

Segnali e sistemi nel dominio del tempo



Sommario

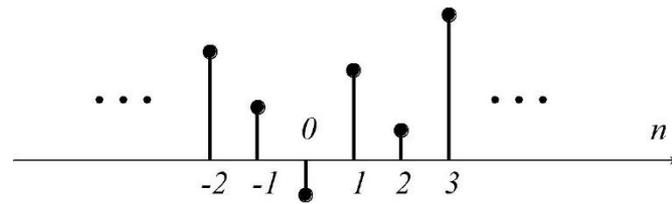
- Rappresentazione dei segnali **tempo-discreto** mediante una combinazione lineare di impulsi traslati
- Risposta impulsiva dei sistemi lineari e dei sistemi lineari tempo invarianti
- Somma di convoluzione

- Rappresentazione dei segnali **tempo-continuo** mediante una combinazione lineare (**integrale**) di impulsi **ideali** traslati
- Risposta impulsiva dei sistemi lineari e dei sistemi lineari tempo invarianti
- Integrale di convoluzione

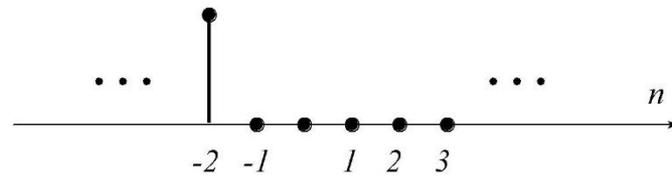
- Proprietà della somma e dell'integrale di convoluzione



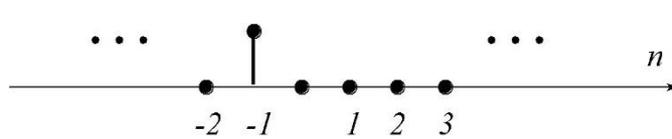
Segnali tempo discreto - approssimazione



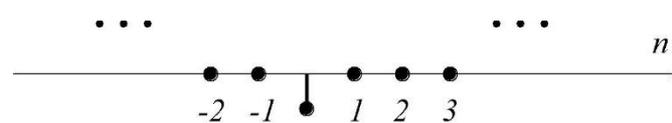
$$x[n]$$



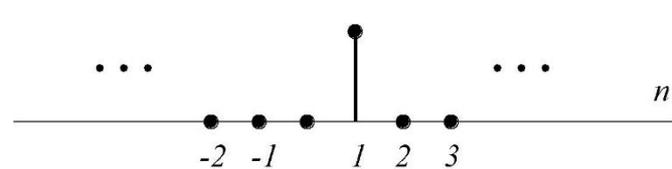
$$x[-2]\delta[n+2]$$



$$x[-1]\delta[n+1]$$



$$x[0]\delta[n]$$



$$x[1]\delta[n-1]$$

Pertanto:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

a) $x[n]$ così scritta risulta combinazione lineari di impulsi traslati negli 'istanti' k , pesati dai valori che $x[n]$ assume in detti istanti.

b) Una sommatoria di quel tipo viene denominata somma di convoluzione tra $x[n]$ e $\delta[n]$.

In generale:

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

(\otimes = simbolo di convoluzione)

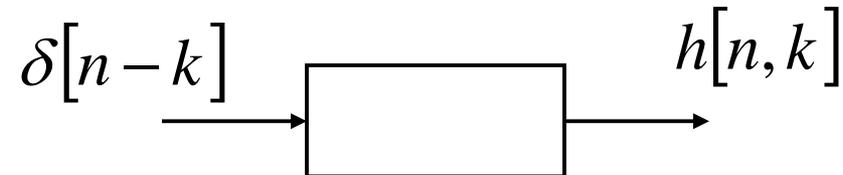


Sistemi tempo discreto

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

1^a Ipotesi: sistema LINEARE

Sia $h[n, k]$ la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta[n - k]$



per la linearità del sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n, k]$$



Esempio

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n]$

Ricavare la sua risposta al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

La risposta è calcolabile attraverso la seguente sommatoria:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1-\frac{2}{3}} u[n] = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$



II^a ipotesi: sistema LINEARE TEMPO-INVARIANTE (LTI):

In questo caso:

$$h[n, k] = h[n - k]$$

$h[n]$ = **Riposta impulsiva del sistema: risposta all'impulso $\delta[n]$**

Pertanto:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] = x[n] \otimes h[n]$$

Somma di convoluzione



Calcolo **grafico** della somma di convoluzione

Per eseguire correttamente il calcolo della somma di convoluzione, è **opportuno** procedere attraverso i seguenti passi:

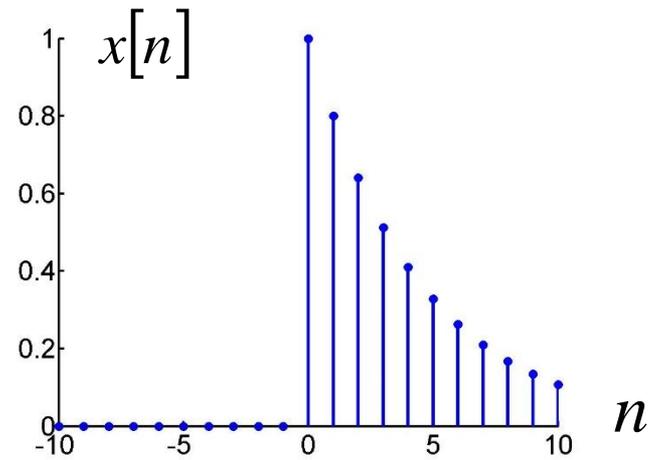
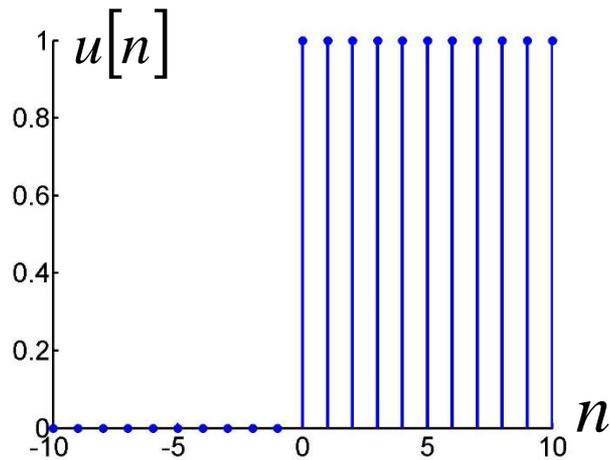
$$y[n] = f_1[n] \otimes f_2[n]$$

- 1) Rappresentare graficamente le due funzioni f_1 e f_2 in funzione della variabile k , indice della sommatoria ($f_1[k], f_2[k]$)
- 2) Ribaltare una delle due funzioni (ad esempio $f_2[k]$) attorno all'asse delle ordinate, ottenendo così $f_2[-k]$.
- 3) Traslare la funzione ribaltata di una quantità n , pari cioè al valore in corrispondenza al quale si desidera calcolare $y[n]$. La traslazione è verso destra se $n > 0$, verso sinistra se $n < 0$. In questo modo si ottiene la rappresentazione grafica di $f_2[n-k]$.
- 4) Per ogni k moltiplicare tra loro i valori delle due funzioni così ottenute ($f_1[k], f_2[n-k]$) e sommare tutti i prodotti. Dai due grafici sarà facile determinare i limiti della sommatoria su k .

