

Campionamento di un segnale tempo-continuo



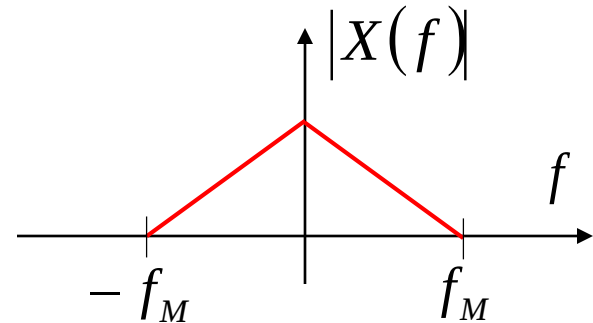
- Segnali a banda limitata
- Campionamento ideale
- Teorema del campionamento
- Conversione da tempo-continuo a tempo-discreto
- Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



Segnali a banda limitata

Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata:

$$X(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_M$$



Es.: segnale telefonico

$$\rightarrow f_M = 3.4 \text{ kHz}$$

segnale musicale in FM

$$\rightarrow f_M = 15 \text{ kHz}$$

segnale video PAL

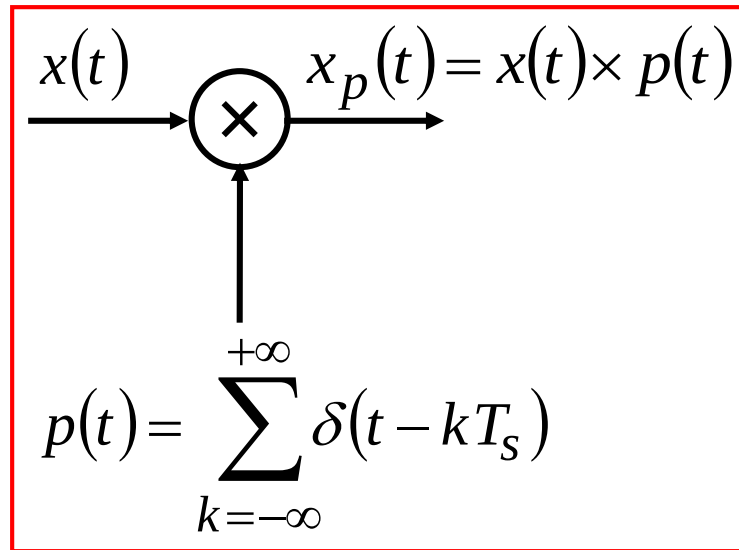
$$\rightarrow f_M = 5 \div 6 \text{ MHz}$$

Nelle applicazioni concrete tutti i segnali sono a banda limitata (o rigorosamente, o praticamente)



Campionamento ideale

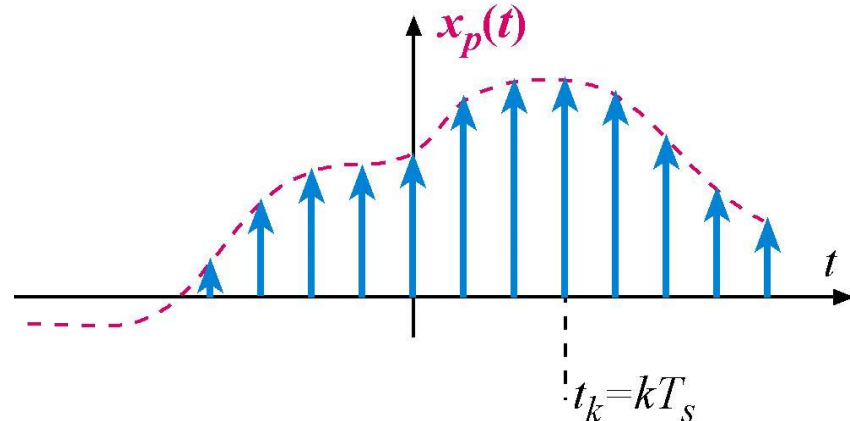
Si consideri l'operazione descritta dal seguente sistema:



$$x_p(t) = x(t) p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Il segnale $x(t)$ risulta **“campionato”** con impulsi ideali



Valutazione dello spettro di $x_p(t)$

$p(t)$ è un segnale periodico:

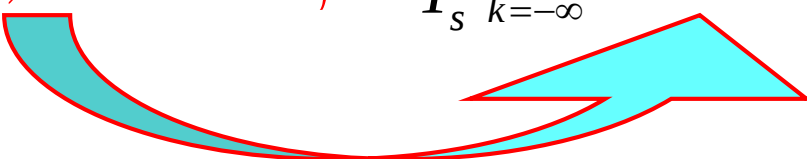
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_s} \right) e^{jk2\pi f_s t} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$



$$x_p(t) = x(t) p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jk2\pi f_s t}$$

Spettro di $x_p(t)$:

