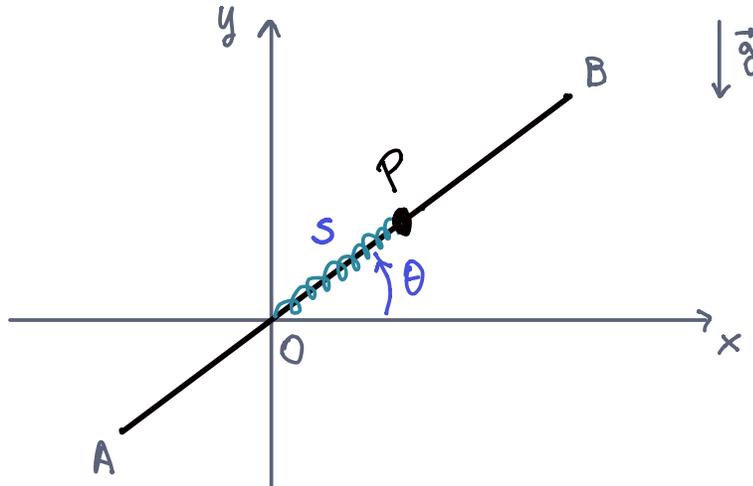


### Esercizio



Un'asta rigida  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $3\ell$  è libera di ruotare in un piano verticale  $xy$ , con asse  $y$  verticale ascendente, attorno a un asse fisso passante per il punto  $O$  a distanza  $\ell$  da un suo estremo. Un punto materiale  $P$  di ugual massa  $m$ , libero di scorrere sulla retta dell'asta, è legato a  $O$  da una molla di costante elastica  $k$ . Si scelgano come coordinate libere l'ascissa  $s$  di  $P$  su  $AB$  e l'angolo  $\theta$  tra l'asse  $AB$  e l'asse  $x$ .

1. Scrivere la Lagrangiana  $L$  del sistema (si dimostri che per l'asta  $I = m\ell^2$ ) [2pt].
2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
3. Si dia la definizione di punto di equilibrio stabile per un sistema Lagrangiano. [1pt]
4. Si trovino i punti di equilibrio del sistema ridotto e se ne discuta la stabilità. [2pt]
5. Si esponga il procedimento di linearizzazione di un sistema Lagrangiano attorno a un punto di equilibrio stabile, sottolineandone la giustificazione fisica. [2pt]
6. Linearizzare la Lagrangiana attorno al punto di equilibrio che si trova a  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni [1pt].
7. Si scriva la soluzione generale  $(s(t), \theta(t))$  delle equazioni di Lagrange nell'approssimazione linearizzata attorno al punto di equilibrio che si trova a  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ . [1pt]
8. *Facoltativo: qual è la geometria dello spazio delle configurazioni?*

[Lo scritto viene superato con un punteggio di almeno  $\frac{6}{10}$ .]