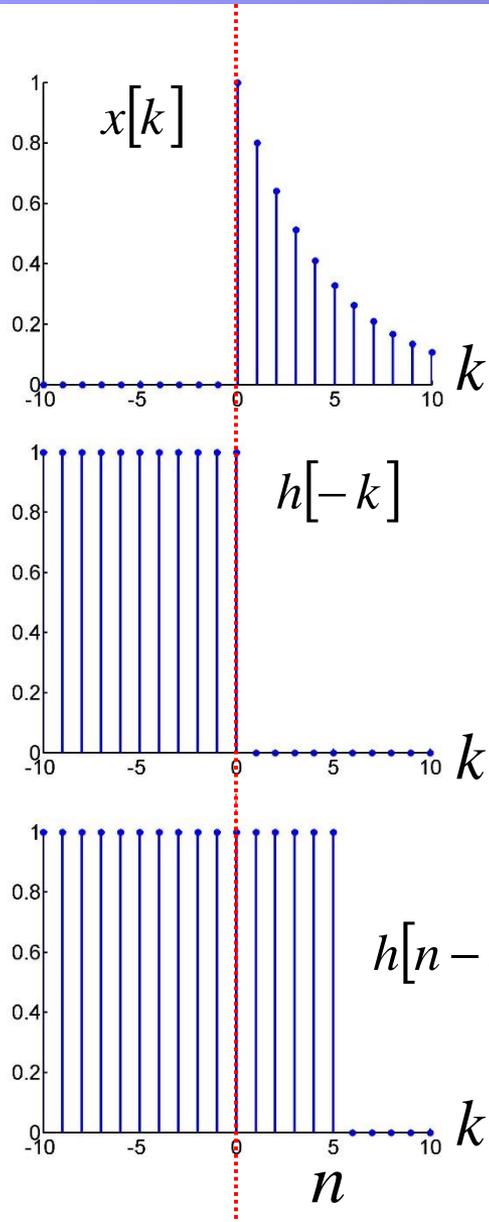


Esempio

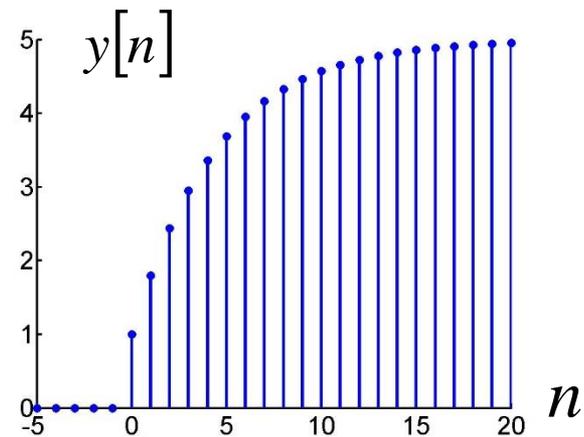
$$\text{Sia } h[n] = u[n] \quad \text{e} \quad x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$$



Esempio



$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{per } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{(n+1)}}{1 - \frac{4}{5}} & \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$



- Matlab opera con segnali di durata finita.
- Matlab opera con indici interi non negativi.
- Consideriamo i valori del segnale, $x[n]$, per $0 \leq n \leq N-1$ e i valori della risposta impulsiva, $h[n]$ per $0 \leq n \leq M-1$.
- Se utilizziamo l'istruzione Matlab

$$y = \text{conv}(x, h);$$

otteniamo un vettore di lunghezza $L = N + M - 1$.

- Se N e M sono la lunghezza effettiva massima di $x[n]$ e di $h[n]$, L è la lunghezza massima di $y[n]$.
- Se invece N e M sono ottenuti troncando due sequenze di durata infinita, i valori validi dell'uscita sono $L_1 = \min(N, M)$.



Somma di convoluzione mediante Matlab (S1)

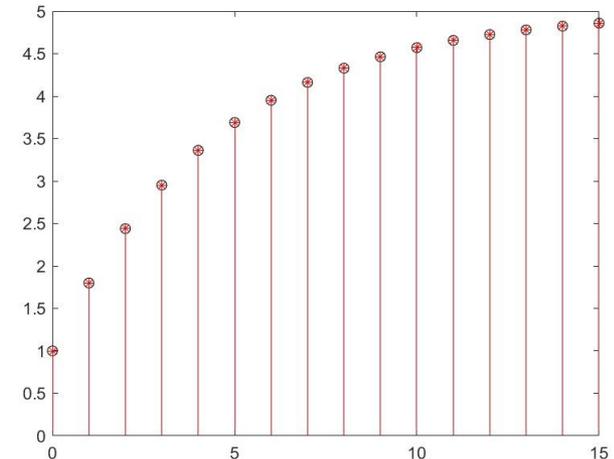
- $Sia\ h[n] = u[n]\quad e\ x[n] = (q)^n u[n]$

- In questo caso x e h sono di durata infinita.

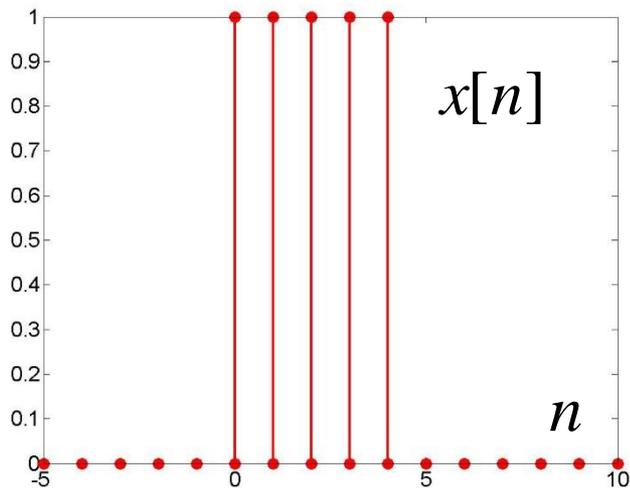
Per poter utilizzare il Matlab, tronchiamo i due segnali, assegnando a N e M due valori finiti. In questo modo visualizzeremo la risposta nell'intervallo $[0, \min(N-1, M-1)]$ (solo in questo intervallo entrambi le sequenze hanno il valore corretto).