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_s)$$

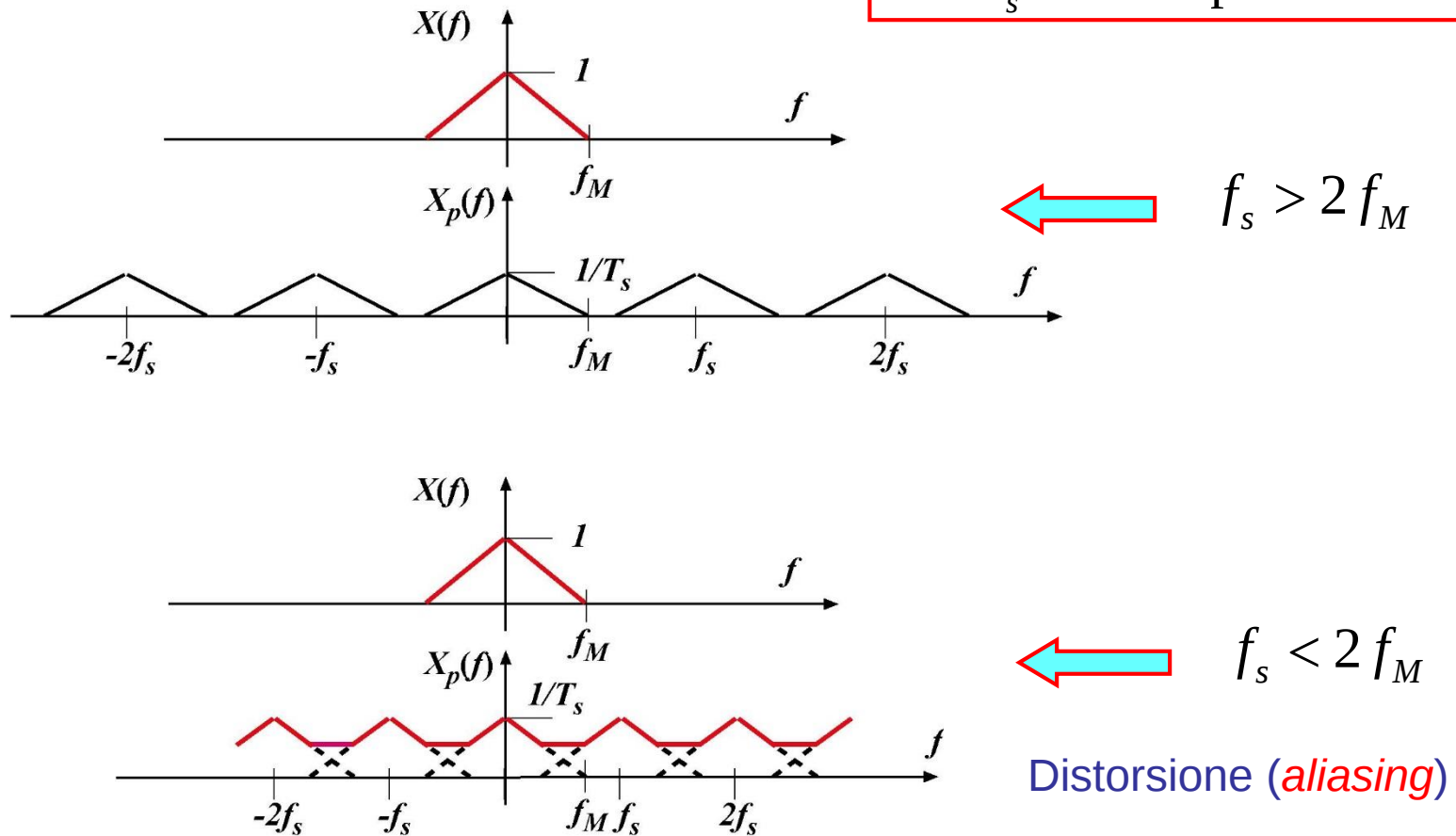




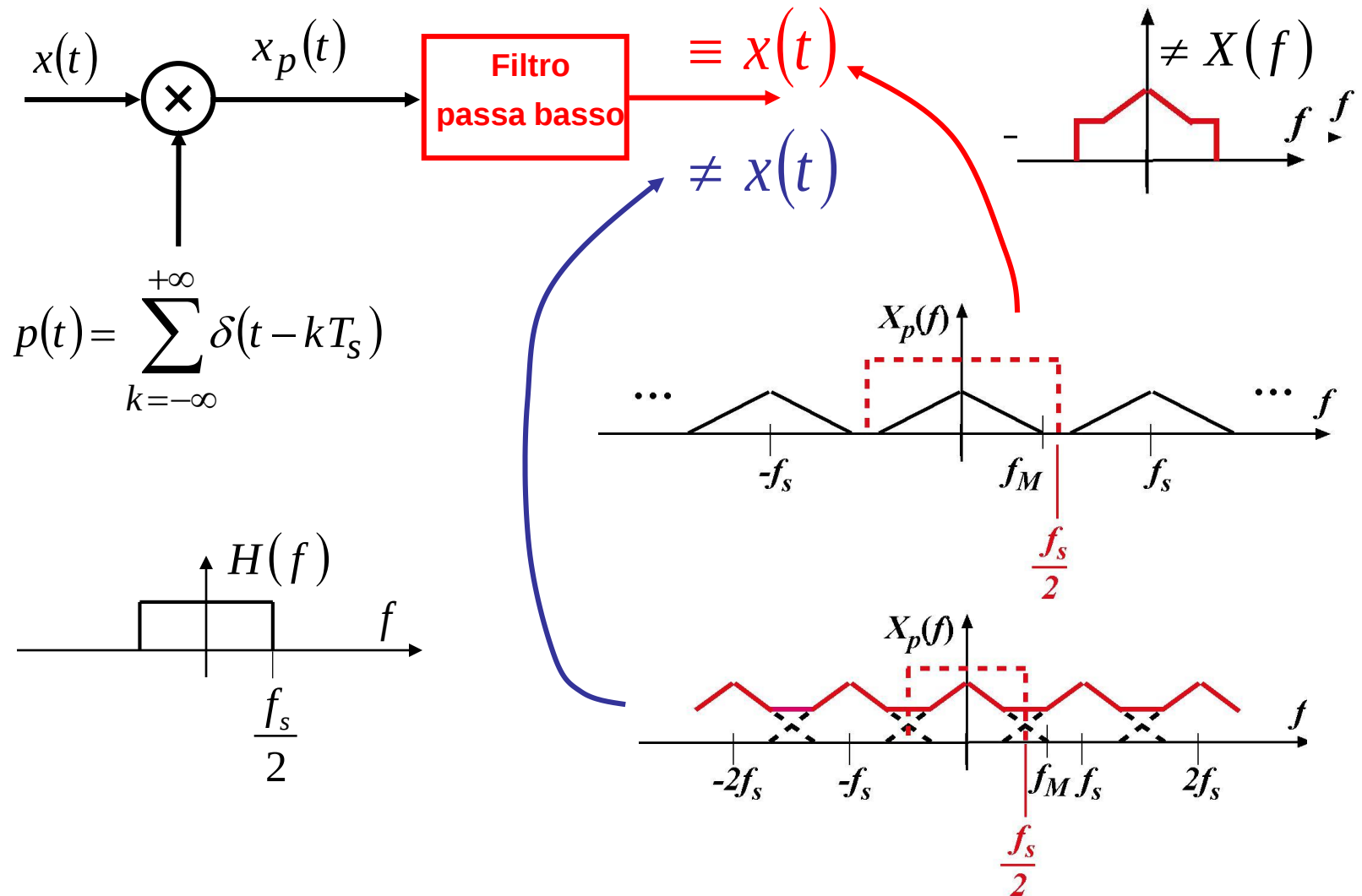
Campionamento ideale

Spettro del segnale
campionato

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \text{frequenza di campionamento}$$



Ricostruzione del segnale



Teorema del campionamento

Un segnale a banda limitata è univocamente determinato dai suoi valori $x(kT_s)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2 f_M$$

La sua **esatta** ricostruzione avviene facendo passare una successione di impulsi ideali pesati da $x(kT_s)$ attraverso un filtro passa basso ideale, avente frequenza di taglio compresa tra

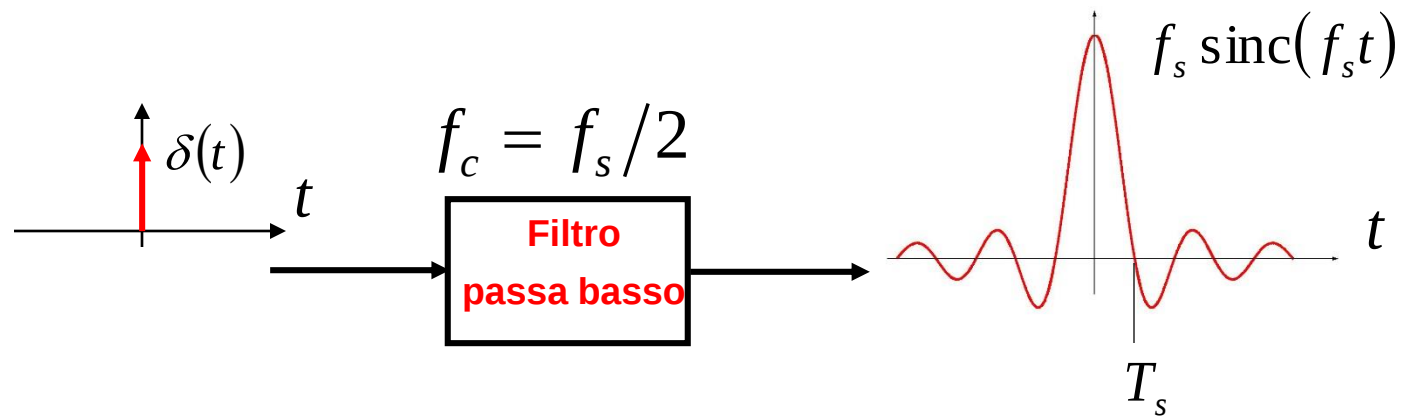
$$f_M \text{ e } (f_s - f_M)$$

Attenzione:

se $f_s < 2 f_M$, non viene ricostruito **il segnale originario**, ma viene ricostruito un **“altro” (alias)** segnale

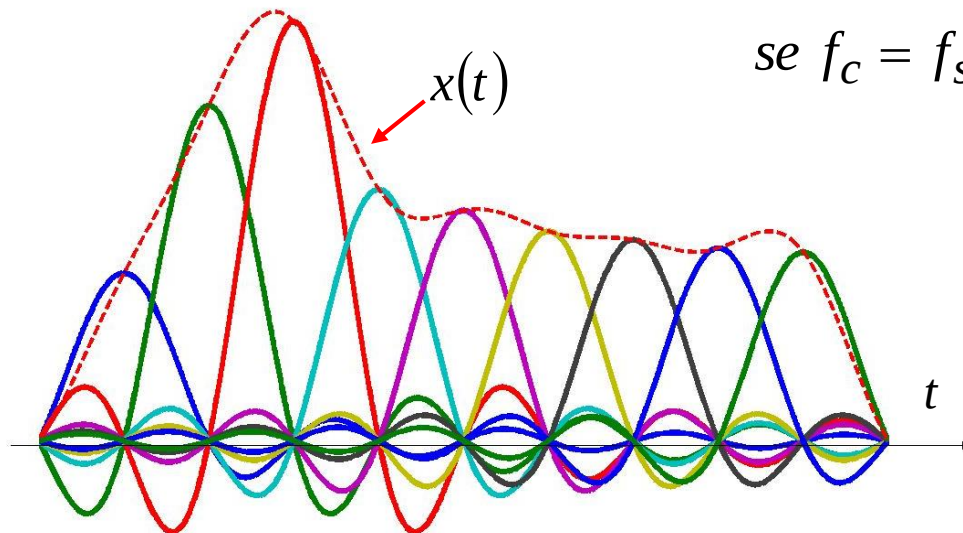
Fenomeno di “aliasing”





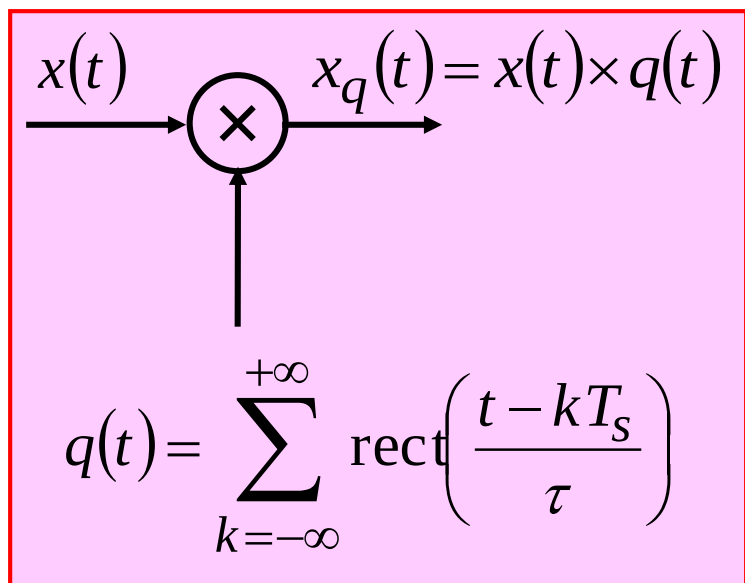
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{sinc}[f_s(t - kT_s)]$$

se $f_c = f_s/2$



Campionamento naturale

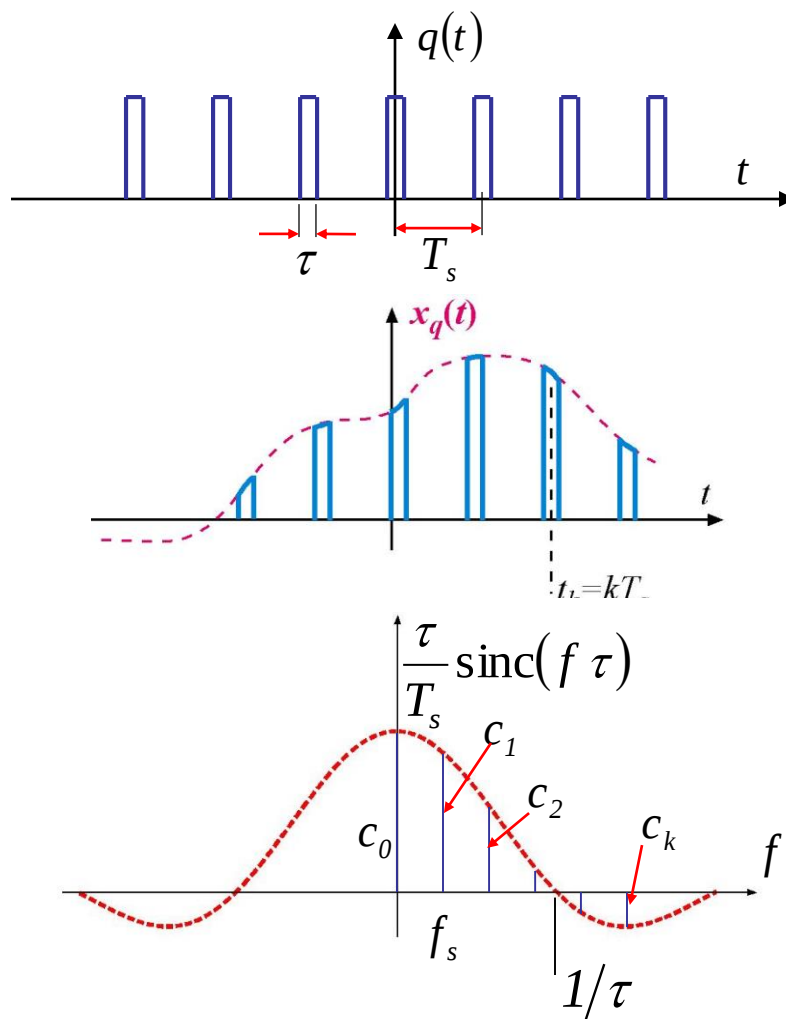
(per studenti volenterosi)



