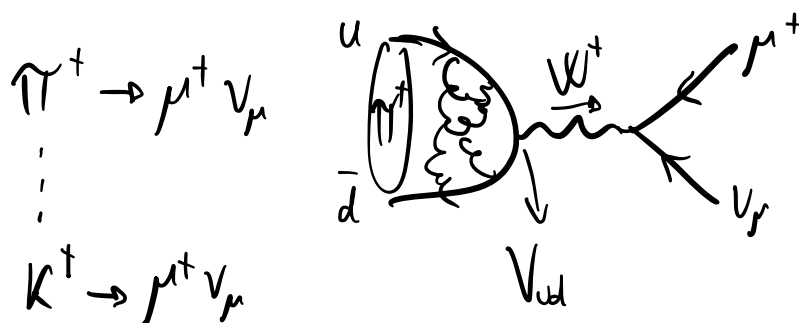
Produzione di singolo top al collider:



$$\sigma \propto |V_{tb}|^2 \Rightarrow |V_{tb}| = 1,074 \pm 0.029$$

CLASSIFICAZIONE DEI DECADIMENTI DI ADRONI

• LEPTONICI



$Br \sim 100\%$
Altri canali soppressi da spazio delle fasi.

$B^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau \rightarrow Br \sim 10^{-4} \rightarrow B^+$ ha molti più canali di decadimento più probabili

$B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \rightarrow Br \sim 10^{-9} \rightarrow FCNC$. Molto raro.

→ Dipendono da 1 solo parametro non-perturbativo, la "costante di decadimento" del mesone, eg. f_π .
Possono quindi essere predetti con buona precisione.

• SEMILEPTONICI

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e, \quad \dots$$

→ La predizione degli elementi di matrice adronici è più difficile. Richiede varie tecniche: Chiral perturbation theory, Heavy-quark EFT, etc...

• ADRONICI

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \quad K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$B^+ \rightarrow D^+ K^0, \quad \text{etc..}$$

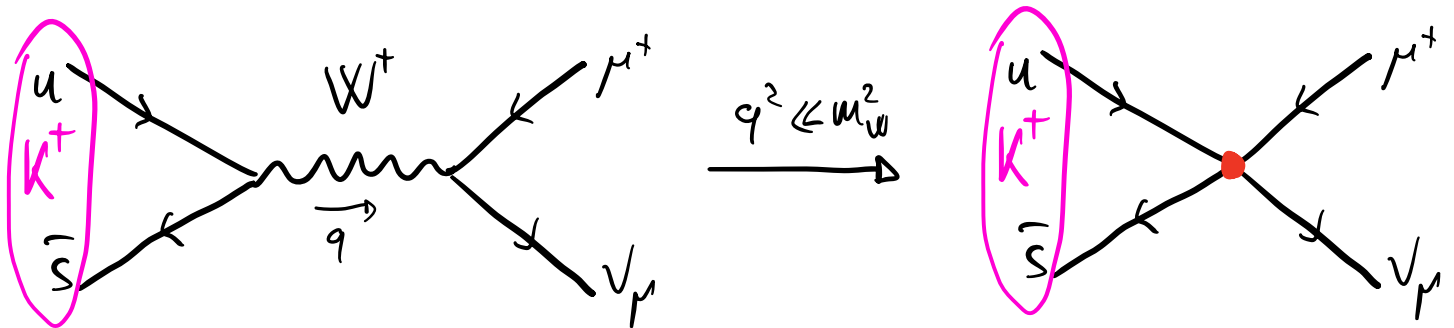
Predizioni teoriche sono spesso molto difficili.