- esempio

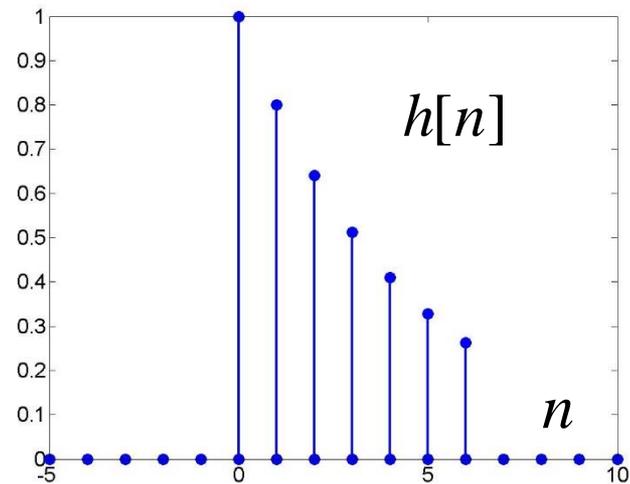
```
clear; %puliamo la memoria
N=16; %valor massimo definizione x e h
q=4/5;
nx=0:N-1; % intervallo valori di ingr
x=ones(1,N);
h=q.^nx;
y=conv(x,h);
L=N; %valori visualizzati
ny=0:L-1; % intervallo visualizzazio
stem(ny,y(1:L),'ko'); %gli indici pos
hold on;
stem(ny,(1-q.^(ny+1))/(1-q), 'r*');
hold off;
```



Esempio



$$x[n] = u[n] - u[n - 5]$$

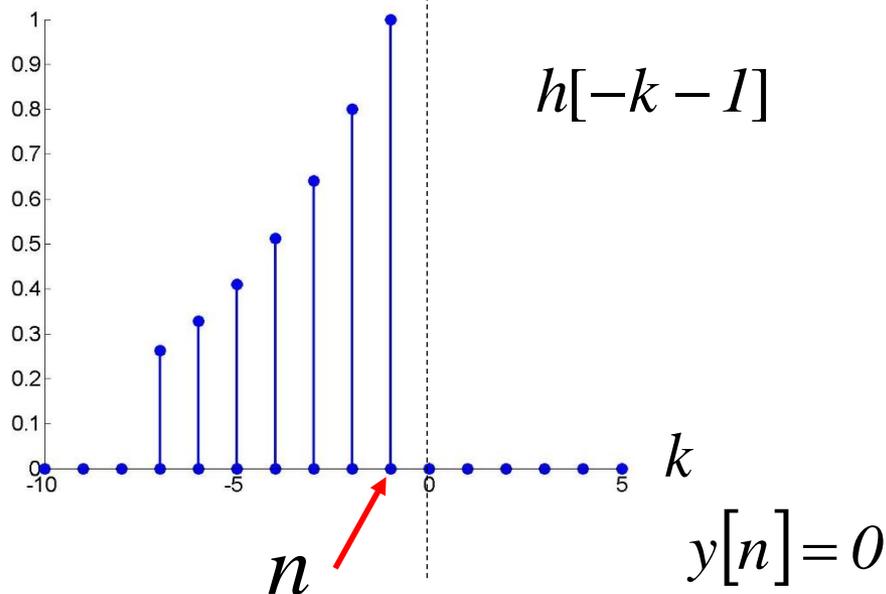
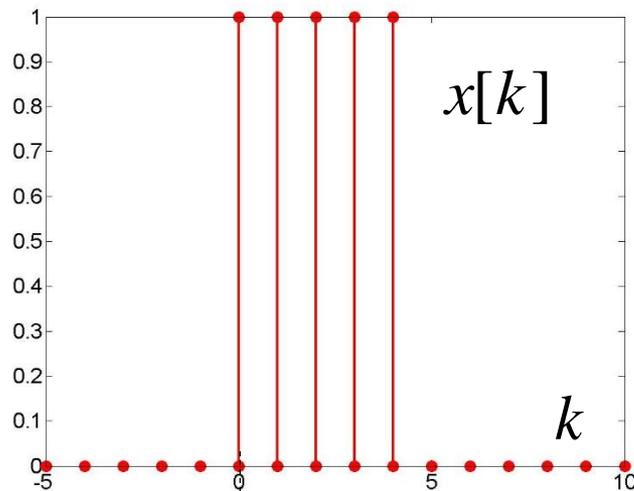


