Analisi dei sistemi LTI con la trasformata Z

Sommario

- Definizione della Trasformata Z
- Regioni di convergenza
- Proprietà della Trasformata Z
- Analisi dei sistemi LTI con la Trasformata Z
- Regole di antitrasformazione

Motivazioni

- Estendere il campo di applicazione della DTFT
- Soluzione equazioni alle differenze
- Analisi sistemi LTI con condizioni iniziali non nulle

Autofunzioni

Come già visto:

Per un sistema LTI tempo discreto il segnale:

$$x[n] = z^n \qquad\qquad z = |z| e^{j\Omega}$$

è un **autofunzione**

$$\underset{z^n}{x[n]} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \underset{H(z)\,z^n}{y[n]}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}$$

$$= H(z)\, z^n$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, z^{-n}}$$

Dato un segnale $x[n]$, l'operazione:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}}$$

definisce **la trasformata Z** di $x[n]$.

Osservazione:

$X(z)$ è una funzione **complessa** di variabile **complessa** ed è definita tramite una serie di potenze

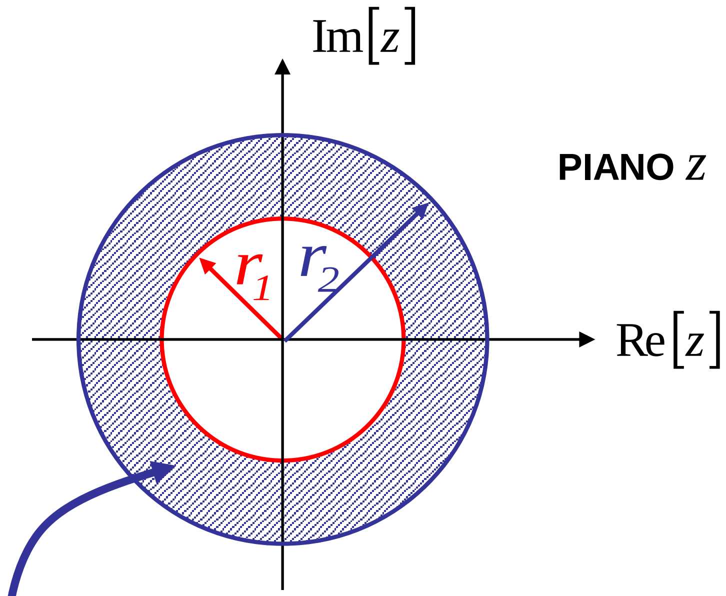
$$X(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}} + \boxed{\sum_{n=-1}^{-\infty} x[n] z^{-n}}$$

Converge in una regione esterna ad una circonferenza

$$|z| > r_1$$

Converge in una regione interna ad una circonferenza

$$|z| < r_2$$

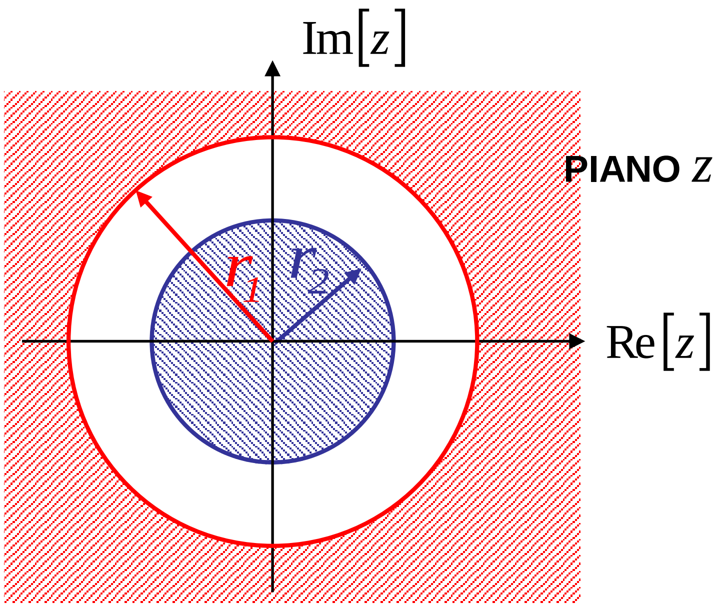


$r_1 < r_2$

Esiste una regione di convergenza

⇓

Esiste la trasformata Z



$r_1 > r_2$

Non esiste una regione di convergenza

⇓

Non esiste la trasformata Z

Ponendo $z = re^{j\Omega}$ si ha che:

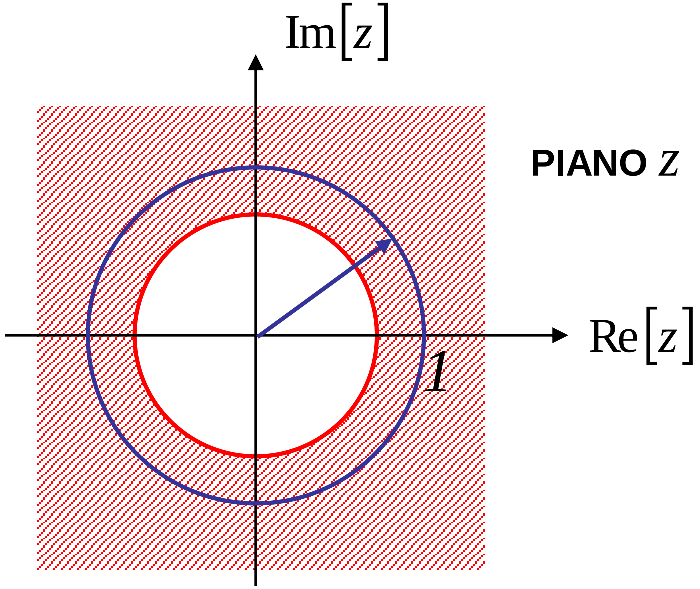
$$X\left(re^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]\, r^{-n}\right) e^{-j\Omega n}$$