DECADIMENTI LEPTONICI DEI K [Donoghue VIII-1]

Abbiamo visto che le transizioni di sapore nello SM sono dovute all'interazione con il bosone W :

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{c.c.}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^\pm \left(\bar{u}_L^\alpha V_{\alpha\beta} \gamma^\mu d_L^\beta + \bar{\nu}_L^\alpha \gamma^\mu e_L^\alpha \right) + \text{h.c.}$$

Vediamo per esempio il **decadimento leptonic** $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$



Dato che $q^2 = m_{K^+}^2 = (0,494 \text{ GeV})^2 \ll M_W^2 = (80,4 \text{ GeV})^2$ possiamo lavorare nella teoria effettiva di bassa energia:

$$\mathcal{L}_{\text{cc}}^{\text{eff}} = -4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} (V_{ij} \bar{u}_i \gamma_\alpha P_L d_j) (\bar{\mu} \gamma^\alpha P_L \nu_\mu) + \dots$$

L'ampiezza è data da:

$$i\mathcal{A} \simeq -i \underbrace{\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^*}_{\text{Coefficiente di Wilson}} \underbrace{\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} u | K^+(q) \rangle}_{\text{elemento di matrice adronica}} \left[\bar{u}_\mu \gamma^\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} \nu_\mu \right]$$

Coefficiente di
Wilson

elemento di matrice adronica

Elemento di matrice di QCD

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u | K^+(q) \rangle$$

→ Non si calcola in th. delle perturbazioni perché QCD è non-perturbativa.

Possiamo però restringerne la forma.

- QCD è invariante sotto P (parità) e C (coniugazione di carica)
- I mesoni K (come i pioni) sono pseudoscalari

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u | K^+(q) \rangle = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ V_\mu & A_\mu \end{matrix}$$

$$\langle 0 | V_0 | K^+ \rangle : \langle \text{scalare} | \text{scalare} | \text{pseudoscalare} \rangle = 0$$

$$\langle 0 | A_0 | K^+ \rangle : \langle \text{scalare} | \text{pseudoscalare} | \text{pseudoscalare} \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow \langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 u | K^+(q) \rangle \neq 0$$

- Definiamo quindi, come per i pioni, la COSTANTE DI DECADIMENTO f_K :

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 u | K^+(q) \rangle \equiv i f_K q_\mu$$

← Nota, in alcune referenze viene usata la convenzione $\sqrt{2} f_K$. Noi usiamo la convenzione del PDG

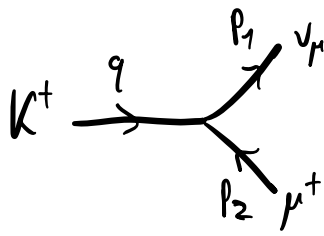
- f_K si ottiene o sperimentalmente o da QCD sul reticolo.

$$f_{K^\pm} = 155,7(3) \text{ MeV}$$

$$f_{\pi^\pm} = 130,2(12) \text{ MeV}$$

[PDG. 84]

Decadimento:



$$i\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* i f_K q_\mu \left(\bar{u}_{\nu_\mu}(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\mu(p_2) \right)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* f_K m_\mu \left(\bar{u}_{\nu_\mu}(p_1) (1 + \gamma_5) v_\mu(p_2) \right) \leftarrow$$

Eq. di Dirac:

$$\bar{u}_\nu(p_1) (\not{p}_1 + \not{p}_2) (1 - \gamma_5) v_\mu(p_2)$$

$$= -\bar{u}_\nu(p_1) (1 + \gamma_5) m_\mu v_\mu(p_2)$$

$$d\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{1}{2m_{K^+}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}}$$

Lorentz-Invariant Phase Space: $d\tilde{\Pi}_{\text{LIPS}} = \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2} \right)$

$$\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 f_K^2 m_\mu^2 \text{Tr} \left[\not{p}_1 (1 + \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\mu) (1 - \gamma_5) \right]$$

$$\text{Tr} \left[\not{p}_1 (1 + \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\mu) (1 - \gamma_5) \right] = 2 \text{Tr} \left[\not{p}_1 \not{p}_2 (1 - \gamma_5) \right] = 8 p_1 \cdot p_2 = 4(m_K^2 - m_\mu^2)$$

$$q = (p_1 + p_2)^2 = m_K^2 = m_\mu^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (m_K^2 - m_\mu^2)$$

$$d\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{1}{2m_{K^+}} \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 f_K^2 \cancel{4} m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2) \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2} \right)$$

Posso integrare $\int d\Omega = 4\pi$

$$\rightarrow \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \frac{G_F^2 f_{K^+}^2 m_K}{8\pi} m_\mu^2 |V_{us}|^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2$$

- Correzioni radiative (QED) sono $\sim \mathcal{O}(1\%)$

- Γ **proporzionale a m_μ^2** :

$$\rightarrow \frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{1 - m_e^2/m_{K^+}^2}{1 - m_\mu^2/m_{K^+}^2} \right)^2 \approx 2.48 \times 10^{-5}$$

- Dipende da $|V_{us}|$ e da 1 solo parametro non perturbativo f_{K^+} .