$$h[n] = \alpha^n \{u[n] - u[n - 7]\}$$

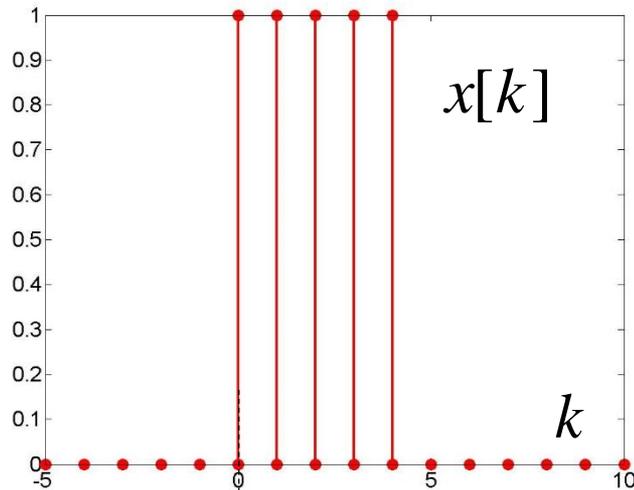


Esempio

$$n < 0$$
$$(n = -1)$$



Esempio



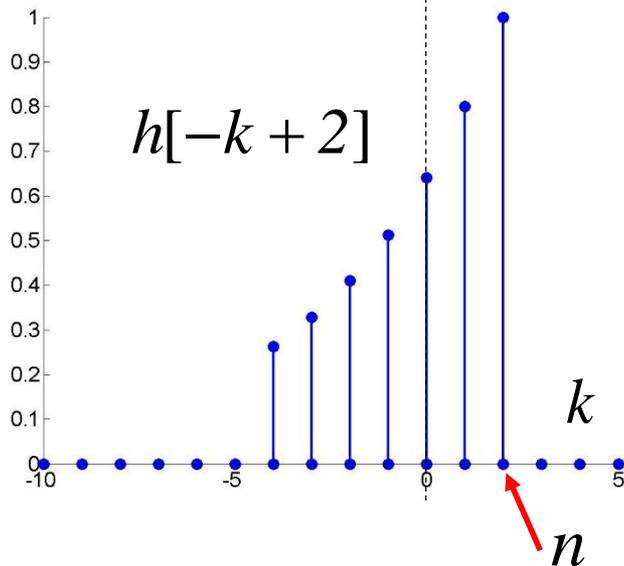
$$0 \leq n \leq 4$$

$$(n = 2)$$

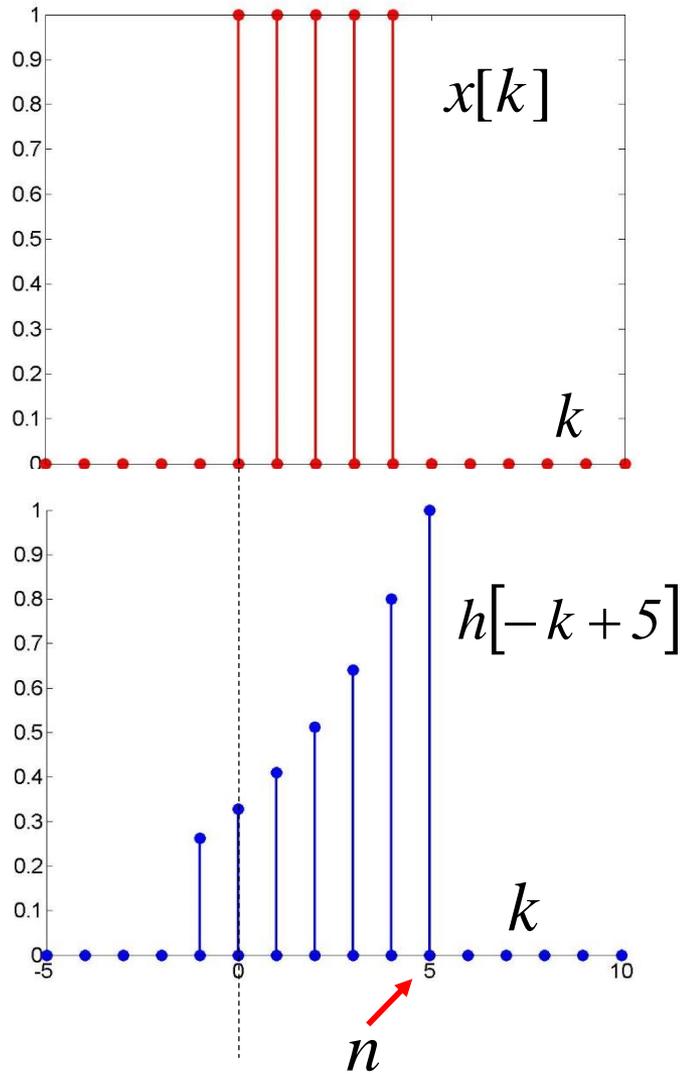
$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{(-k+n)}$$

$$= \sum_{m=0}^n \alpha^m \quad (m = n - k)$$

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$



Esempio



$$4 < n \leq 6$$

$$(n = 5)$$

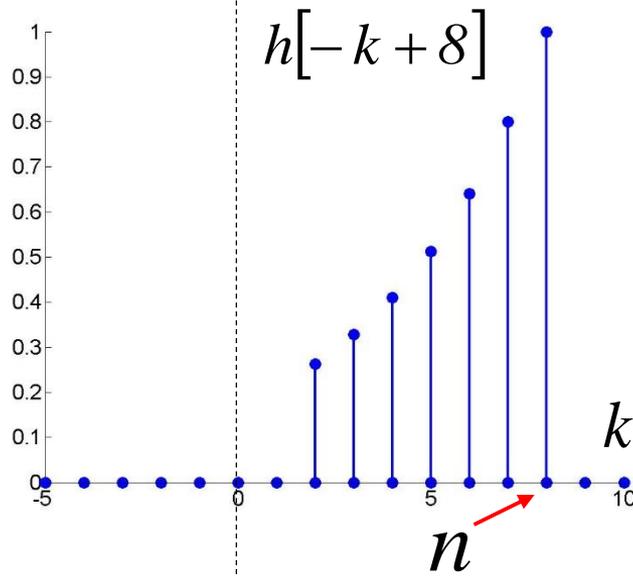
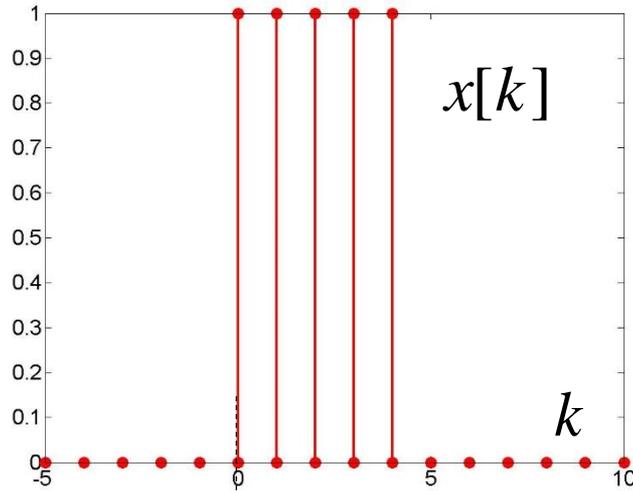
$$y[n] = \sum_{k=0}^4 \alpha^{(-k+n)}$$

$$= \alpha^n \sum_{k=0}^4 \alpha^{-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

$$y[n] = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}}$$



Esempio



$$6 < n \leq 10$$

$$(n = 8)$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{(-k+n)}$$

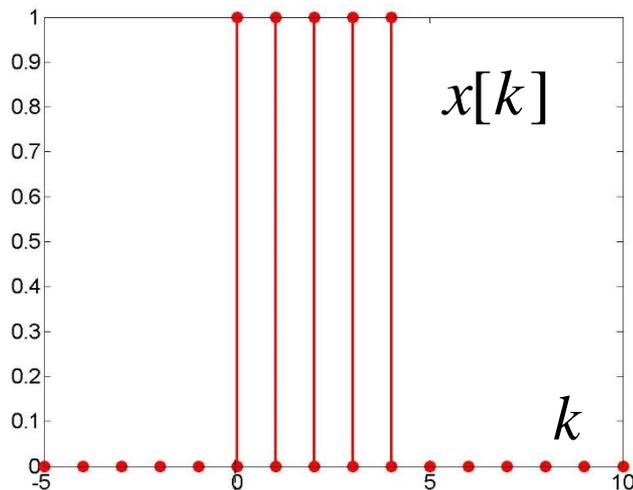
$$m = k - n + 6$$

$$= \sum_{m=0}^{10-n} \alpha^{6-m} = \alpha^6 \sum_{m=0}^{10-n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m$$