Questa relazione mostra che:

$$X(z) = Z\{\, x[n]\, \} = F\left\{x[n]\, r^{-n}\right\}$$

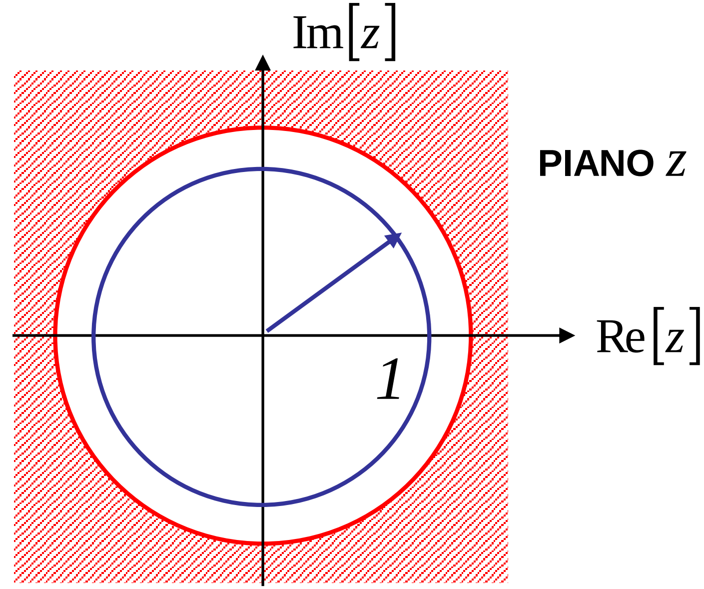
$$\boxed{F\{\, x[n]\, \} = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

(ammesso che $X(z)$ converga in $z = e^{j\Omega}$)



La circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza

Esiste la trasformata di Fourier



La circonferenza di raggio non unitario appartiene alla regione di convergenza

Non esiste la trasformata di Fourier

Quindi:

La trasformata di Fourier di un segnale coincide con la sua trasformata **Z** calcolata sulla circonferenza di raggio unitario del piano complesso **z**

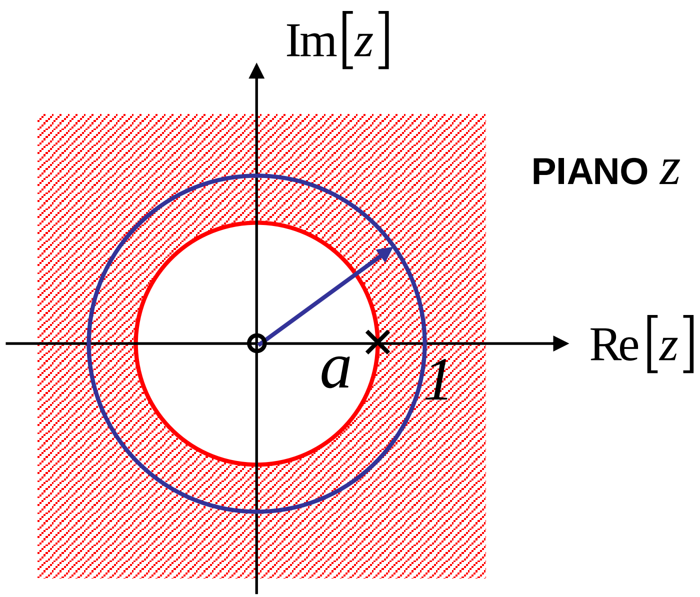
(purché questa circonferenza appartenga alla regione di convergenza di $\mathbf{X}(z)$).

$$\boxed{x[n] = a^n\, u[n]}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a\, z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$per \; \left|a\, z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

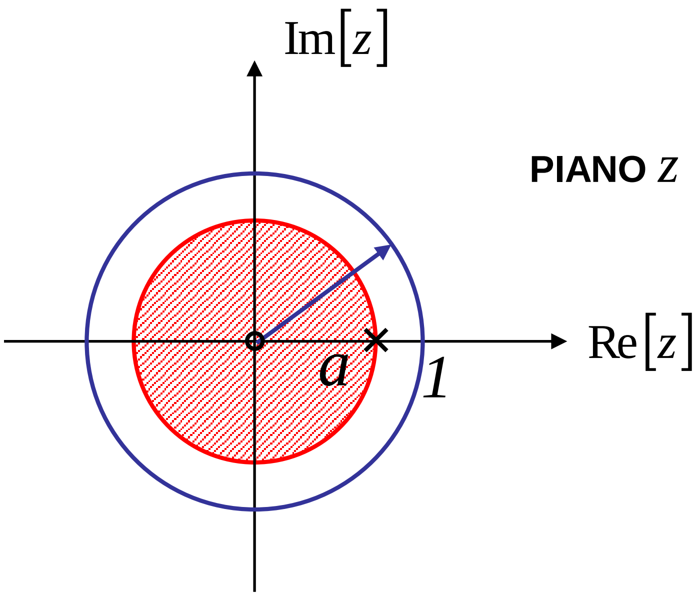
Funzione razionale,
caratterizzata da zeri e poli



$$\boxed{x[n] = -a^n u[-n-1]}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$



PIANO z

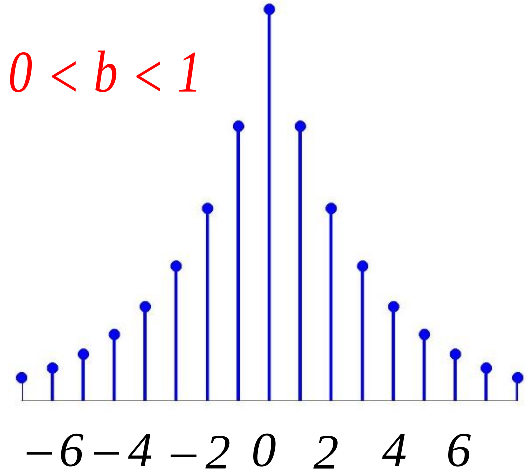
$$per \ \left|a^{-1} z\right| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

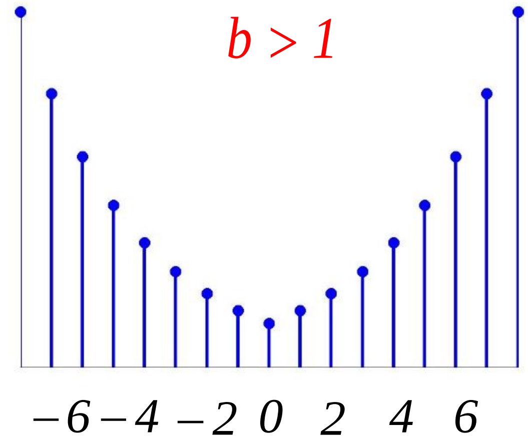
Attenzione:

stessa espressione analitica, differente regione di convergenza!