$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_s t}$$

$$c_k = \frac{\tau}{T_s} \text{sinc}(f \tau) \Big|_{f=k \frac{1}{T_s}}$$

Campionamento fatto con impulsi reali di durata τ e ampiezza unitaria



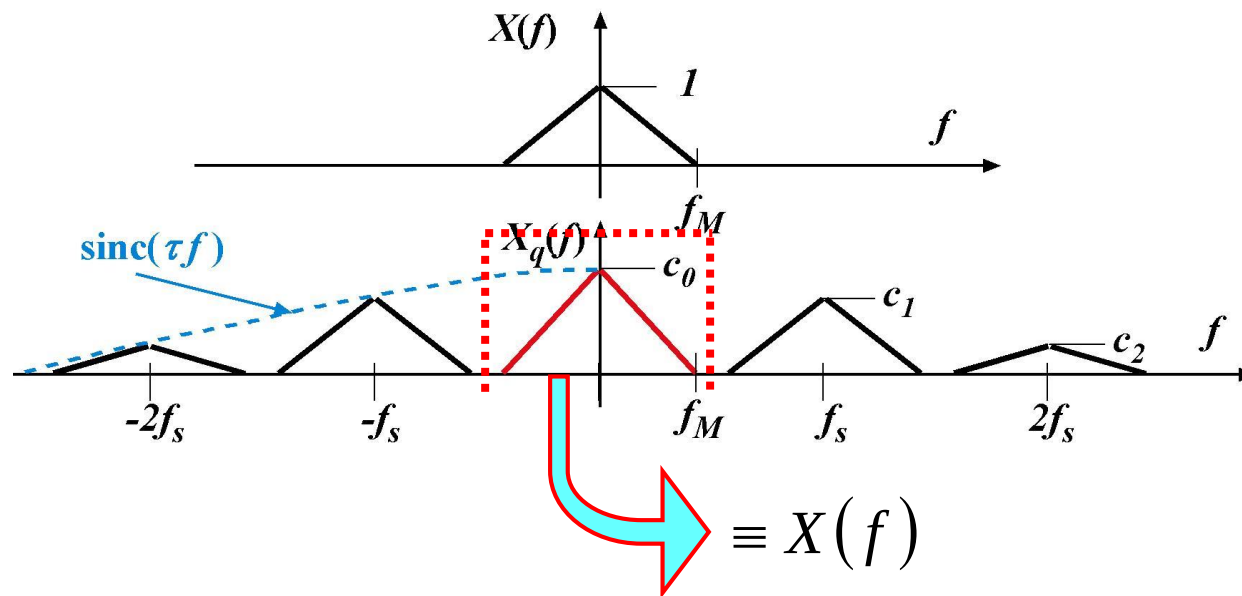
Campionamento naturale

(per studenti volenterosi)

Valutazione dello spettro di $x_q(t)$

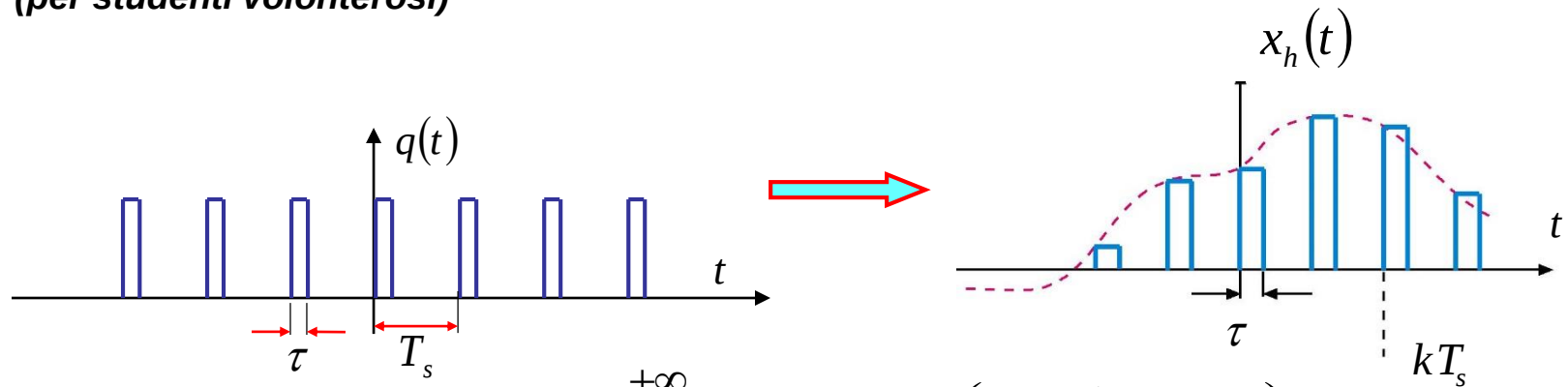
$$x_q(t) = x(t) \times q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x(t) e^{j2k\pi f_s t}$$

$$X_q(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathcal{F} \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k X(f - k f_s)$$



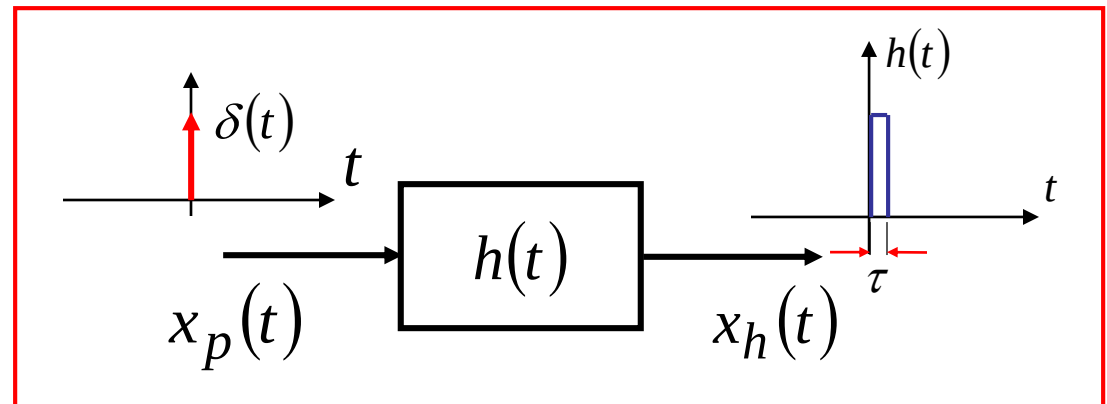
Campionamento a tenuta

(per studenti volenterosi)



$$x_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{rect}\left(\frac{t - \tau/2 - kT_s}{\tau}\right)$$

$x_h(t)$ può essere
ottenuto così:



Pertanto:

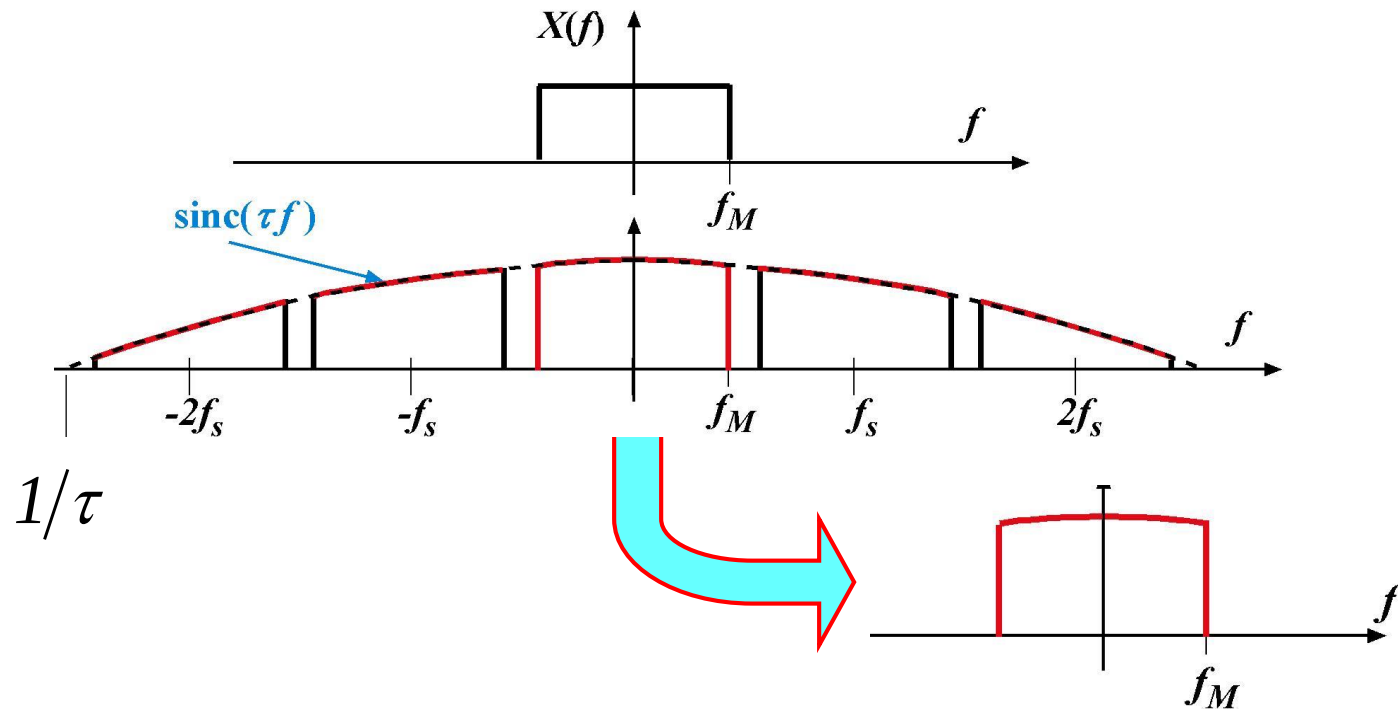
$$X_h(f) = X_p(f)H(f) = X_p(f)\tau \text{sinc}(f \tau)$$