$$y[n] = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}}$$

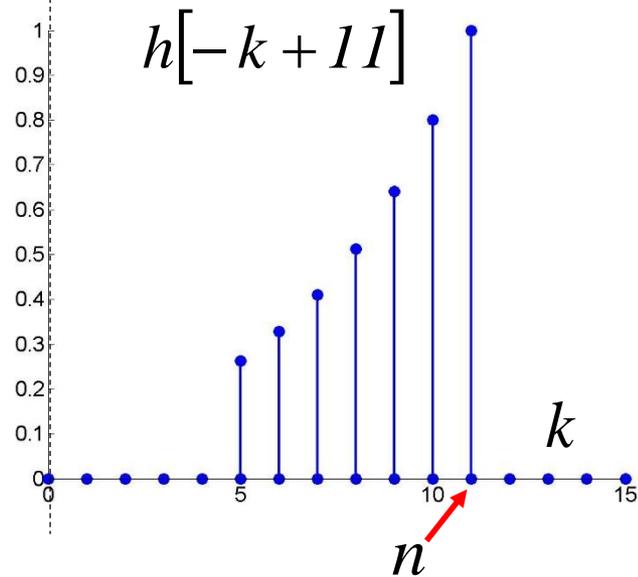


Esempio



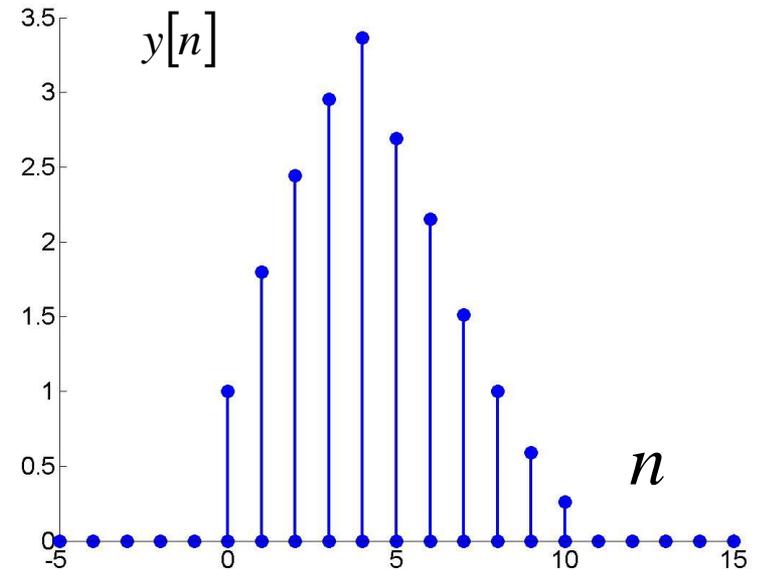
$$n > 10$$
$$(n = 11)$$

$$y[n] = 0$$



Esempio

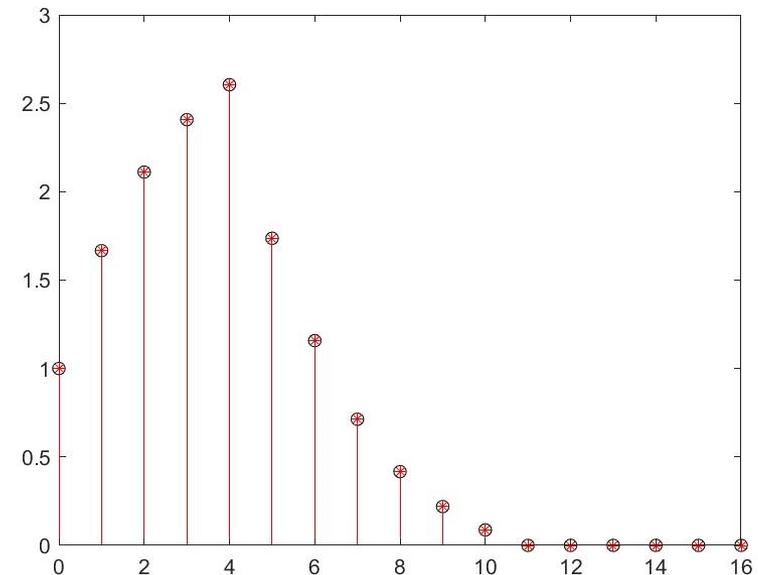
$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 0 \leq n \leq 4 \\ \alpha^{n+1} \frac{\alpha^{-5} - 1}{1 - \alpha} & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha} & 6 < n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$



Somma di convoluzione mediante Matlab (S2)

- $x[n] = u[n] - u[n-5]$ $h[n] = \alpha^n \{u[n] - u[n-7]\}$
- In questo caso le due sequenze sono di durata finita $N=5$ e $M=7$. La lunghezza dell'uscita è $L=11$.

```
clear; %puliamo la memoria
Nt=9; N=5; M=7; L=N+M-1; %N<M<L
L1=2*Nt-1;%lunghezza massima y
alfa=2/3;
nx=0:Nt-1;
x=zeros(1,Nt); %segnale
x(nx<N)=1;
h=zeros(1,Nt);
h(nx<M)=alfa.^nx(nx<M);%filtro
y=conv(x,h); %risposta
ny=0:L1-1; % visualizzazione
stem(ny,y(1:L1),'ko');
hold on;
yt=zeros(1,length(ny)); %risposta teorica
yt(ny<N)=(1-alfa.^(ny(ny<N)+1))/(1-alfa);
yt(ny>=N&ny<M)=alfa.^(ny(ny>=N&ny<M)+1)*(alfa^-N-1)/(1-alfa);
yt(ny>=M&ny<L)=(alfa.^(ny(ny>=M&ny<L)-N+1)-alfa^M)/(1-alfa);
stem(ny,yt,'r*'); hold off;
```



1ª Ipotesi: sistema lineare

Ricordiamo la proprietà della "funzione" impulso:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Sia $h(t, \tau)$ la risposta di un sistema lineare nell'istante t a un impulso ideale applicato nell'istante τ .

Per la linearità:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau$$



Esempio

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t - \tau)$ con il segnale $\cos(2\pi\tau t)u(t - \tau)$. Ricavare la sua risposta al gradino unitario $u(t)$.

Per questo sistema:

$$h(t, \tau) = \cos(2\pi\tau t)u(t - \tau)$$

$$\text{Pertanto } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t, \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\cos(2\pi\tau t)u(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t \cos(2\pi\tau t)d\tau = \frac{\sin 2\pi t^2}{2\pi t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$



II^a ipotesi: sistema lineare e tempo-invariante

In questo caso

$$h(t, \tau) = h(t - \tau)$$

essendo $h(t)$ la risposta del sistema all'impulso ideale $\delta(t)$

Pertanto

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) \otimes h(t)$$

Il segnale all'uscita di un sistema LTI è dato dalla convoluzione del segnale di ingresso con la sua risposta impulsiva



Calcolo **grafico** della convoluzione

Per eseguire correttamente il calcolo della convoluzione, è **opportuno** procedere attraverso i seguenti passi:

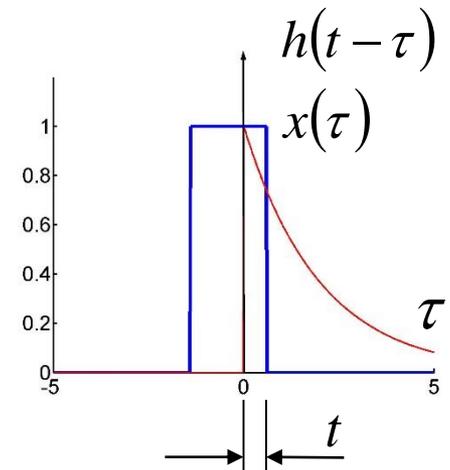
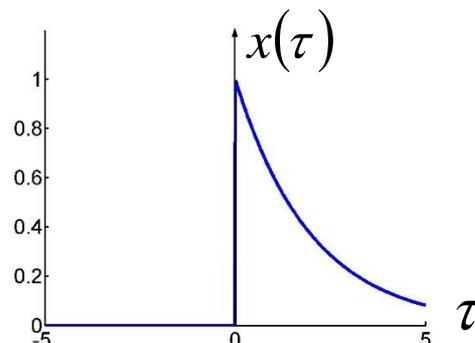
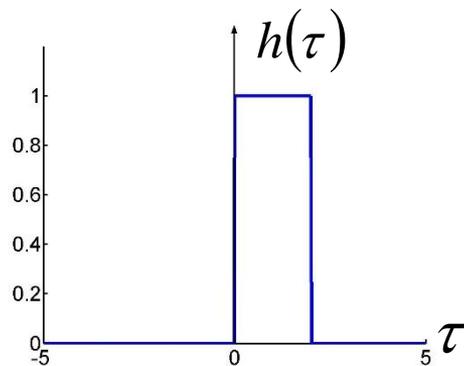
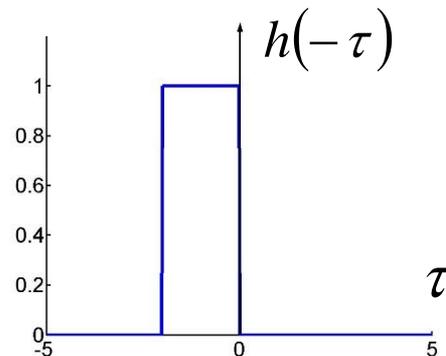
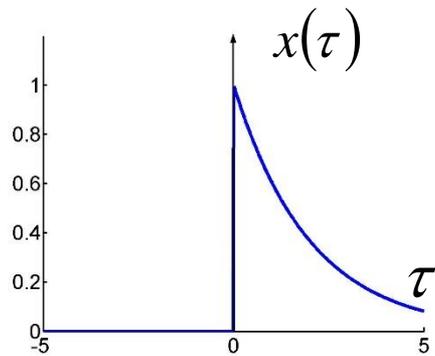
$$y(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)$$