Esempi

$$\boxed{x[n] = b^{|n|}}$$





$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1} z^{-1}} \qquad |z| < \frac{1}{b}$$

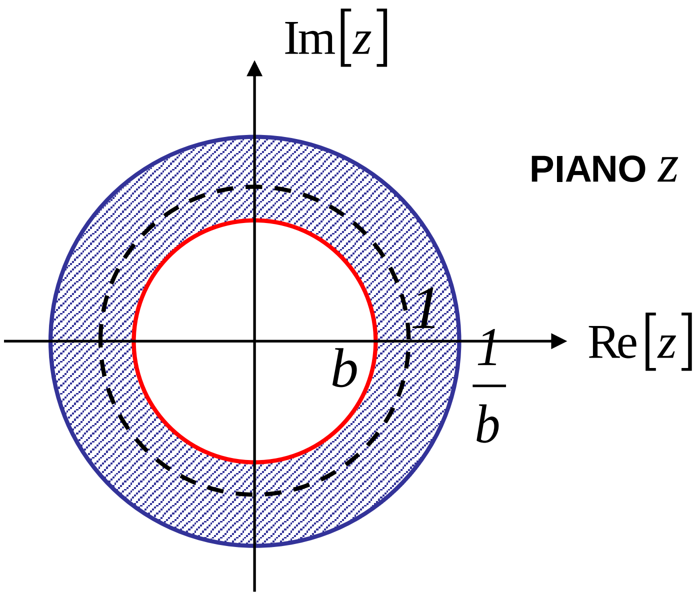
$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-b} - \frac{z}{z - \frac{1}{b}}}$$

$$\left(|b| < |z| < \left| \frac{1}{b} \right| \right) \quad \text{se } |b| < 1$$

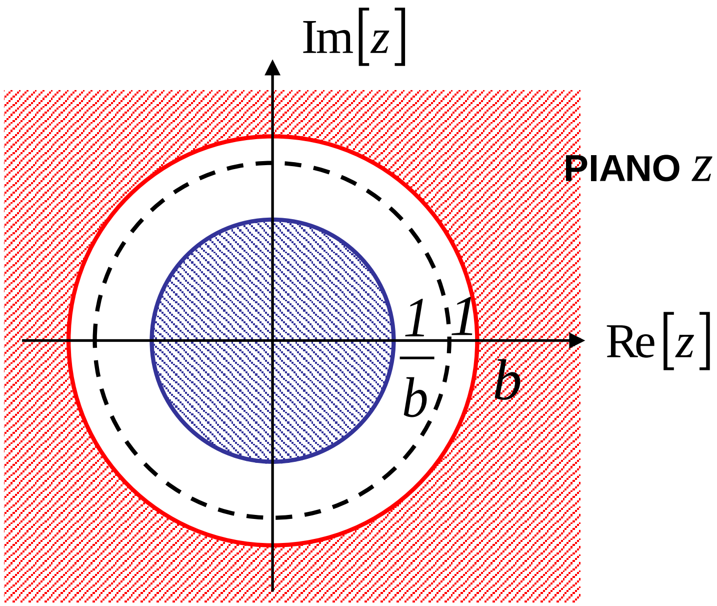
$$\text{non esiste} \quad \text{se } |b| \geq 1$$

$$\boxed{x[n] = b^{|n|}}$$

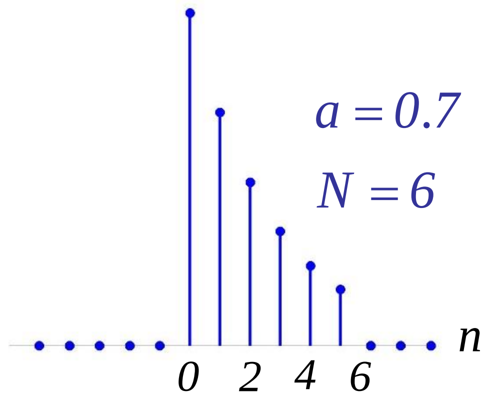
$|b| < 1$



$|b| > 1$

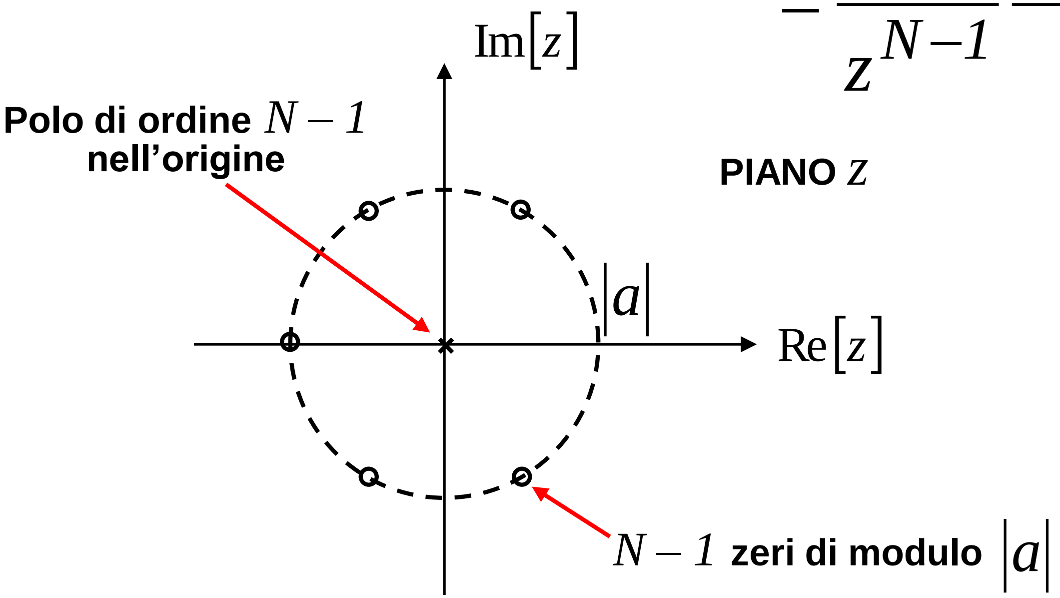


$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1, \quad a > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1-\left(a z^{-1}\right)^N}{1 - a z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a} \qquad \forall z - \{0\}$$



Funzione razionale, caratterizzata da zeri e poli

Forma della regione di convergenza:

1) Segnale *'destro* (evolve verso ∞)*':* regione esterna a una circonferenza.

   (Poli interni a detta circonferenza)

2) Segnale *'sinistro* (proviene da -∞)*':* regione interna a una circonferenza.

   (Poli esterni a detta circonferenza)

3) Segnale *'bilaterale'* (esteso da -∞ a +∞)*:* corona circolare .