$\Rightarrow$ possiamo estrarre $|V_{us}|$.

- Questo e^- il decadimento principale, seguito da $\pi^+ \pi^0$.

$$\text{Br}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \approx 63,6\% \quad \text{Br}(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) \approx 20,67\%$$

$$\text{Br}(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e) \approx 1.58 \times 10^{-5}$$

- Decadimenti in 3 corpi sono soppressi dallo spazio delle fasi.

- Risultato analogo per altri decadimenti leptonic:

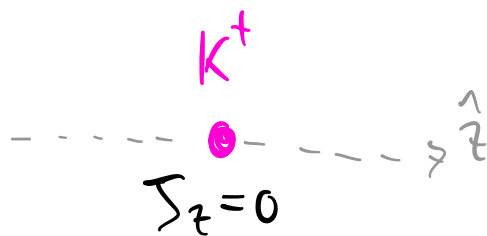
$$\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell, \quad D^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell, \quad B^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell, \quad B_c^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell, \quad \text{etc...}$$

Il fatto che $\text{Br}(K^+ \rightarrow l^+ \nu_l) \propto m_l^2$ e' una "soppressione chirale". Può essere infatti capita studiando il momento angolare.

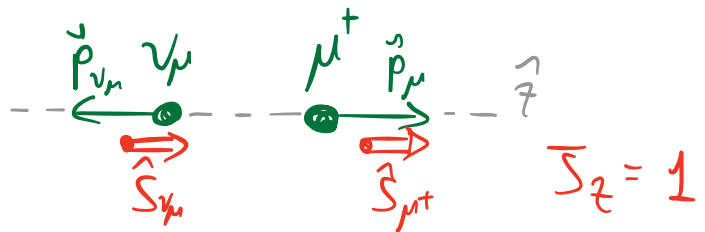
- K^+ è uno pseudoscalare : spin = 0
- Il neutrino è LH : elicità $-\frac{1}{2}$ dato che $m_\nu = 0$
- L'anti-muone è generato dalle interazioni deboli con chiralità RH. Se $m_\mu = 0$ allora avrebbe elicità $+\frac{1}{2}$

Studiamo il momento angolare lungo $\hat{z}$:

Stato iniziale

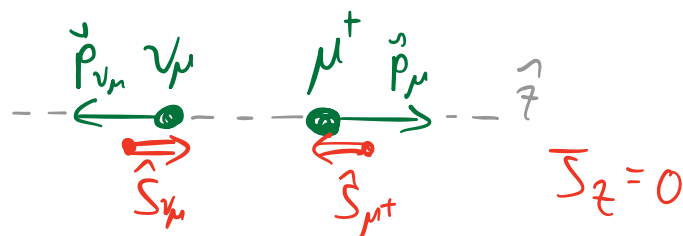


Stato finale



Il processo sarebbe quindi vietato per $m_\mu = 0$.

Con $m_\mu \neq 0$, pagando un fattore m_μ possiamo fare un flip dell'elicità ed avere μ^+ con elicità $-\frac{1}{2}$