Campionamento a tenuta

(per studenti volenterosi)

Considerazioni sullo spettro



È presente una distorsione,
tanto minore quanto minore è τ

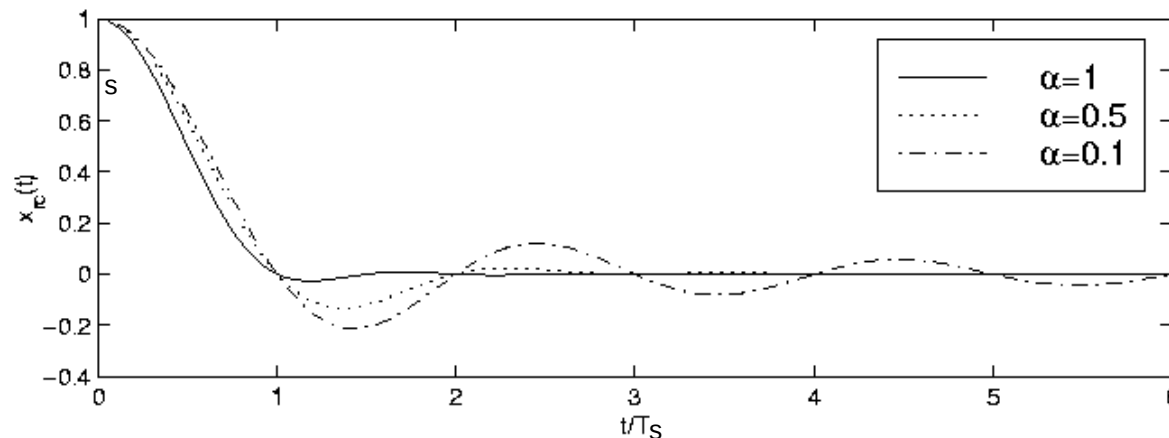


Transizione sagomata di tipo sinusoidale ('coseno rialzato' o '*Raised Cosine*').

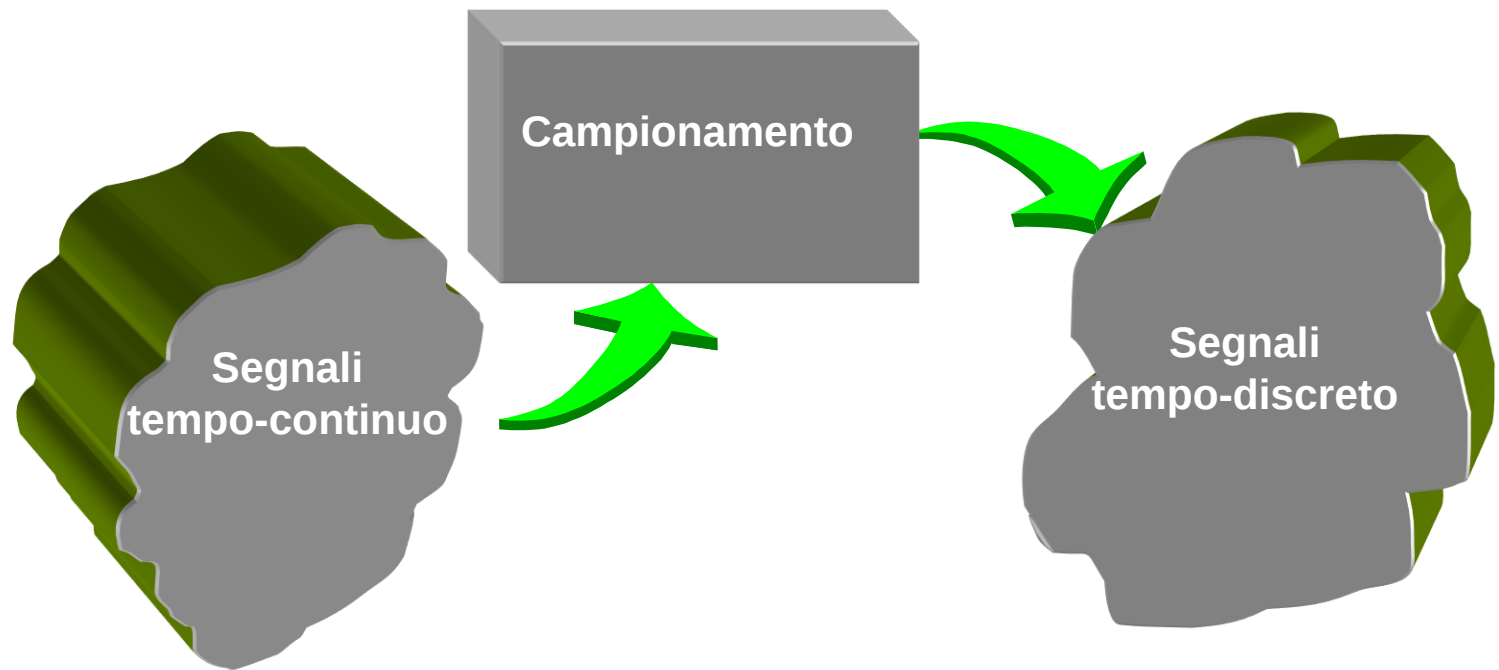
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq (1-\alpha)/2T_s \\ \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{T_s}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right) & (1-\alpha)/2T_s \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T_s \\ 0 & |f| \geq (1+\alpha)/2T_s \end{cases}$$

All'aumentare di α aumenta la banda, ma aumenta anche la rapidità con cui si smorza la risposta impulsiva (e quindi diminuisce l'anticipo necessario). Con $\alpha=0$ riotteniamo la funzione sampling.

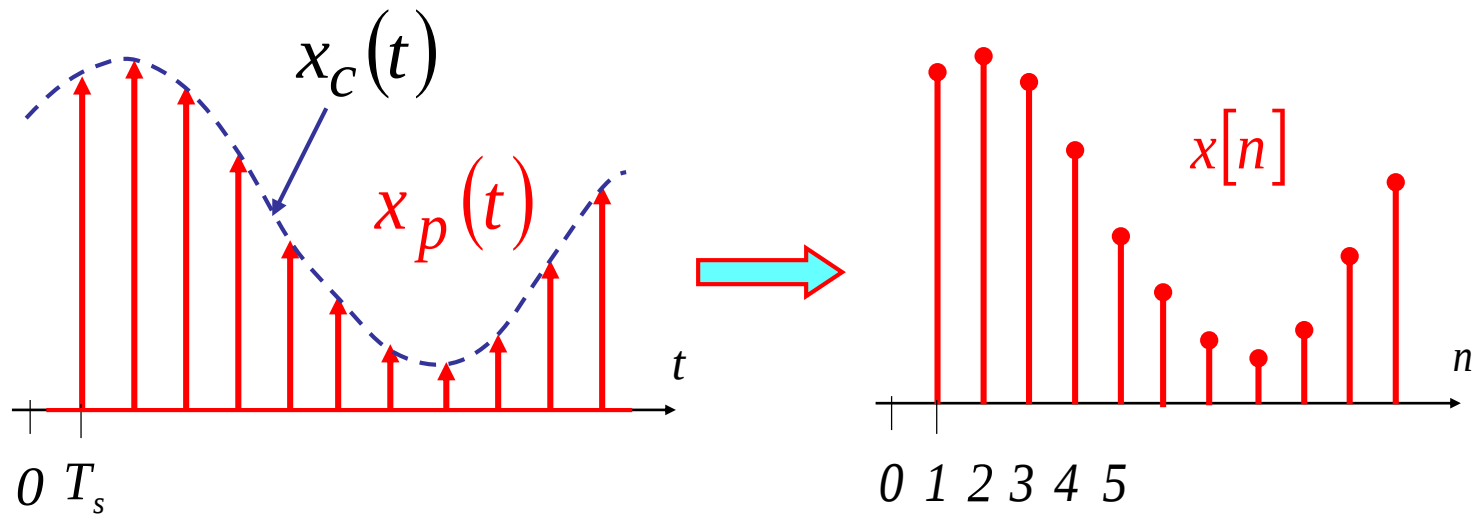
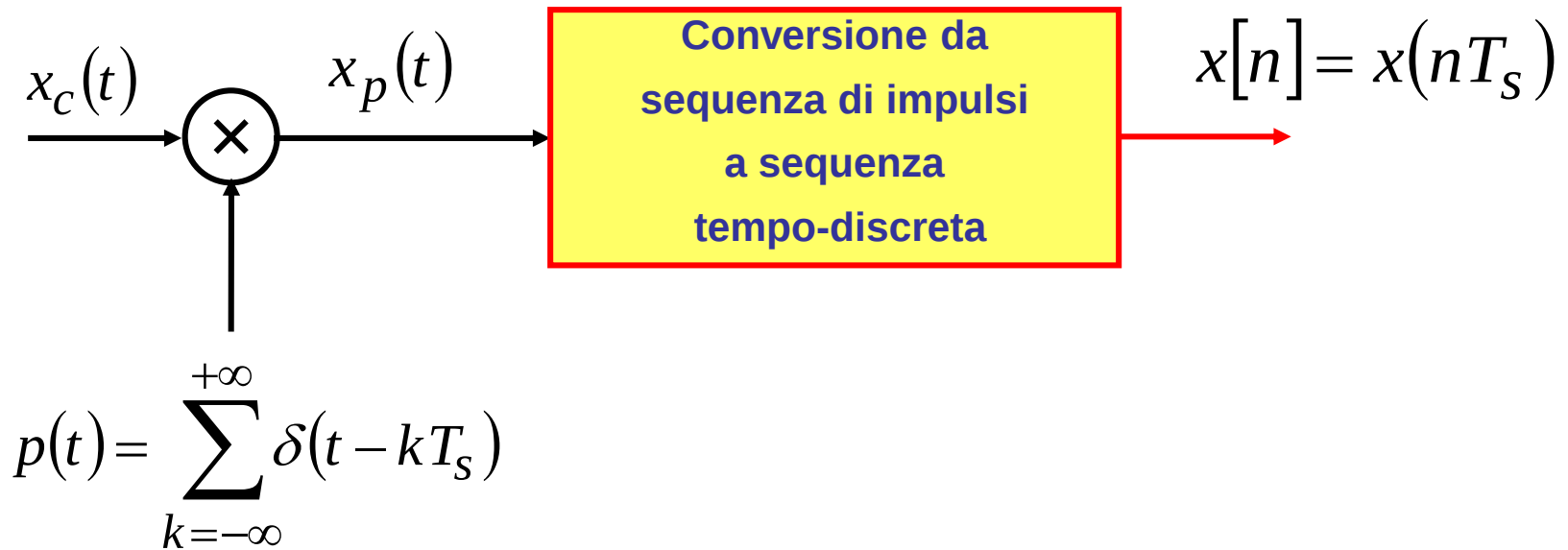
$$h_{RC}(t) = \text{sinc} \left(\frac{t}{T_s} \right) \frac{\cos(\alpha \pi t / T_s)}{1 - (2\alpha t / T_s)^2}$$