   (Poli esterni a detta corona circolare)

4) Segnale di durata fi*nita:* tutto il piano z (escluso al più l'origine e/o il punto all'infinito).

a) Linearità

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), \qquad x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z)$$

Regione di convergenza: $\boxed{RC\{X_1\} \cap RC\{X_2\}}$

b) Traslazione nel tempo

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Rightarrow x[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) z^{-n_0}$$

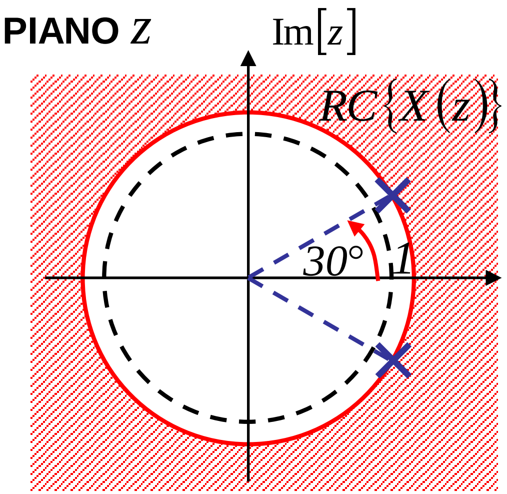
Regione di convergenza: $\boxed{RC\{X\} \underset{eventualm.}{-} (z=0)}$

c) Scalaggio in z

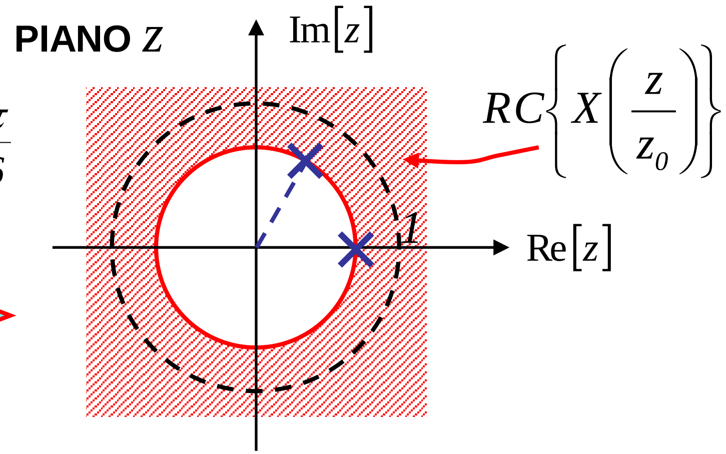
$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Longrightarrow \quad z_0^n\, x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Regione di convergenza: $\boxed{RC = z_0 RC\{X(z)\}}$

Significato: $\begin{cases} se \;\; Z\{x[n]\} & \text{ha un polo in } z = a, \\ Z\{z_0^n\, x[n]\} & \text{ha un polo in } z = az_0 \end{cases}$



$$z_0 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}}$$



d) Inversione temporale

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Rightarrow \quad x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Regione di convergenza:

$$\boxed{RC\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \frac{1}{RC\left\{X(z)\right\}}}$$

Significato:

$$se \quad z_0 \in RC\left\{X(z)\right\}, \quad \text{allora} \quad \frac{1}{z_0} \in RC\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

e) Convoluzione

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \qquad RC = R_1$$

$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z) \qquad RC = R_2$$

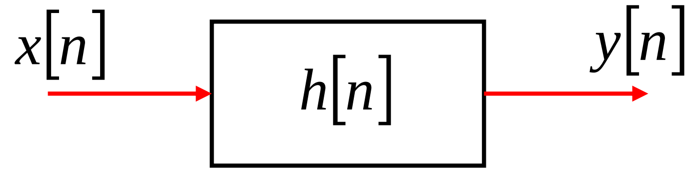
$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) X_2(z) \qquad RC \supset R_1 \cap R_2$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n-k] z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] X_2(z) z^{-k} = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] z^{-k} = X_2(z) X_1(z)$$

Significato



$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$H(z)$ funzione di sistema (di trasferimento)

f) Derivata rispetto a Z

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad RC = R_x \qquad \Rightarrow \qquad n\,x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad RC = R_x$$

Es:

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \qquad |z| > |a|$$

Proprietà della trasformata Z

g) Sistemi LTI caratterizzati da una equazione alle differenze:

Analoghi ai sistemi tempo continuo descritti da equazioni differenziali

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad \Longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k]$$

Risposta impulsiva: $h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} h[n-k]$

Per essi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \quad \Longrightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$H(z)$ $\Longrightarrow$ Funzione razionale in z^{-1} (o in z)

g) Formula generale di antitrasformazione

$$X(z) = X\left(r e^{j\Omega}\right) = F\left\{x[n]\, r^{-n}\right\} \Longrightarrow x[n]\, r^{-n} = F^{-1}\left\{X\left(r e^{j\Omega}\right)\right\}$$

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(r e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(r e^{j\Omega}\right)\left(r e^{j\Omega}\right)^n d\Omega$$

(integrazione lungo una circonferenza nel piano z, di centro l'origine, inclusa nella regione di convergenza)

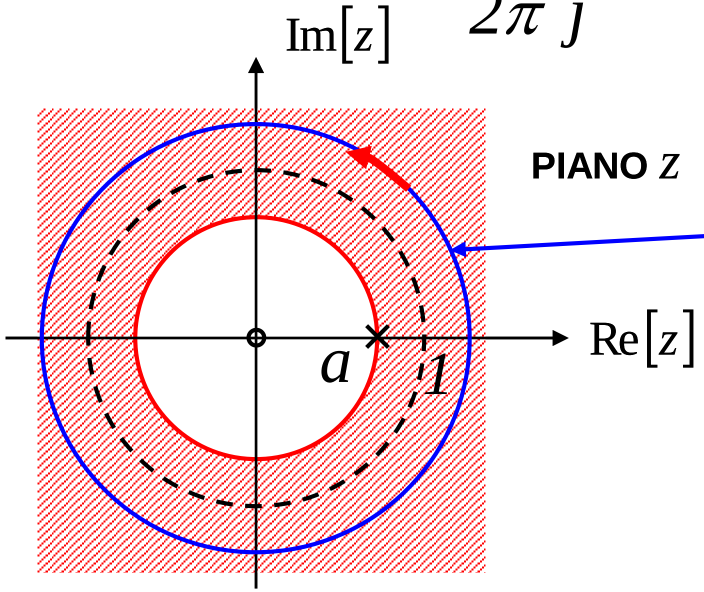
$$z = re^{j\Omega} \Longrightarrow dz = jre^{j\Omega} d\Omega \Longrightarrow d\Omega = \frac{1}{j} z^{-1} dz$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)\, z^{n-1} dz}$$

$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz}$$

Il segnale $x[n]$ **risulta "somma" (integrale)** di funzioni z^n (o, il che è lo stesso, di funzioni z^{n-1}), ciascuna pesata dal termine:

$$\frac{1}{2\pi j}X(z)dz$$



Esempio di percorso di integrazione

a) Stabilità

Se un sistema LTI è stabile $\Rightarrow$ $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$ $\Rightarrow$ esiste $H\left(e^{j\Omega}\right)$