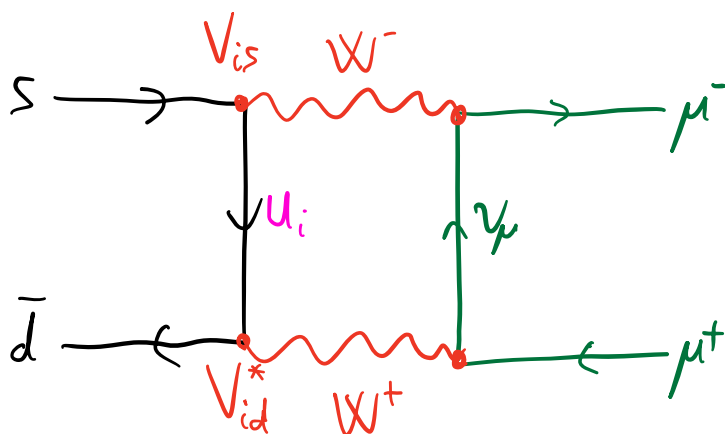
$$\Rightarrow \mathcal{M}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \propto m_\mu \Rightarrow \text{Br} \propto m_\mu^2$$

SOPPRESSIONE DEI PROCESSI CON FCNC [F.6.6]

Confrontiamo $\text{Br}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) \simeq 0,64$ ← CORRENTE CARICA
con $\text{Br}(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-) \simeq 7 \times 10^{-9}$ ← CORRENTE NEUTRA

dove $|K_L\rangle \simeq \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$
(trascurando violazione di CP)

Abbiamo infatti visto che nello SM non ci sono FCNC (flavour-changing neutral currents) a livello albero. Quindi $K_L \left(\frac{|\bar{s}d\rangle + |\bar{d}s\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow \mu^+ \mu^-$ è generato solamente da diagrammi con almeno 1 loop:



L'ampiezza sarà proporzionale a:

$$\mathcal{M} \propto \sum_i V_{is} V_{id}^* f(m_{u_i})$$

$f(m)$ è una funzione che descrive il loop.

È adimensionale e dipende da m_{u_i} tramite $x_i \equiv \frac{m_{u_i}^2}{m_W^2}$.

Se potessi trascurare le masse dei quark u_i nel loop (o se fossero tutte uguali) potrei fattorizzare:

$$M \propto f(m) \sum_i V_{is} V_{id}^* \stackrel{=0}{\leftarrow} \text{ grazie all'unitarietà della matrice CKM: } V^\dagger V = \mathbb{1}$$

In $f(m)$ posso quindi trascurare parti costanti (indip. da m).

Nel processo che stiamo considerando nel loop circolano i quark up, charm e top:

$$M \propto \underbrace{V_{us} V_{ud}^*}_{O(\lambda)} f(x_u) + \underbrace{V_{cs} V_{cd}^*}_{O(\lambda)} f(x_c) + \underbrace{V_{ts} V_{td}^*}_{O(\lambda^5)} f(x_t)$$

Trascurando $x_u, x_c \ll 1$ e prendendo $f(0)$ a fattor comune:

$$M \propto f(0) \underbrace{(V_{us} V_{ud}^* + V_{cs} V_{cd}^*)}_{= -V_{ts} V_{td}^* \text{ per unitarietà della CKM}} + f(x_t) V_{ts} V_{td}^*$$

$$\Rightarrow M \propto V_{ts} V_{td}^* (f(x_t) - f(0))$$

I due contributi da up e charm, con un coefficiente CKM di $O(\lambda)$ si cancellano fra loro ed il residuo è $O(\lambda^5)$.

Questa soppressione è chiamata

"Meccanismo GIM"

[Glashow-Iliopoulos-Maiani '70]

Esponendo per piccole masse si ha:

$$f(m_{ui}) \sim \frac{g^4}{16\pi^2} \frac{m_{ui}^2}{m_w^2}$$

$$f(0) \rightarrow 0$$

Fattore di loop

Si ottiene infine:

$$\mathcal{M} \sim \frac{G_F}{4\pi} \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_w} m_\mu f_K V_{ts} V_{td}^* \underbrace{g\left(\frac{m_t^2}{m_w^2}\right)}_{\text{funzione del loop senza i}}$$

Interazione debole di CC $\nwarrow$ $\nearrow$ accoppiamento di gauge $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | K_i \rangle$ $\searrow$ GIM
 $\nwarrow$ $\nearrow$ Flip di chiralità

Il fattore $\frac{\alpha}{\pi} V_{td} V_{ts}^* \sim 10^{-7}$ spiega la soppressione di questo processo rispetto a quello simile in corrente carica $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$.