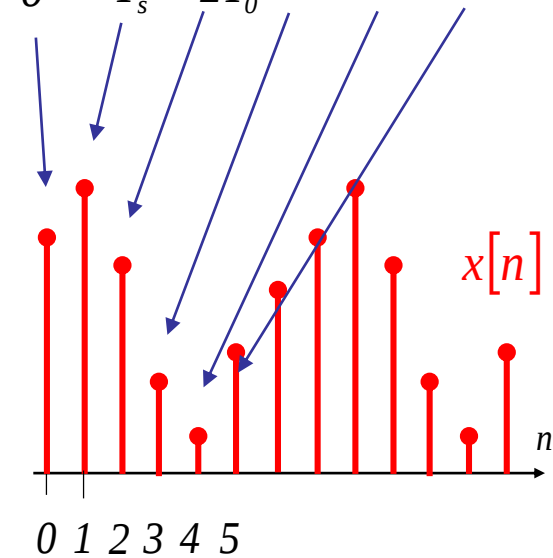
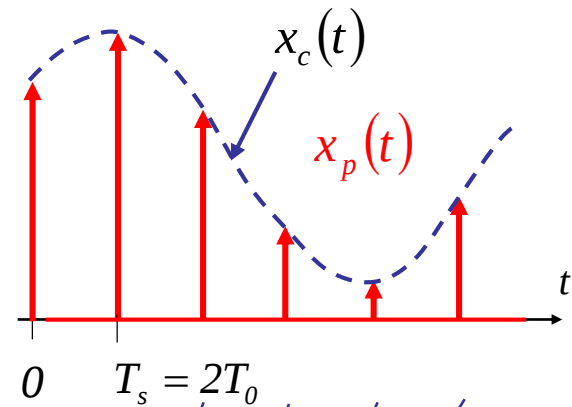
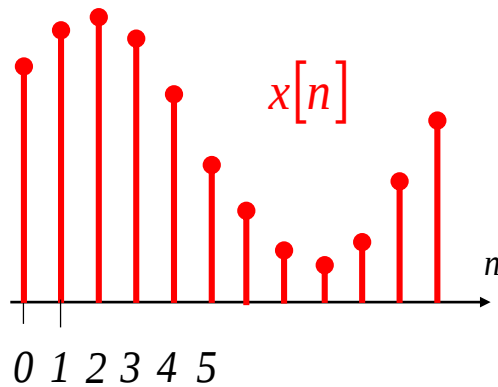
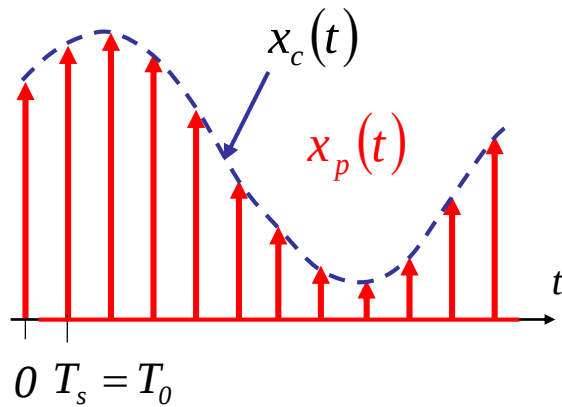
Da tempo-continuo a tempo-discreto



Conversione TC - TD



Conversione TC - TD

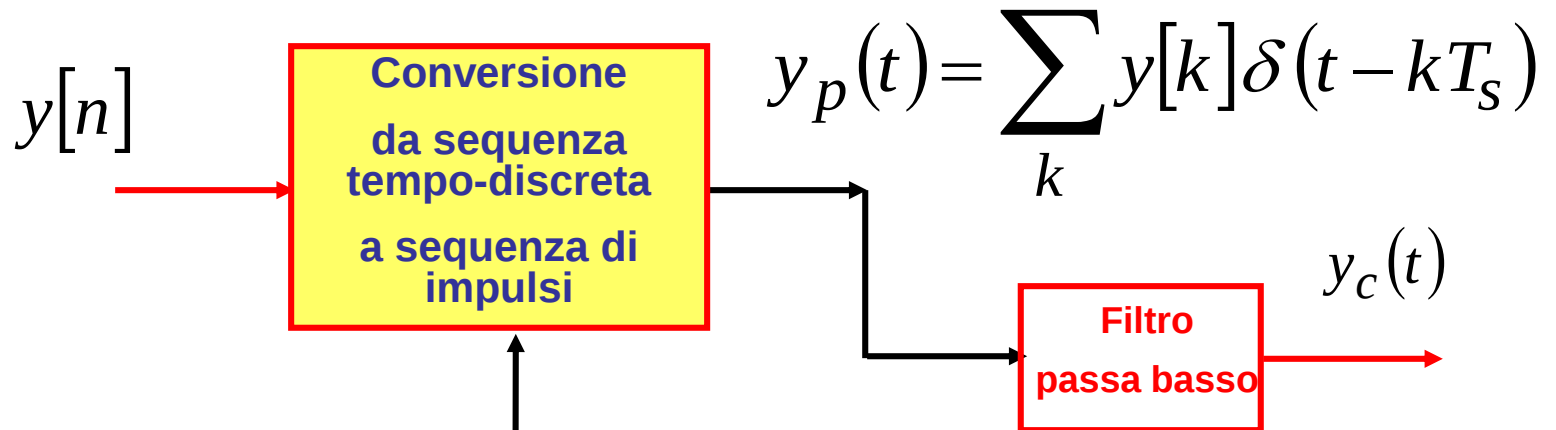


Il segnale tempo-discreto è una sequenza: il concetto di intervallo temporale non esiste più.