La circonferenza di raggio unitario deve appartenere alla regione di convergenza

b) causalità $\Rightarrow$ $h[n] = 0 \quad \text{per} \;\; n < 0$

Condizione **necessaria:**

$h[n]$ **deve essere un segnale destro**

RC esterna ad una circonferenza

Se $H(z)$ è una funzione razionale in z, $H(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

$$\boxed{\textbf{grado } N \le \textbf{grado } D}$$

(per studenti volonterosi)

Verificare che: $\dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad (RC: |z|>|a|) \quad \Rightarrow \quad a^n u[n]$

NB.: $\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum Res$ ← residui dei poli interni a C

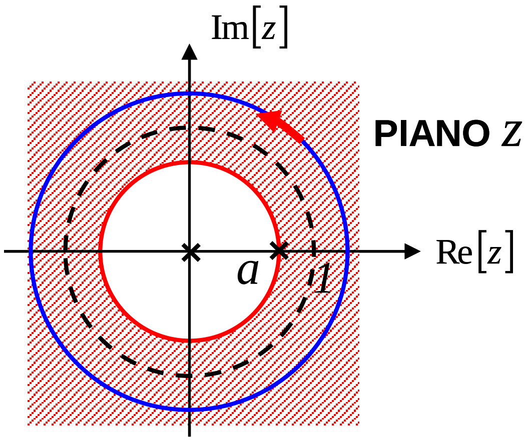
$$\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^n}{z-a} dz$$

$\dfrac{z^n}{z-a}$

- Per $n<0$:
  - un polo semplice in $z = a$
  - un polo di ordine n in $z = 0$
- Per $n \geq 0$: un polo semplice in $z = a$

(per studenti volonterosi)

Per un polo in z_0 di ordine n: $$Res\{f(z)\} = \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right\}$$

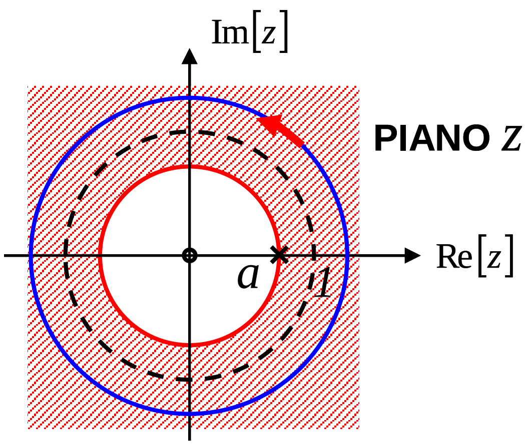


$n<0$

$$\underset{in\ \ z=0}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{z-a} \right) \right\} = -\frac{1}{a^{|n|}}$$

$$\underset{in\ \ z=a}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z \to a} \{z^n\} = \frac{1}{a^{|n|}}$$

$$\boxed{x[n] = \sum Res = 0}$$



$n \geq 0$

$$\underset{in\ \ z=a}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z \to a} \{z^n\} = a^n$$

$$\boxed{x[n] = \sum Res = a^n}$$

Alcuni casi notevoli:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad \begin{cases} RC: \quad |z| > |a| & x[n] = a^n u[n] \\ RC: \quad |z| < |a| & x[n] = -a^n u[-n-1] \end{cases}$$

(valida anche se a è complesso)

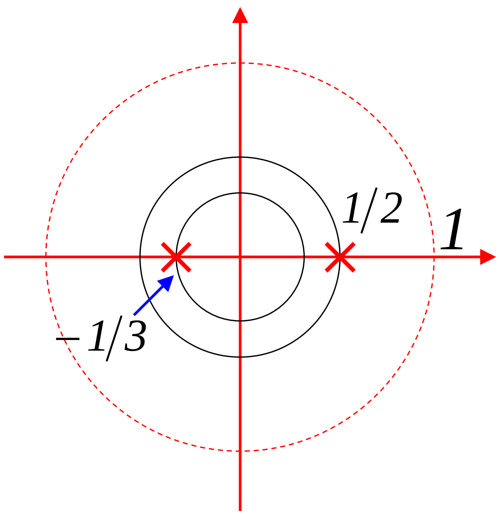
Sia $X(z)$ una funzione razionale a coefficienti reali in z (ad esempio ottenuta da un'equazione alle differenze)

$$X(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

I poli saranno reali o a coppie complesse coniugate

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{z^2-z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}$$

$$z_{1,2}=\frac{\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{4}{6}}}{2}=\begin{cases}1/2\\-1/3\end{cases}$$



$$X(z)=\frac{z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

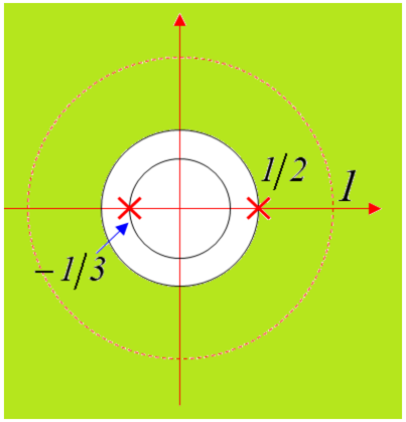
$$X(z)=z\left(\frac{A}{z-1/2}+\frac{B}{z+1/3}\right)$$

$$A=\left.\frac{z-1}{z+1/3}\right|_{z=1/2}=\frac{-1/2}{5/6}=-\frac{3}{5}$$

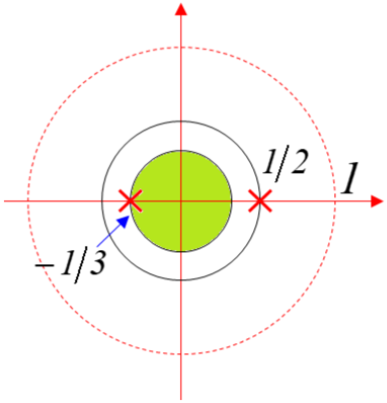
$$B=\left.\frac{z-1}{z-1/2}\right|_{z=-1/3}=\frac{-4/3}{-5/6}=\frac{8}{5}$$

$$X(z)=-\frac{3}{5}\cdot\frac{z}{z-1/2}+\frac{8}{5}\cdot\frac{z}{z+1/3}$$

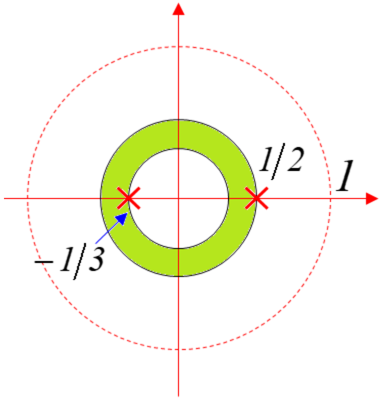
$$X(z) = -\frac{3}{5}\cdot\frac{z}{z-1/2} + \frac{8}{5}\cdot\frac{z}{z+1/3}$$



$$x_1[n] = \left[-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$



$$x_2[n] = \left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[-n-1]$$



$$x_3[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Sia $m<n$

a) $X(z)$ **ha solo poli reali** p_1, p_2, **...semplici**

Convenzione: si intende che $D(z)=0 \quad per \quad z=p_i$

Dividendo N e D per b_n:

$$X(z)=\frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_0}{z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \cdots + d_0} \qquad c_i=\frac{a_i}{b_n} \qquad d_i=\frac{b_i}{b_n}$$

$$X(z)=\frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_0}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

$$X(z)=\frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_0}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

