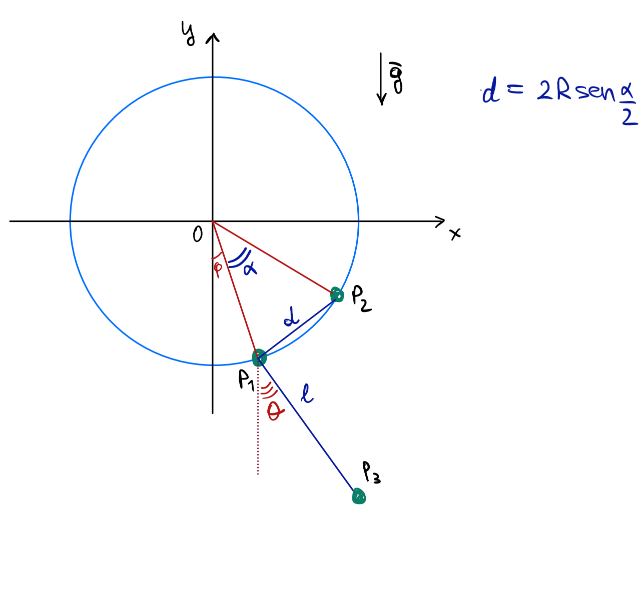
Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 13.01.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024

Esercizio 1

1. Dare la definizione di trasformazioni canoniche e fornire un esempio di tali trasformazioni, dimostrando che è canonica [3pt].
2. Dare la definizione di costante del moto in un sistema Hamiltoniano [1,5pt].
3. Definire il flusso Hamiltoniano [1pt].
4. Dimostrare che il flusso Hamiltoniano è una trasformazione canonica [3pt].
5. Enunciare il teorema di Liouville e dimostrarlo [2pt].
6. Si consideri il moto
$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^0 \cos t - p_2^0 \sin t \\ p_1^0 \sin t + p_2^0 \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^0 \cos t - q_2^0 \sin t \\ q_1^0 \sin t + q_2^0 \cos t \end{pmatrix}$$
Scrivere quale Hamiltoniana genera questo flusso, giustificando la risposta [2pt].
7. Trovare una costante del moto per il sistema descritto al punto precedente, spiegando perché è una costante del moto [1,5pt].
8. Dato un sistema a uno grado di libertà, dimostrare che la seguente trasformazione di coordinate è canonica: $p = \alpha\,\tilde{q} + \ln \tilde{p}$, $q = \tilde{p}\, e^{\alpha \tilde{q}} - \frac{\tilde{p}}{\alpha}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ [2pt].

Esercizio 2



Nel sistema in figura, un punto materiale P_1 di massa $m_1 = m$ e un punto materiale P_2 di massa $m_2 = 2m$ sono vincolati a una guida circolare verticale di raggio R. I due punti sono vincolati agli estremi di una barra di massa trascurabile e lunghezza $d = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Un terzo punto materiale P_3 di massa $m_3 = m$ è vincolato tramite una barra di massa trascurabile e lunghezza ℓ al punto P_1 come in figura. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli φ e θ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].

2. Trovare le equazioni di Lagrange [2pt].

3. Si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità [4pt].

4. Si prenda $\alpha < \frac{\pi}{2}$ tale che $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\ell}$. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile e si scriva la Lagrangiana linearizzata [3pt].

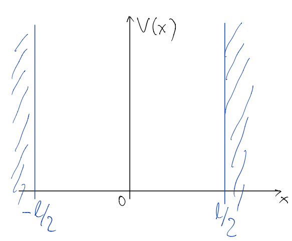
5. Si consideri il punto precedente e si scrivano le soluzioni $\varphi(t)$ e $\theta(t)$ delle equazioni del moto nell'approssimazione di piccole oscillazioni. [1pt]

6. Si applichi una forza costante $\vec{F} = F\vec{\imath}_x$ al punto P_2. Qual è la nuova Lagrangiana? Qual è il valore di F per cui P_1 ha coordinate cartesiane $(0, -R)$ nella configurazione di equilibrio stabile? [2pt]

[*Suggerimento:* $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ *e* $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.]

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, derivando i rispettivi autovalori: [1,5pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right)\ (m = 0, 1, 2, ...) \qquad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right)\ (m = 1, 2, ...)$$

2. Si consideri la funzione $\psi(x) = \alpha\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\left[1 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right]$. Si calcoli α in modo che ψ sia normalizzata. [1pt]

3. Si calcoli il valor medio dell'energia nello stato dato dalla funzione ψ del punto precedente [1pt].

4. Si calcoli il valor medio della posizione x nel settimo livello energetico [0,5pt].