- 1) Rappresentare graficamente le due funzioni $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ in funzione della variabile di integrazione (τ)
- 2) Ribaltare una delle due funzioni (ad esempio $f_2(\tau)$) attorno all'asse delle ordinate, ottenendo così $f_2(-\tau)$.
- 3) Traslare la funzione ribaltata di una quantità t , pari cioè al valore in corrispondenza al quale si desidera calcolare $y(t)$. La traslazione è verso destra se $t > 0$, verso sinistra se $t < 0$. In questo modo si ottiene la rappresentazione grafica di $f_2(t - \tau)$.
- 4) Moltiplicare tra loro le due funzioni così ottenute ($f_1(\tau) f_2(t - \tau)$) e integrare la funzione corrispondente a questo prodotto. Dai due grafici sarà facile determinare i limiti di integrazione.



Esempio I

Sia $h(t) = \text{rect}\left[\frac{t-1}{2}\right]$ e $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t)$



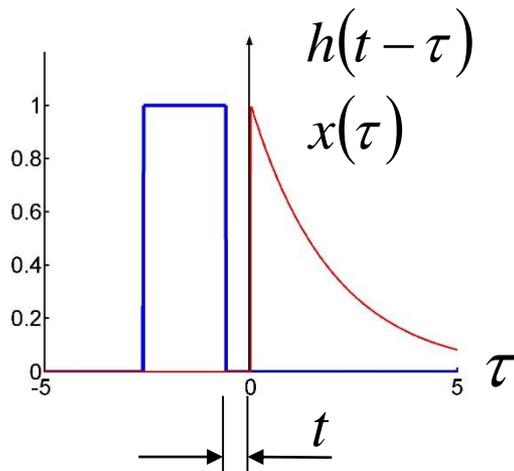
Passo 3

Passo 1

Passo 2

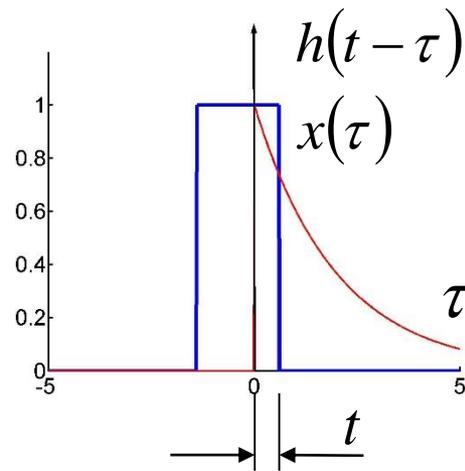
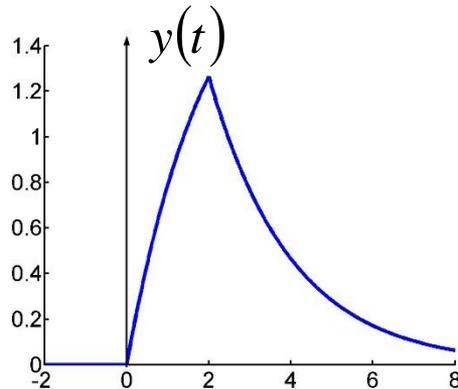


Esempio (continua)



$$t < 0$$

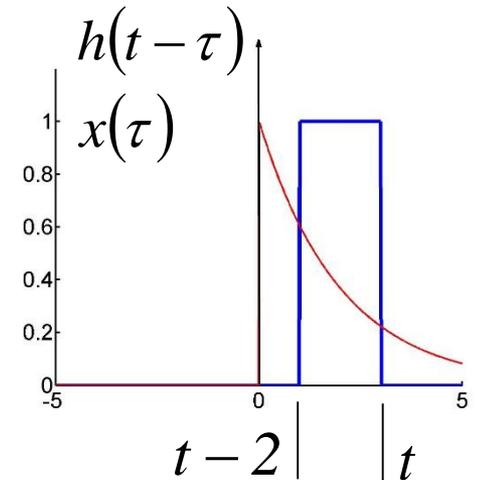
$$y(t) = 0$$



$$0 < t < 2$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau$$

$$= 2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t} \right)$$



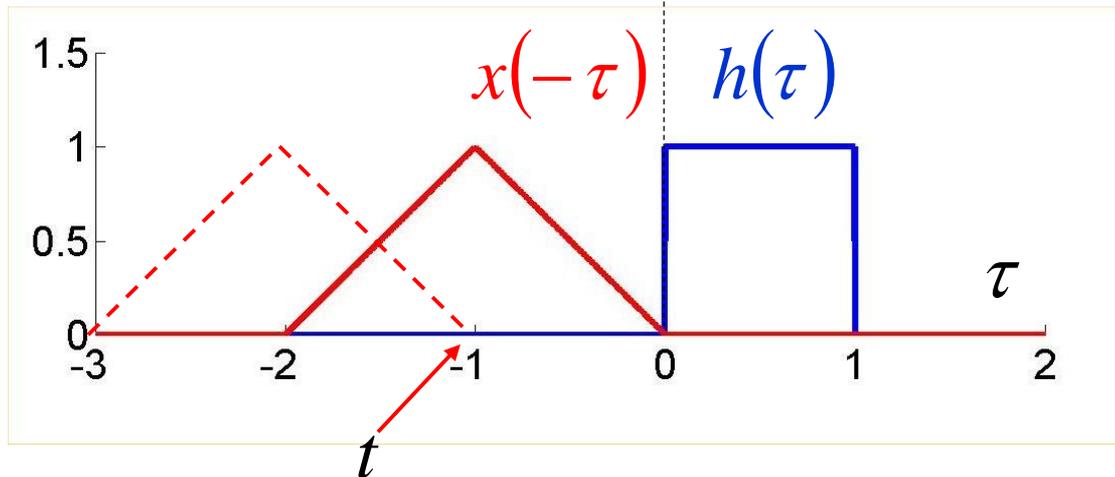
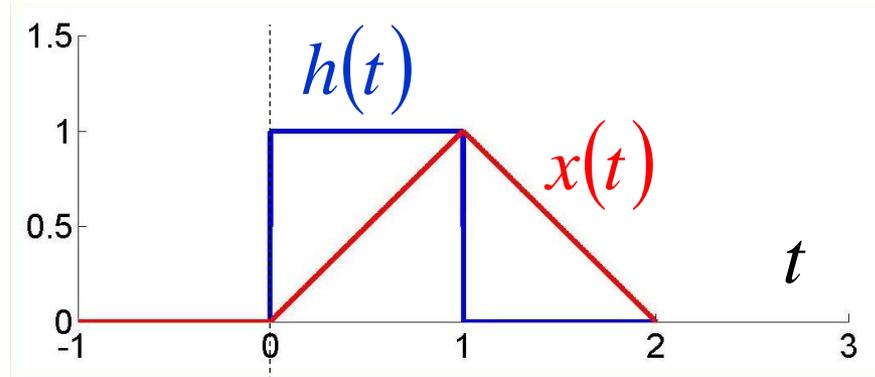
$$t > 2$$

$$y(t) = \int_{t-2}^t e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}t} (e - 1)$$