Sviluppo in frazioni parziali:

$$X(z)=\frac{A_1}{(z-p_1)}+\frac{A_2}{(z-p_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(z-p_n)}$$

Ciascun termine corrisponde a

$$A_i p_i^{n-1} u[n-1] \qquad |p_i| < r_{min} \quad \text{di } RC$$

$$-A_i p_i^{n-1} u[-n] \qquad |p_i| > r_{\max} \quad \text{di } RC$$

Determinazione dei coefficienti

$$X(z) = \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(z-p_n)}$$

Nel caso di poli semplici:

$$X(z)(z-p_1) = A_1 + \frac{A_2(z-p_1)}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_n(z-p_1)}{(x-p_n)}$$

Pertanto: $A_1 = X(z)(z-p_1)\Big|_{z=p_1}$

e in generale: $A_k = X(z)(z-p_k)\Big|_{z=p_k}$

b) $X(z)$ a coefficienti reali ha anche poli complessi z_1, z_2, ...semplici

In questo caso se z_k è un polo, lo è anche z_k^*

Ogni coppia di poli complessi coniugati dà luogo alle frazioni:

$$X(z) = \cdots \frac{B_k}{(z - z_k)} + \frac{B_k^*}{(z - z_k^*)} + \cdots$$

cui corrisponde (ad es. per segnali destri):

$$\left(B_k z_k^{n-1} + B_k^* z_k^{*n-1}\right) u[n-1]$$

Posto: $B_k = |B_k| e^{j\phi_k}$ $\qquad z_k = |z_k| e^{j\psi_k}$

$$\boxed{x[n] = \ldots + 2|B_k||z_k|^{n-1} \cos\left((n-1)\psi_k + \phi_k\right) u[n-1] + \ldots}$$

c) $X(z)$ ha anche poli di molteplicità > 1

$$X(z)=\frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_0}{(z-p_1)^{\sigma_1}(z-p_2)^{\sigma_2}\cdots(z-p_n)^{\sigma_n}}$$

$$\sigma_i \geq 1 = \text{molteplicità del polo i-esimo}$$

Esempio con $\sigma_i = 2$

Nello sviluppo in frazioni parziali appariranno i termini:

$$\cdots\frac{B_{i1}}{(z-p_i)}+\frac{B_{i2}}{(z-p_i)^2}\cdots$$

Polo con molteplicità 2

$$X(z) = W(z) + \frac{B_{i1}}{(z-p_i)} + \frac{B_{i2}}{(z-p_i)^2}$$

Per il termine B_{i2} $\Rightarrow$ $B_{i2} = X(z)(z-p_i)^2 \Big|_{z=p_i}$

Per il termine B_{i1}

$$X(z)(z-p_i)^2 = W(z)(z-p_i)^2 + B_{i1}(z-p_i) + B_{i2}$$

$$\frac{d}{dz}\left[X(z)(z-p_i)^2\right] = \frac{d}{dz}\left[W(z)\right](z-p_i)^2 + 2p_i W(z)(z-p_i) + B_{i1}$$

Pertanto: $B_{i1} = \frac{d}{dz}\left[X(z)(z-p_i)^2\right]\Big|_{z=p_i}$

Alla trasformata $\dfrac{z}{z-p}$ corrisponde il segnale:

$$p^n u[n] \qquad RC\ |z|>|p|$$

$$-p^n u[-n-1] \qquad RC\ |z|<|p|$$

Alla trasformata $\dfrac{pz}{(z-p)^2}$ corrisponde il segnale:

$$np^n u[n] \qquad RC\ |z|>|p|$$

$$-np^n u[-n-1] \qquad RC\ |z|<|p_i|$$

Pertanto, per $|z|>|p|$ abbiamo le seguenti anti-trasformate

$$\frac{B_{i1}}{(z-p_i)} \rightarrow B_{i1} p_i^{n-1} u[n-1] \qquad \frac{B_{i2}}{(z-p_i)^2} \rightarrow B_{i2}(n-1) p_i^{n-2} u[n-1]$$

Esempio

$$H(z)=\frac{z^3-\frac{7}{4}z^2+z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+\frac{21}{16}z^{-2}-\frac{9}{32}z^{-3}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=z\left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-\frac{3}{4}}+\frac{C}{\left(z-\frac{3}{4}\right)^2}\right)$$

$$A=\left.\frac{z^2-\frac{7}{4}z+1}{\left(z-\frac{3}{4}\right)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=6$$

$$B=\left.\frac{\left(2z-\frac{7}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)-\left(z^2-\frac{7}{4}z+1\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=\frac{3}{4}}=-5$$

$$C=\left.\frac{z^2-\frac{7}{4}z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{3}{4}}=1$$

$$h[n]=\left(6\left(\frac{1}{2}\right)^n-5\left(\frac{3}{4}\right)^n+n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)u[n]=\left(6\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{15}{4}-n\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)u[n]$$

I primi valori si possono verificare mediante l’equazione alle differenze

$$h[n]=2h[n-1]-\frac{21}{16}h[n-2]+\frac{9}{32}h[n-3]+\delta[n]-\frac{7}{4}\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

Polo con molteplicità *m*

$$X(z) = W(z) + \frac{B_{i1}}{(z-p_i)} + \cdots + \frac{B_{im}}{(z-p_i)^m}$$

$$B_{i,m} = X(z)(z-p_i)^m \Big|_{z=p_i},$$

$$B_{i,m-j} = \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^j}{dz^j}\left[X(z)(z-p_i)^m\right]\Bigg|_{z=p_i}, \quad j = 1 \div m-1.$$