Da tempo-discreto a tempo-continuo

Conversione Discreto - Continuo

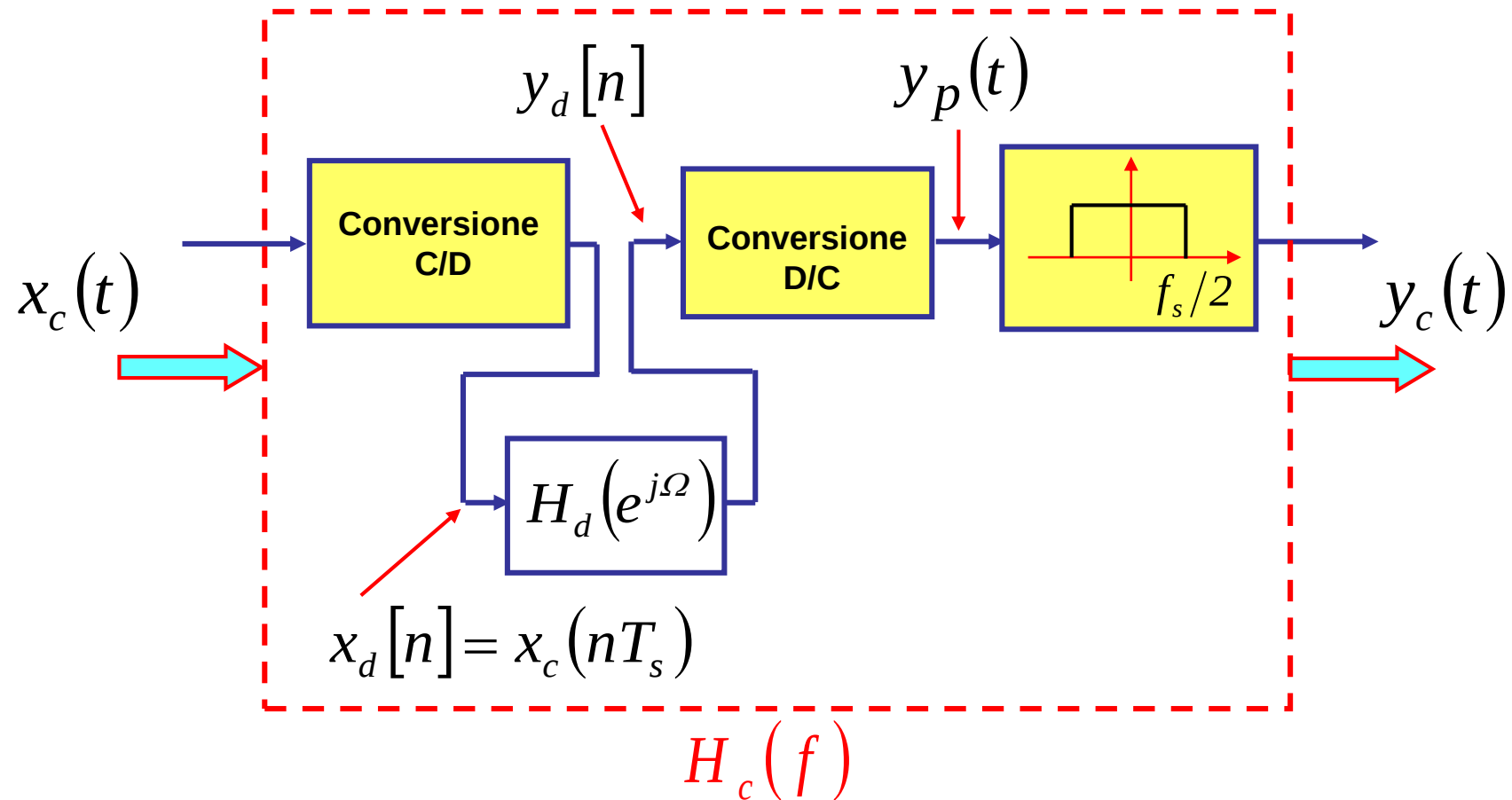


$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

Nella conversione **TD/TC** viene reintrodotta l'intervallo temporale T_s



Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



Analisi nel dominio della frequenza

Segnale campionato

$$x_p(t) = \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Ricordando che: $\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f nT_s}$

$$X_p(f) = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s}$$

(altra forma dello spettro di $x_p(t)$)

Per il segnale
tempo discreto:

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_n x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j\Omega n}$$

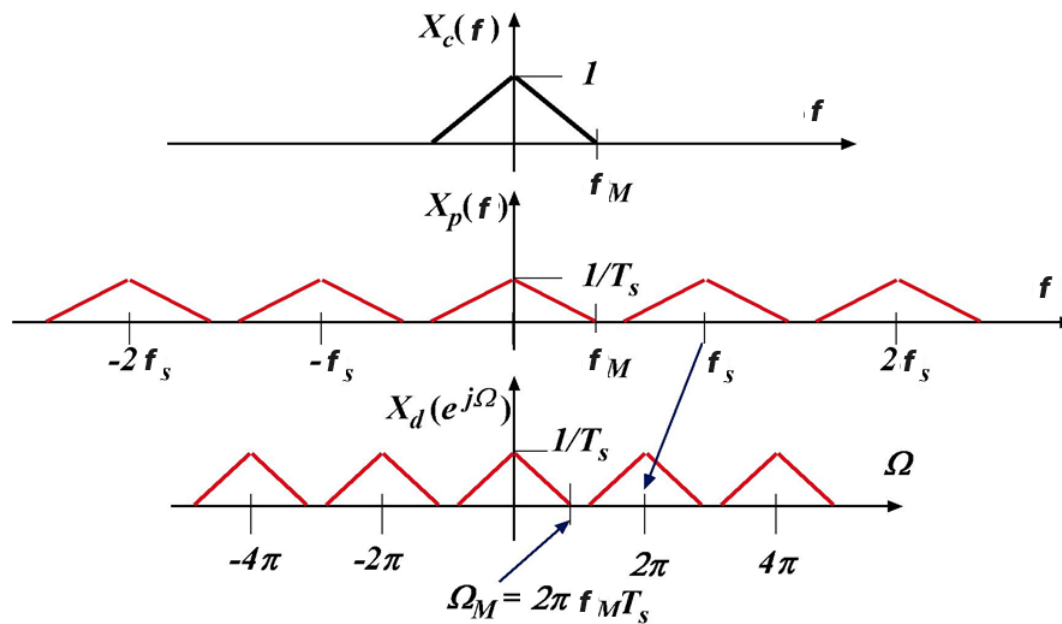
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$$



Esempio

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$$

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \Rightarrow X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(\frac{\Omega/2\pi - k}{T_s}\right)$$



Da $y_d[n]$ a $y_c(t)$

In maniera analoga:

$$y_d[n] \xleftrightarrow{F} Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_n y_d[n] e^{-j\Omega n}$$

Re-inserimento dell'intervallo di campionamento:

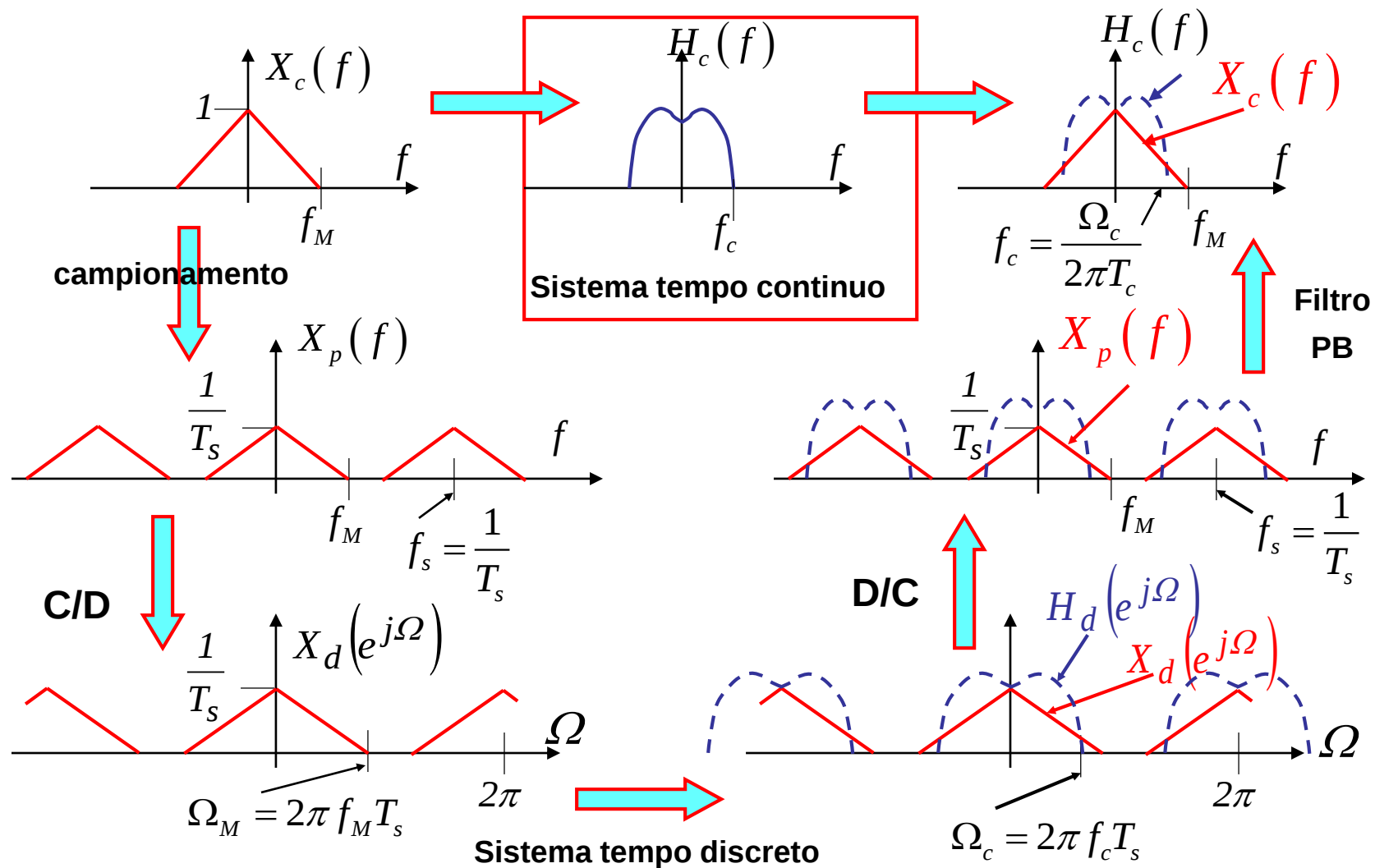
$$y_p(t) = \sum_n y_d[n] \delta(t - nT_s) \quad \longrightarrow \quad Y_p(f) = \sum_n y_d[n] e^{-j2\pi f nT_s}$$

$$Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s})$$

$$Y_c(f) = \begin{cases} Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s}) & |f| < f_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & |f| > f_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$



Relazione tra $H_d(e^{j\Omega})$ e $H_c(f)$



Campionamento della TF di un segnale tempo discreto

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s}$$

Se : $F_s = \frac{1}{T_s} \geq 2 f_M$ si ha $X(f) = \begin{cases} T_s X_s(f) & |f| \leq f_M \leq f_s/2 \\ 0 & |f| > f_M \end{cases}$

$$X_s(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\Omega n} = X_s(f) \Big|_{f=\frac{\Omega}{2\pi T_s}}$$

Ipotizzando che N sia la durata (approssimata) del segnale (ipotizziamo per semplicità che N sia pari)

