Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 17.06.24

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024

Esercizio 1

1. Cos'è un sistema Hamiltoniano? [1pt]
2. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Hamiltoniano. Fare un esempio. [2pt]
3. Definire le Parentesi di Poisson e descrivere la loro relazione con le costanti del moto. [1pt]
4. Scrivere la definizione di trasformazione canonica e la relazione tra le Hamiltoniane coniugate (spiegando ogni simbolo in tale relazione). [2pt]
5. Data una generica funzione sullo spazio delle fasi $G(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$, dimostrare che la seguente trasformazione infinitesima è una trasformazione canonica *infinitesima* e scrivere l'Hamiltoniana coniugata [2pt]:

$$\tilde{p}_h = p_h - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_h}(p, q) \qquad \tilde{q}_k = q_k + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_k}(p, q) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon \ll 1$$

6. Scrivere, usando le parentesi di Poisson, la variazione infinitesima di una funzione $f(p, q)$ sotto la trasformazioni infinitesima generata da $G(p, q)$. [1pt]
7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Nöther in *Meccanica Hamiltoniana*. [3pt]
8. Si consideri una particella vincolata sul piano di coordinate Cartesiane (q_1, q_2). Dimostrare che l'Hamiltoniana $H(p, q) = p_1^2 q_2^2 + p_2^2 q_1^2 - 2q_1 q_2 p_1 p_2$ ha variazione infinitesima *nulla* sotto rotazioni infinitesime sul piano. [2pt]
9. Si consideri la trasformazione di coordinate

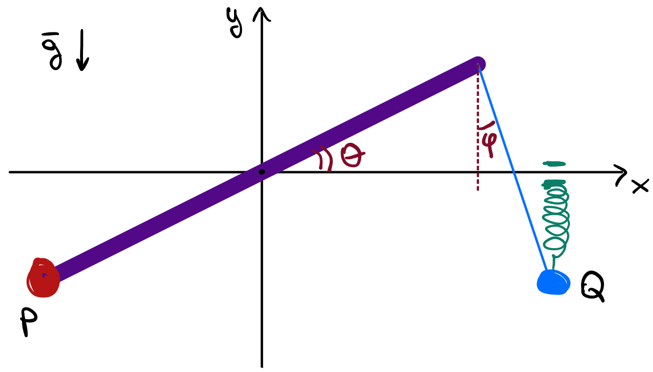
$$p_1 = p_r \cos\varphi - p_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}, \qquad p_2 = p_r \sin\varphi + p_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}, \qquad q_1 = r\cos\varphi, \qquad q_2 = r\sin\varphi;$$

   dimostrare che essa è una trasformazione canonica. Usare tale trasformazione canonica per risolvere le equazioni del moto dell'Hamiltoniana del punto precedente. [2pt]

Esercizio 2

Nel sistema in figura, disposto in un piano verticale, una sbarra omogenea rigida di massa $M = 3m$ e lunghezza 2ℓ è imperniata nel suo centro all'origine degli assi. Un punto materiale P di massa $2m$ è vincolato ad un estremo della barra. All'altro estremo è appeso un pendolo di lunghezza ℓ, il cui punto materiale Q ha massa m. **Sul sistema agisce la gravità**. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto materiale Q all'asse x (rimanendo sempre verticale).

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli θ e φ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].



2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata φ [2pt].

3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [5pt].

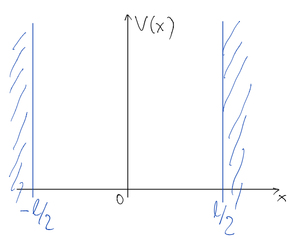
4. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. [2pt].

5. Guardando l'energia potenziale, si spieghi perché il parametro k non compare nell'espressione delle frequenze delle piccole oscillazioni [1pt].

6. Si aggiunga al sistema una forza esterna costante $\vec{F} = -F\,\vec{e}_x$ agente sul punto P della sbarra. Si determini: a) come la sua presenza modifica la Lagrangiana trovata al punto 1; b) il valore di F affinchè ci sia un punto di equilibrio a $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{6}, \varphi_0)$ (determinare F in funzione di $\sin\varphi_0$) [2pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si spieghi perché tale sistema ha uno spettro discreto e si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, derivando i rispettivi autovalori: [2pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right)\ (m = 0, 1, 2, ...) \qquad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right)\ (m = 1, 2, ...)$$

2. Si calcoli il valor medio dell'energia nel terzo livello energetico [1pt].

3. Si calcoli il valor medio dell'impulso P nel decimo livello energetico [1pt].

4. Si consideri il sistema nello stato fondamentale: calcolare la probabilità che la particella venga misurata nell'intervallo $[\frac{\ell}{4}, \frac{\ell}{2}]$ [1pt].