Alla trasformata $\dfrac{B_{ij}}{(z-p_i)^j}$ corrisponde il segnale destro:

$$B_{i,j}\binom{n-1}{j-1}p_i^{n-j}u[n-j] \qquad RC \quad |z| > |p_i|$$

$$-B_{i,j}\binom{n-1}{j-1}p_i^{n-j}u[-n+j-1] \qquad RC \quad |z| < |p_i|$$

$$H(z)=\frac{z+1}{(z-1)^3(z+1/2)}=\frac{z^{-4}+z^{-3}}{1-\frac{1}{2}\left(5z^{-1}-3z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}\right)}=\frac{A}{(z+1/2)}+\frac{B_{11}}{(z-1)}+\frac{B_{12}}{(z-1)^2}+\frac{B_{13}}{(z-1)^3}$$

$$A=\left.\frac{z+1}{(z-1)^3}\right|_{z=-1/2}=-\frac{4}{27}$$

$$B_{1,3}=\left.\frac{z+1}{z+1/2}\right|_{z=1}=\frac{4}{3}\qquad B_{1,2}=\left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z+1}{z+1/2}\right)\right|_{z=1}=\left.\frac{-1/2}{(z+1/2)^2}\right|_{z=1}=-\frac{2}{9}$$

$$B_{1,1}=\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{-1/2}{(z+1/2)^2}\right)\right|_{z=1}=\left.\frac{1/2}{(z+1/2)^3}\right|_{z=1}=\frac{4}{27}$$

$$h[n]=\binom{n-1}{2}\frac{4}{3}u[n-3]-\frac{2}{9}(n-1)u[n-2]+\frac{4}{27}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u[n-1]$$

$$=\left(\frac{2}{3}n^2-\frac{20}{9}n+\frac{46}{27}-\frac{4}{27}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u[n-3],\qquad \mathrm{RC}\ |z|>1$$

I primi valori si possono verificare mediante l'equazione alle differenze

$$h[n]=\delta[n-3]+\delta[n-4]+\frac{1}{2}\left(5h[n-1]-3h[n-2]-h[n-3]+h[n-4]\right)$$

- Sia $H(z) = N(z)/D(z)$, dove $N(z)$ è un polinomio di grado *N* e $D(z)$ è un polinomio di grado *M*.

- Regioni di convergenza: numero di poli di modulo distinto + 1.

- Anti trasformata destra: $|z| > \max_i |p_i|$

- Anti trasformata sinistra: $|z| < \min_i |p_i|$

- Sistema stabile: è l'unico la cui regione di convergenza include la circonferenza di raggio unitario, (esiste solo se tutti i poli hanno un modulo diverso da 1). Per il sistema stabile esiste la trasformata di Fourier.

- Sistema causale: corrisponde alla anti trasformata destra, purché $N \leq M$, altrimenti non esiste.

Trasformata unilatera

$$\boxed{X^+(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

Dove $x[n]$ può estendersi da -∞ a +∞

Quindi se $x[n]$ è diverso da 0 per $n<0$, la trasformata unilatera può essere diversa da quella bilatera.

$$x_1[n] = x[n-1] \rightarrow X_1^+(Z) = x[-1] + z^{-1} X^+(z)$$

$$x_1[n] = x[n-m] \rightarrow X_1^+(Z) = \sum_{n=0}^{m-1} x[n-m] z^{-n} + z^{-m} X^+(z)$$

In questo modo è possibile tener conto di condizioni iniziali diverse da 0.

Esercizio: determinare un'espressione esplicita dei numeri di Fibonacci, essendo

$y[n]=y[n-1]+y[n-2]$, $y[-1]=1$, $y[-2]=0$.

Trasformando otteniamo

$$Y^+(z)=y[-1]+z^{-1}Y^+(z)+y[-1]z^{-1}+z^{-2}Y^+(z)$$

$$Y^+(z)=y[-1]\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{Az}{z-z_1}+\frac{Bz}{z-z_2}$$

essendo $z_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $A=\dfrac{1+z_1}{z_1-z_2}$, $B=\dfrac{1+z_2}{z_2-z_1}$.

Otteniamo quindi $y[n]=Az_1^n+Bz_2^n$

da cui $y[0]=1$; $y[1]=2$; $y[2]=3$; $y[3]=5$, ...

Per un sistema LTI tempo discreto il segnale:

$$x[n] = z^n \qquad con \quad z = |z| e^{j\Omega}$$

è un **autofunzione**

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)\, z^n$$

Trasformata Z di $x[n]$: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Alla trasformata Z di un segnale è associata una regione di convergenza

Se $X(z)$ converge in $z = e^{j\Omega}$ $$F\{x[n]\} = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Riassunto

Proprietà della Trasformata Z

a) Linearità

b) Traslazione nel tempo $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Longrightarrow x[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)z^{-n_0}$

c) Scalaggio in z $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Longrightarrow z_0^n\, x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

d) Inversione temporale $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Longrightarrow x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$

e) Convoluzione

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \qquad RC = R_1$$

$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z) \qquad RC = R_2$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z) \qquad RC \supset R_1 \cap R_2$$

f) Derivata rispetto a Z

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad RC = R_x \Longrightarrow n\,x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad RC = R_x$$

Proprietà dei sistemi

a) Stabilità — La circonferenza di raggio unitario deve appartenere alla regione di convergenza

b) causalità $\Rightarrow$ $h[n]=0 \quad per \quad n<0$

Condizione **necessaria**:

$h[n]$ deve essere un segnale destro

RC esterna ad una circonferenza

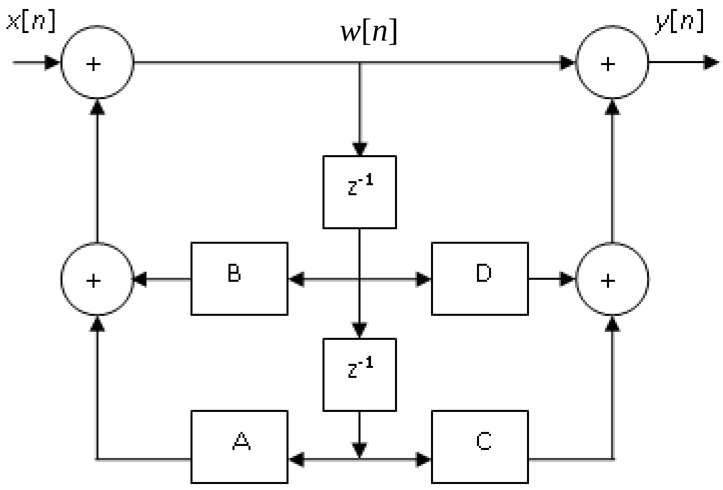
Se $H(z)$ è una funzione razionale in z, $H(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$

$$\boxed{\textbf{grado } N \le \textbf{grado } D}$$

Si consideri il sistema riportato in figura.

Si determini l'equazione alle differenze che lo descrive (si utilizzi la trasformata zeta).

Discutere le condizioni di stabilità.