Esempio II

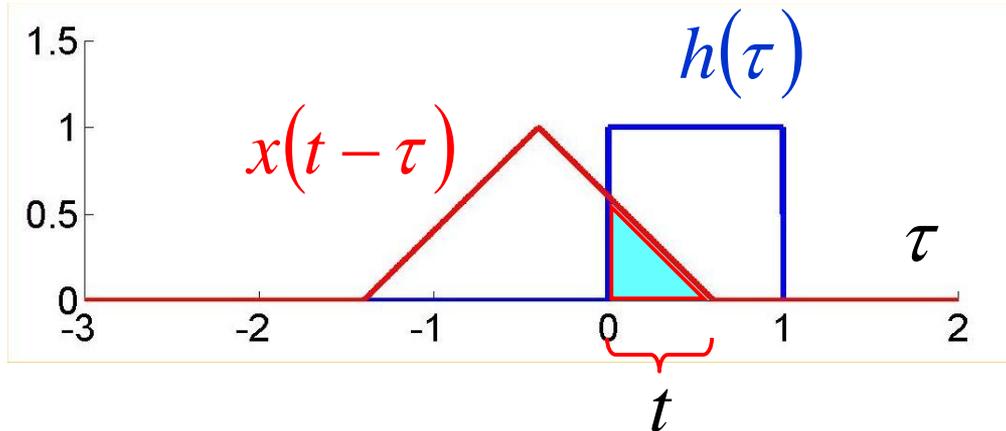


$$t < 0$$

$$y(t) = 0$$

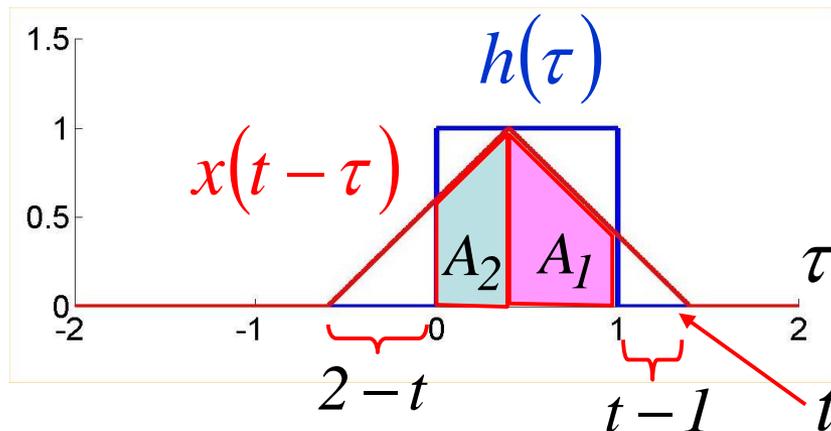


Esempio II (continua)



$$0 < t < 1$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2$$



$$1 < t < 2$$

$$y(t) = A_1 + A_2$$

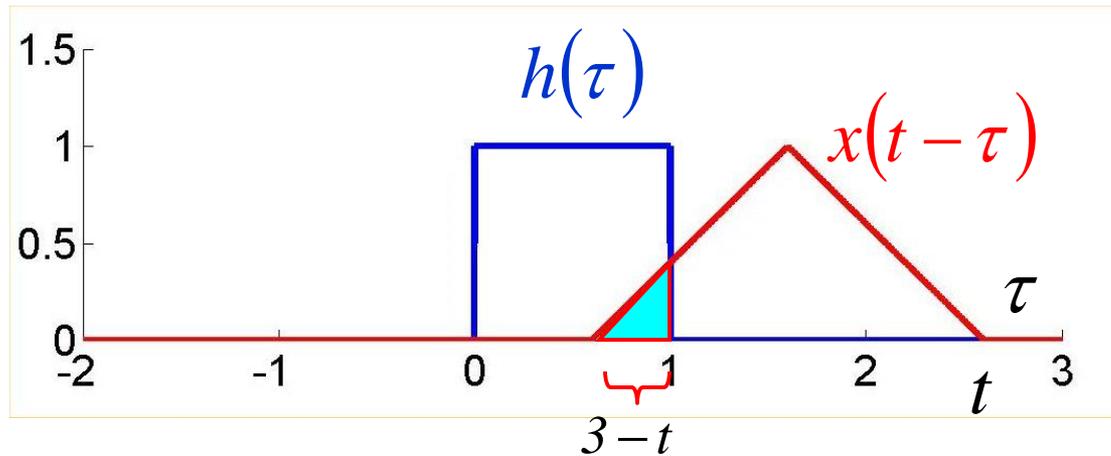
$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2 \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2-t)^2 \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t^2 + t \right) + \left(\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}t^2 + 2t \right)$$

$$= -t^2 + 3t - \frac{3}{2}$$



Esempio II (continua)



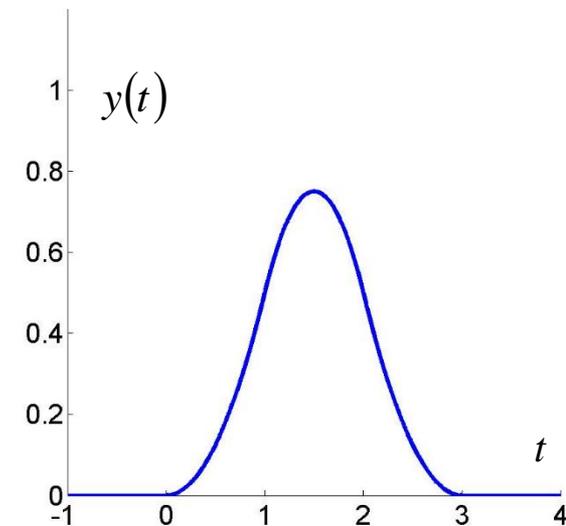
$$2 < t < 3$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(3-t)^2$$

$$t > 3$$

$$y(t) = 0$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2} & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$



Proprietà della convoluzione

Attenzione! : La somma di convoluzione ha le stesse proprietà dell'integrale di convoluzione

commutativa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{posto} \quad \alpha = t - \tau \quad \tau = t - \alpha \quad d\tau = -d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \Rightarrow x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t)$$



