Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 12.02.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024

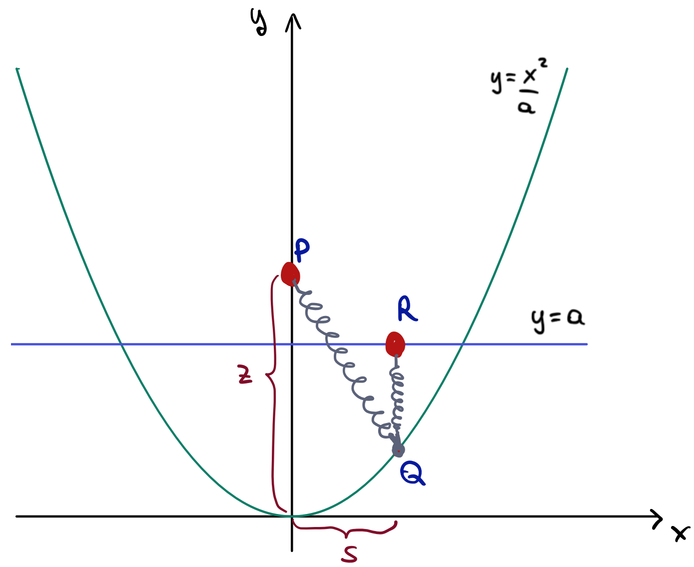
Esercizio 1

1. Definire le Parentesi di Poisson e dimostrare la proprietà $\{f, g_1 g_2\} = g_1\{f, g_2\} + \{f, g_1\}g_2$ [1,5pt].
2. Scrivere la definizione di trasformazione canonica. [2pt]
3. Definire cosa si intende per trasformazioni che preservano le parentesi di Poisson. Dimostrare che tali trasformazioni sono simplettiche. [3 pt]
4. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther in meccanica Hamiltoniana. [3pt]
5. Si consideri un sistema a 1 grado di libertà ($n = 1$). Data una generica funzione sullo spazio delle fasi $G(p, q)$, dimostrare che la seguente trasformazione infinitesima è una trasformazione canonica *infinitesima* [1,5pt]:
$$\tilde{p} = p - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q}(p, q) \qquad \tilde{q} = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p}(p, q) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon \ll 1$$
6. Si scriva una generica rotazione di angolo α attorno all'asse z. Si derivi da essa la variazione del vettore $\vec{q}$ sotto una rotazione infinitesima attorno all'asse z. Si dimostri che essa è generata dalla componente $M_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ del momento angolare. [2pt]
7. Determinare α e β in modo che la seguente trasformazione di coordinate $p = \frac{1}{2}\tilde{p}^{\alpha}\cos(\tilde{q})$, $q = \beta\tilde{p}^{\alpha}\sin(\tilde{q})$ sia canonica. [1,5pt]
8. Applicare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto dell'oscillatore armonico con $\omega = 1$ e $m = 1$ [1,5pt].

Esercizio 2

Nel sistema in figura, un punto materiale P di massa m è vincolato a giacere sull'asse y, mentre un punto materiale R di massa m vincolato sulla retta $y = a$. Un altro punto Q di massa trascurabile è vincolato a giacere su una parabola di equazione $y = \frac{x^2}{a}$. I punti P e Q sono connessi da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Il punto Q e il punto R sono connessi da una molla che rimane sempre *verticale* (ancora di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla). Sul sistema agisce la gravità (il piano xy è verticale).

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'ordinata z del punto P e l'ascissa s dei punti R e Q. [2pt].
2. Trovare l'equazione di Lagrange relativa alla variabile z [1pt].
3. Che simmetria ha la Lagrangiana (oltre a quella di traslazione temporale)? A tale simmetria è associata una costante del moto? [1pt]
4. Si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità [4pt].



5. Si prenda $a = \frac{3mg}{k}$. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad uno dei punti di equilibrio stabili e si scriva la Lagrangiana linearizzata [3pt].

6. Si consideri il punto precedente e si scrivano le soluzioni $z(t)$ e $s(t)$ delle equazioni del moto nell'approssimazione di piccole oscillazioni. [1pt]

7. Si continui a tenere $a = \frac{3mg}{k}$. Si applichi una forza costante $\vec{F} = F\vec{\iota}_x$ al punto R. Qual è la nuova Lagrangiana? Qual è il valore di F per cui R ha coordinate cartesiane (a, a) nella configurazione di equilibrio? [2pt]

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico.

1. Si scriva l'opertore differenziale che rappresenta l'Hamiltoniana del sistema [0,5pt].

2. Si dimostri che la seguente funzione d'onda è un'autofunzione dell'Hamiltoniana, e si determini l'autovalore corrispondente [1,5pt]:

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} - 1\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{1}$$

3. Sapendo qual è lo spettro dell'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, dire a quale livello energetico n corrisponde la funzione d'onda in eq. (1) [0,5pt].

4. Si scriva l'evoluto al tempo t se lo stato iniziale (a $t = 0$) è dato dalla funzione ψ in eq. (1) [1pt].

5. Si calcoli il valor medio della posizione x in questo livello energetico [0,5pt].