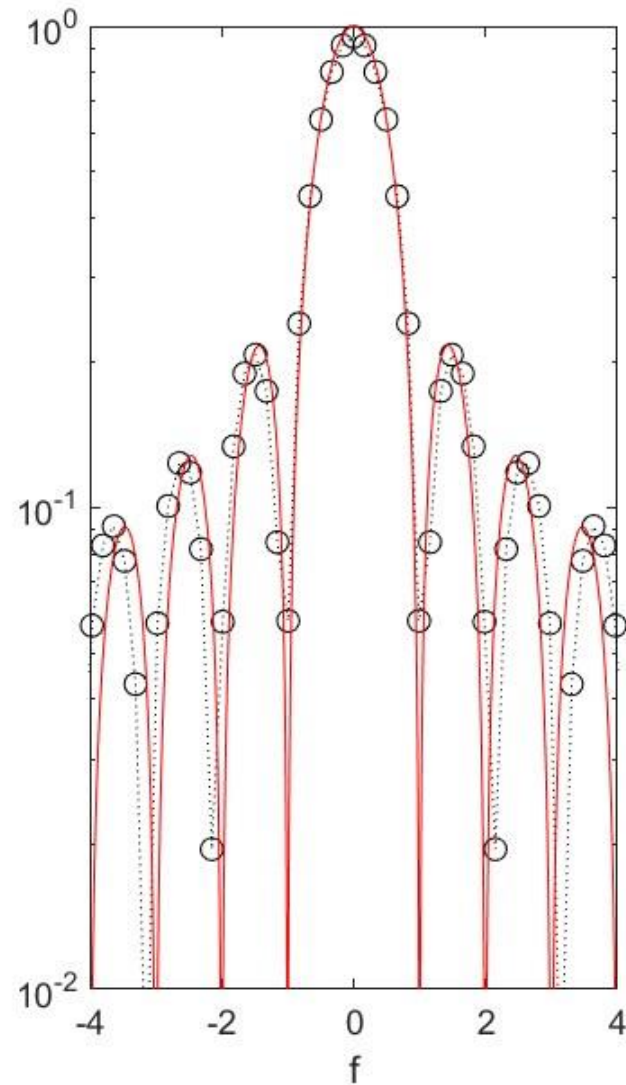
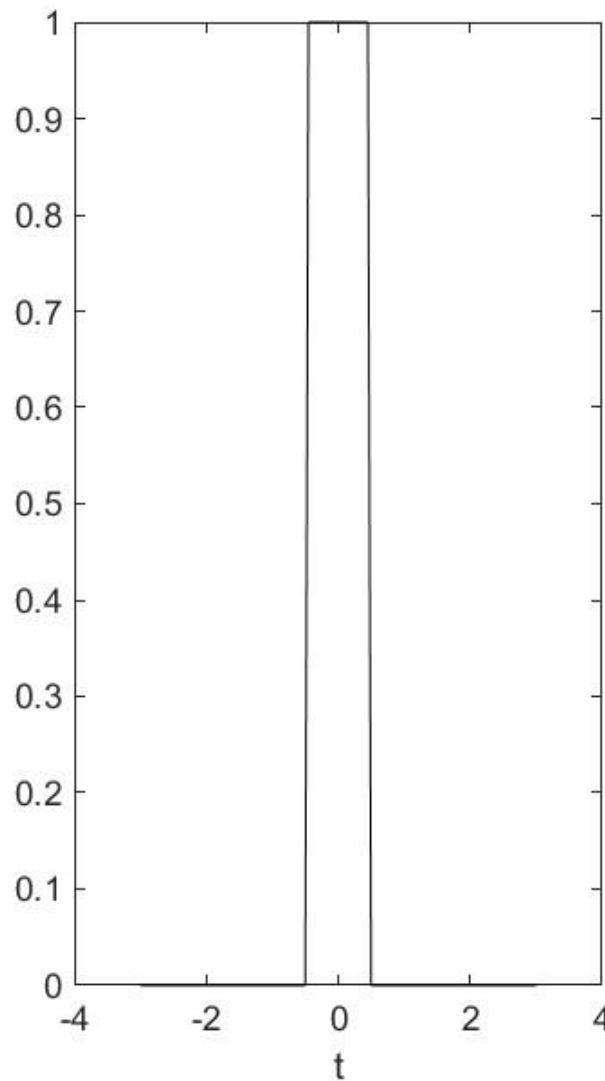
$$X_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X_s(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{T_s} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{NT_s}}, \quad k = -\frac{N}{2} : \frac{N}{2} - 1$$



Esempio: $\text{rect}(t/T)$ (S1)

```
clear;
T1=1;%durata rettangolo di cui calcoliamo la trasformata
T0=3;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/50;%intervallo di campionamento
fm=4;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=zeros(1,length(t));
x(abs(t)<T1/2)=1; subplot(1,2,1); plot(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=T1*sinc(ft*T1);
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); semilogy(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f');
hold on
semilogy(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,1]); hold off;
```





- La sequenza composta da $N = \left\lfloor 2 \frac{T_0}{T_s} + 1 \right\rfloor$ campioni.
- La risoluzione nel dominio della frequenza è data da $\Delta f = \frac{1}{NT_s}$
e può essere migliorata aumentando T_0 .
- Nei casi a banda limitata, per ridurre l'*aliasing* è necessario diminuire T_s .

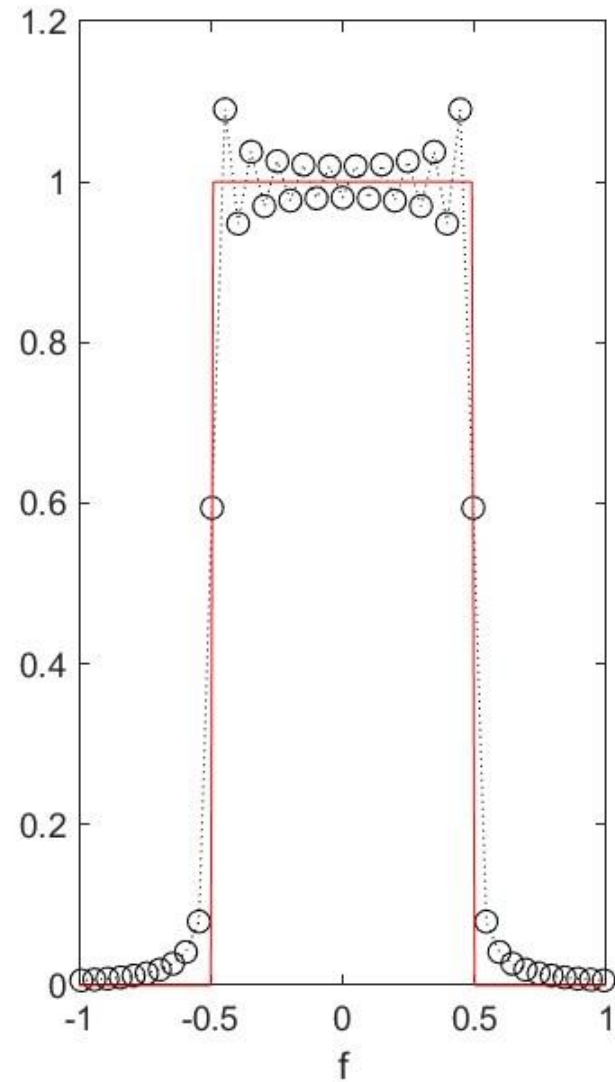
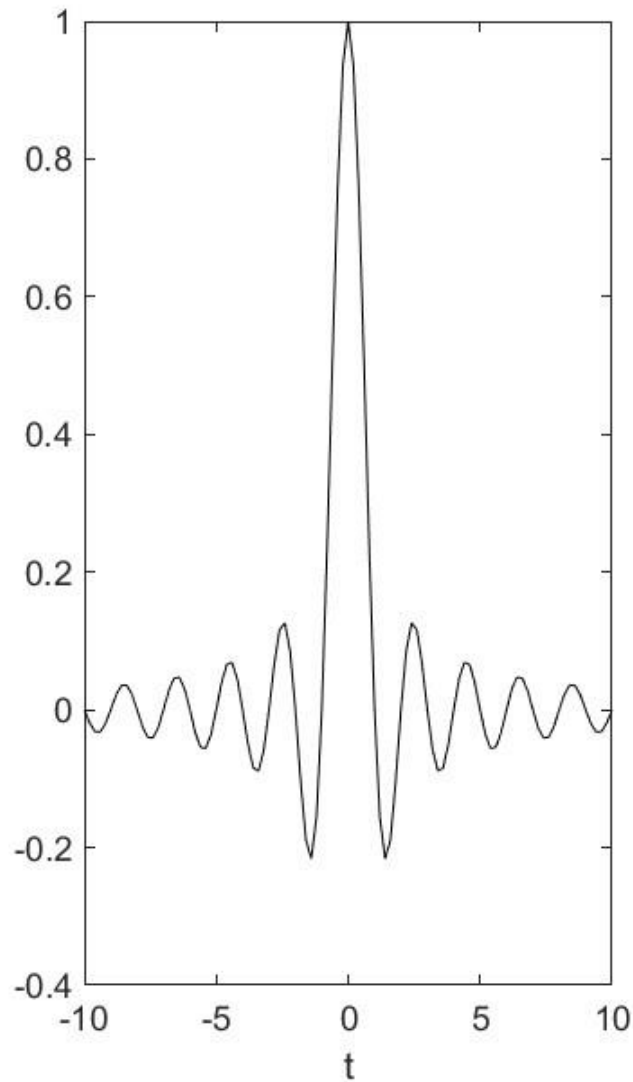


Esempio: Bsinc(BT) (S2)

```
clear; %segnale di durata infinita e banda limitata sinc
B=1;%Banda sinc di cui calcoliamo la trasformata
T0=10;%massimo valore asse dei tempi
Ts=1/5;%intervallo di campionamento
fm=1;
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=B*sinc(B*t);subplot(1,2,1);stem(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(abs(ft)<B/2)=1;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f');
hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]); hold off;
```



Bsinc(BT)