La risposta a $x(t)$ di un sistema con risposta impulsiva $h(t)$ è uguale a quella che un sistema, avente risposta impulsiva $x(t)$, dà quando al suo ingresso c'è un segnale pari a $h(t)$.



associativa

$$\underbrace{[x(t) \otimes h_1(t)]}_{g(t)} \otimes h_2(t) = x(t) \otimes \underbrace{[h_1(t) \otimes h_2(t)]}_{p(t)}$$

$$\underbrace{[x(t) \otimes h_1(t)]}_{g(t)} \otimes h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h_1(\tau - \alpha) d\alpha \right) h_2(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau - \alpha) h_2(t - \tau) d\tau \right) d\alpha$$

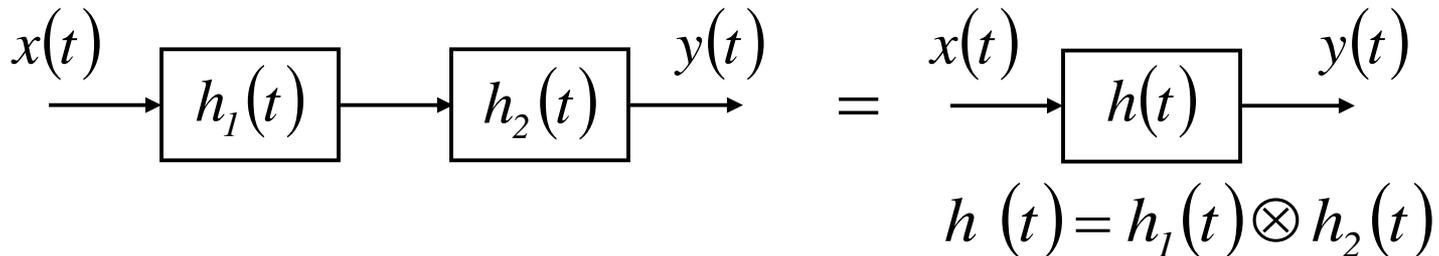
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\beta) h_2(t - \alpha - \beta) d\beta \right)}_{p(t - \alpha)} d\alpha = x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)]$$



Proprietà associativa

$$[x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) = x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)]$$

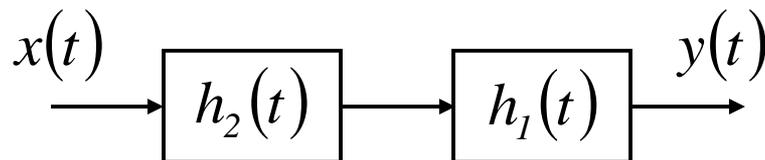
Due sistemi LTI in cascata...



...equivalgono ad un sistema LTI con risposta impulsiva pari alla convoluzione delle risposte impulsive dei due sistemi

Per la proprietà commutativa

$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t) = h_2(t) \otimes h_1(t)$$



In una cascata di sistemi LTI l'ordine dei sistemi non influenza l'uscita del sistema complessivo

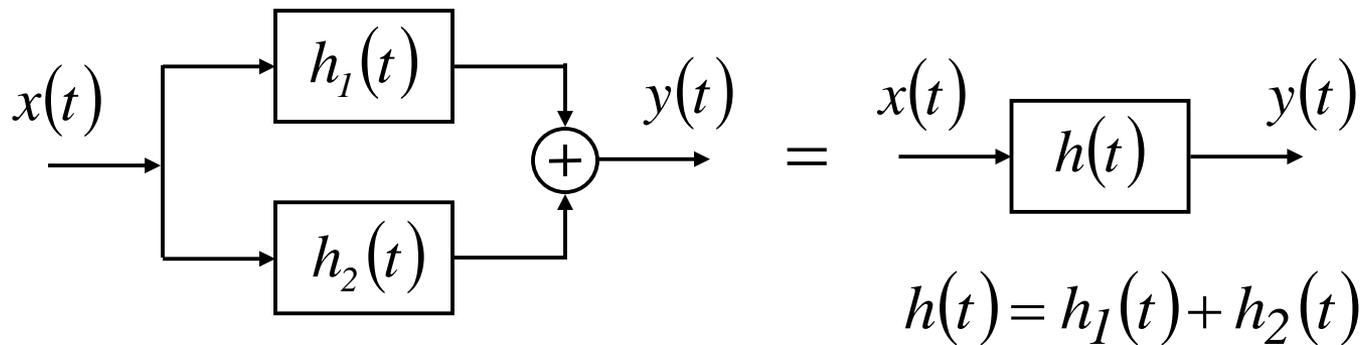


distributiva

$$x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) \otimes h_1(t)] + [x(t) \otimes h_2(t)]$$

Dimostrazione ovvia (*deriva dalla linearità dell'integrale*)

Significato fisico



Due sistemi LTI in parallelo equivalgono ad un unico sistema LTI, con risposta impulsiva pari alla somma delle risposte impulsive dei due sistemi



1) Assenza di memoria

Dovrà essere:

$$\left. \begin{array}{l} h(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0 \\ h[n] = 0 \quad \text{per } n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h(t) = K\delta(t) \\ h[n] = K\delta[n] \end{array} \right.$$

2) Causalità

$h(t) = 0$ per $t < 0$ Se all'ingresso c'è il segnale $x(t)$ ($x[n]$) :
 $h[n] = 0$ per $n < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \end{array} \right.$$



3) Stabilità

sia $|x[n]| < B$

allora

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

$$\leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad \forall n$$

quindi $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < Q$ (cond. suff.)

sia $|x(t)| < B$

allora

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right|$$

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \quad \forall t$$

quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < Q$ (cond. suff.)



3) Stabilità

La condizione vista è anche necessaria:

$$\text{sia } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

Si scelga $x[n]$ nel seguente modo:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{se } h[-n] = 0 \\ \frac{h[-n]}{|h[-n]|} & \text{se } h[-n] \neq 0 \end{cases}$$

$$|x[n]| \leq 1 \quad \forall n \quad (\text{segnale limitato})$$

$$|y[0]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[0-k] \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \frac{h[k]}{|h[k]|} \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

Pertanto:

Se $h[n]$ non è di modulo sommabile, la risposta a un segnale di ampiezza limitata può essere illimitata.

Analogamente nel caso di segnali e sistemi tempo continuo.



Riassunto

- sistemi tempo-discreto lineari : $h[n, k]$ = risposta all'impulso centrato in $n = k$

$$\text{Risposta a } x[n] : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n, k]$$

- sistemi tempo-discreto LTI: $h[n]$ = risposta all'impulso centrato in $n = 0$

$$\text{Risposta a } x[n] : y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad \text{Somma di convoluzione}$$

- sistemi tempo-continuo lineari : $h(t, \tau)$ = risposta all'impulso centrato in $t = \tau$

$$\text{Risposta a } x(t) : y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

- sistemi tempo-continuo LTI: $h(t)$ = risposta all'impulso centrato in $t = 0$

$$\text{Risposta a } x(t) : y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{Integrale di convoluzione}$$



Proprietà della somma e dell'integrale di convoluzione:

- commutativa
- associativa
- distributiva

Dalla risposta impulsiva di un sistema LTI si possono riconoscere le proprietà di:

- assenza di memoria
- causalità
- stabilità