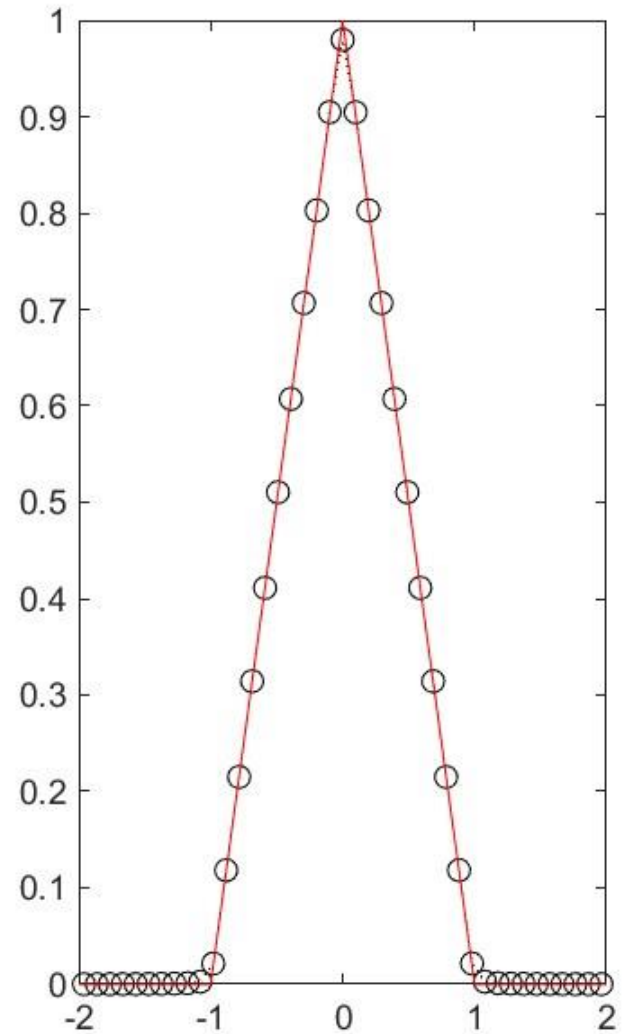
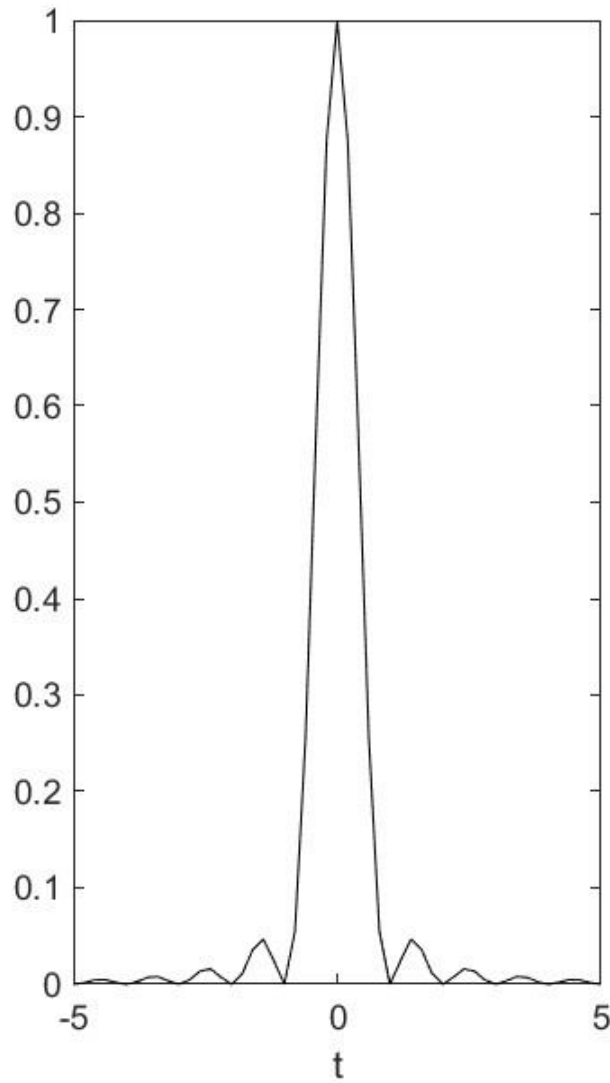


Esempio: $(\text{Bsinc}(B/T))^2$ (S3)

```
clear; %(Bsinc(B/T))^2
B=1;%Banda sinc2 di cui calcoliamo la trasformata
T0=5;%massimo valore asse dei tempi
Ts=1/5;%intervallo di campionamento
fm=2;
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=(B*sinc(B*t)).^2; subplot(1,2,1);plot(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(abs(ft)<B)=B-abs(ft(abs(ft)<B)/B);
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f');
hold on
plot(ft,abs(Xt),'k'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]); hold off;
```



$$(B\text{sinc}(BT))^2$$

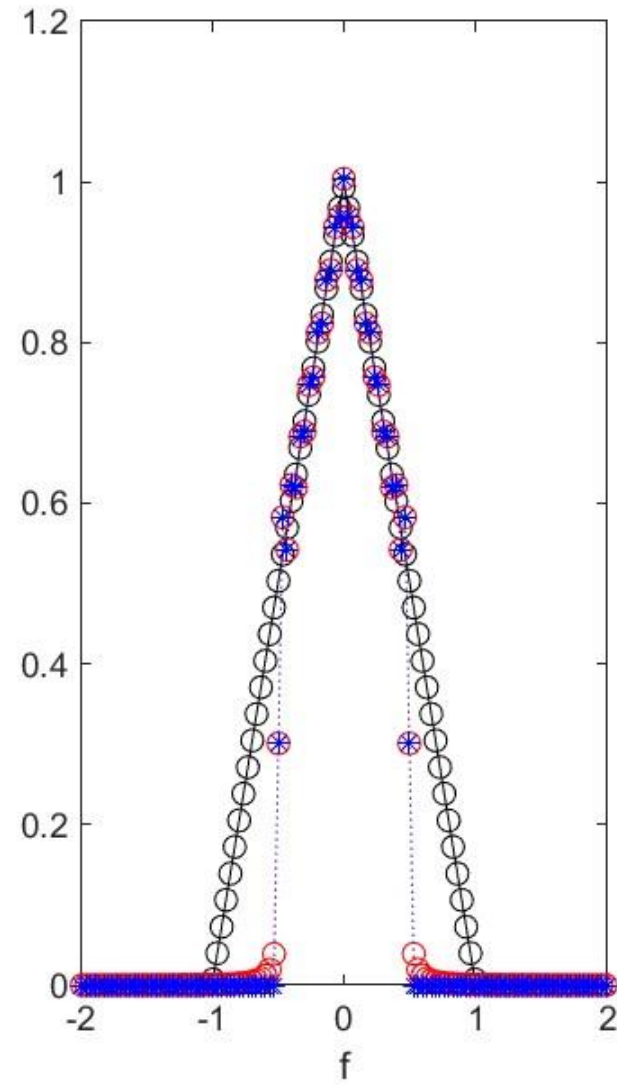
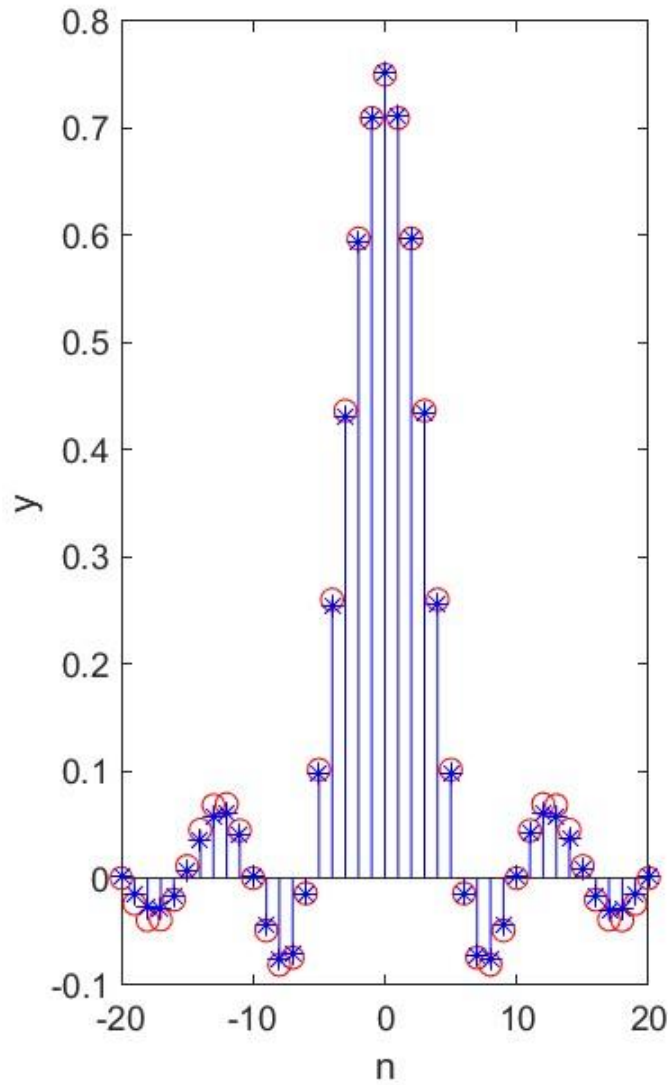


Esempio: filtraggio con filtro ideale

```
% Proseguiamo dall'esempio precedente
Bf=1/2;%Banda filtro
Of=2*pi*Bf*Ts;% Banda filtro TD
if rem(N,2)==0 %asse temporale TD
    n=-(N/2-1):N/2;
else
    n=-(N-1)/2:(N-1)/2;
end
h=sinc(n*Of/pi)*Of/pi; %filtro ideale passa basso TD
y=conv(x,h); %filtraggio nel dominio del tempo
n1=-(N-1):(N-1);
y=y(find(n1==n(1)):find(n1==n(N))); %y allo stesso intervallo
subplot(1,2,1); hold off, stem(n,y,'ro');
Yf=fft(y);
Ys=fftshift(Yf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); hold on, plot(fs,abs(Ys)*Ts,'r:o'); hold off;
Ys1=Ys;
Ys1(abs(oms)>Of)=0; %filtraggio nel dominio della frequenza
subplot(1,2,2); hold on, plot(fs,abs(Ys1)*Ts,'b:'); hold off;
Y1=fftshift(Ys1); %trasformata tra 0 e 2π
y1=ifft(Y1); y1=y1*sign(real(y1(n==0)));
subplot(1,2,1); hold on, stem(n,real(y1),'b*'); hold off
```



$$(\text{Bsinc}(BT))^2$$



Un segnale tempo-continuo a banda limitata può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2 f_M$$

Spettro di un segnale campionato: $X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$

Conversione C – D: $x[n] = x(nT_s)$

F

$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$

Conversione D – C: $Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s})$

$$Y_c(f) = \begin{cases} Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s}) & |f| < f_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & |f| > f_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$