Risoluzione

Nel dominio del tempo abbiamo le relazioni:

$$w[n]=x[n]+Bw[n-1]+Aw[n-2] \qquad y[n]=w[n]+Dw[n-1]+Cw[n-2]$$

trasformando le quali otteniamo:

$$W(z)=X(z)+BW(z)z^{-1}+AW(z)z^{-2} \qquad Y(z)=W(z)+DW(z)z^{-1}+CW(z)z^{-2}$$

Eliminando $W(z)$ otteniamo: $$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+Dz^{-1}+Cz^{-2}}{1-Bz^{-1}-Az^{-2}}=\frac{z^2+Dz+C}{z^2-Bz-A}}$$

Infine dalla $$Y(z)\left(1-Bz^{-1}-Az^{-2}\right)=X(z)\left(1+Dz^{-1}+Cz^{-2}\right)$$

Otteniamo $$\boxed{y[n]=By[n-1]+Ay[n-2]+x[n]+Dx[n-1]+Cx[n-2]}$$

Consideriamo la funzione di trasferimento. $\boxed{H(z)=\frac{z^2+Dz+C}{z^2-Bz-A}}$

I poli sono espressi dalla relazione: $z_{1,2}=\frac{B\pm\sqrt{B^2+4A}}{2}$

Dato che dobbiamo considerare un sistema destro, per la stabilità è necessario che entrambi i poli abbiano modulo minore di 1.

a) Poli reali, ossia $B^2+4A\geq 0$. Se $A\geq 0$ questa condizione è sempre soddisfatta, mentre in caso contrario lo è se $|B|>2\sqrt{-A}$.

Se $B>0$, il polo di modulo maggiore è $z_1=\frac{B+\sqrt{B^2+4A}}{2}$ e la condizione di stabilità diventa $B<1-A$.

Se $B<0$, il polo di modulo maggiore è $z_2=\frac{B-\sqrt{B^2+4A}}{2}$ e la condizione di stabilità diventa $B>A-1$. Per cui la condizione complessiva (poli reali) è $\boxed{|B|<1-A}$

b) Poli complessi, ossia $A<-B^2/4$. $z_{1,2}=\frac{B\pm j\sqrt{-B^2-4A}}{2}$, $|z_{1,2}|^2=-A$, e la condizione di stabilità diventa $\boxed{A>-1}$

Pertanto, la condizione di stabilità complessiva è $\boxed{-1<A<1-|B|}$ essendo quindi $\boxed{|B|<2}$

Calcolo della anti-trasformata.

a1) Poli reali distinti, $A > -B^2/4$

$$\boxed{H(z) = \frac{z^2 + Dz + C}{z^2 - Bz - A} = 1 + \frac{(D+B)z + C + A}{(z - z_1)(z - z_2)} = 1 + \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\beta}{z - z_2}}$$

essendo $\alpha = \dfrac{(D+B)z_1 + C + A}{z_1 - z_2}$ e $\beta = \dfrac{(D+B)z_2 + C + A}{z_2 - z_1}$.

In questo caso le regioni di convergenza sono 3, ma quella di interesse nostro è quella esterna al polo maggiore, la cui espressione è:

$$h[n] = \delta[n] + \left(\alpha z_1^{n-1} + \beta z_2^{n-1}\right) u[n-1]$$

a2) Poli reali coincidenti $A = -B^2/4$ $\qquad z_1 = B/2$

$$H(z) = \frac{z^2 + Dz + C}{z^2 - Bz - A} = 1 + \frac{(D+B)z + C + A}{(z - z_1)^2}$$

Le regioni di convergenza sono 2. Il segnale destro è espresso dalla

$$h[n] = \delta[n] + \left[n(D+B)z_1 + (n-1)(C+A)\right] z_1^{n-2} u[n-1]$$

Calcolo della anti-trasformata.

b) Poli complessi coniugati, $A < -B^2/4$

$$\boxed{H(z) = \frac{z^2 + Dz + C}{z^2 - Bz - A} = 1 + \frac{(D+B)z + C + A}{(z - z_1)(z - z_1^*)} = 1 + \frac{\alpha}{z - z_1} + \frac{\alpha^*}{z - z_1^*}}$$

essendo $\alpha = \dfrac{(D+B)z_1 + C + A}{z_1 - z_1^*}$.

Anche in questo caso le regioni di convergenza sono 2. Espressi α e z_1 in forma polare, $\alpha = |\alpha| e^{j\varphi_\alpha}$, $z_1 = |z_1| e^{j\varphi_{z_1}}$ Il segnale destro è dato da:

$$h[n] = \delta[n] + 2\cos\left(\varphi_\alpha + (n-1)\varphi_{z_1}\right)|\alpha||z_1|^{n-1} u[n-1]$$

Caso particolare A=-1, sempre con $B^2 < 4$. In questo caso, ipotizzando B>0,

$\tan(\varphi_z) = \sqrt{\dfrac{4}{B^2} - 1}$. Se , $B = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \tan^2(2\pi/P)}}$ $h[n]$ è 'periodico' di periodo P.

Supponiamo di essere in condizioni di stabilità. Calcoliamo la trasformata di Fourier.

$$\boxed{H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{j2\Omega}+De^{j\Omega}+C}{e^{j2\Omega}-Be^{j\Omega}-A}}$$

Si ottiene

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2=\frac{1+C^2+D^2+2D(1+C)\cos(\Omega)+2C\cos(2\Omega)}{1+A^2+B^2-2B(1-A)\cos(\Omega)-2A\cos(2\Omega)}$$

da cui

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|_{\Omega=0}=\left|\frac{1+C+D}{1-A-B}\right| \qquad \left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|_{\Omega=\pi}=\left|\frac{1+C-D}{1-A+B}\right|$$

Pertanto per $C+D=-1$, il comportamento è di tipo passa alto, mentre per $C-D=-1$ è di tipo passa basso.

Un esempio numerico

Sia B=1/2,

Per la stabilità $-1 < A < 1/2$, mentre la condizione per avere poli reali distinti è $A > -1/4$

Scegliamo A=1/9.

Otteniamo z_1=2/3, z_2=–1/6.

Abbiamo 3 regioni di convergenza: $|z| < 1/6$ (risposta sinistra), $1/6 < |z| < 2/3$ (risposta bilatera), $|z| > 2/3$ (risposta destra, stabile, che è quella di nostro interesse).

Sia C=–1/2, e D=1/2, (risposta Passa Basso).

Otteniamo α=1/3 e β=2/3.

Pertanto otteniamo i seguenti valori iniziali della risposta impulsiva.

$y[0]=1,\ y[1]=1,\ y[2]= 1/9,\ y[3]=1/6,\ \ldots$

Applicando la $h[n]=\frac{1}{2}h[n-1]+\frac{1}{9}h[n-2]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n-2]$

otteniamo la seguente tabella.

n	$h[n]$	$h[n-1]$	$h[n-2]$	$\delta[n]$	$\delta[n-1]$	$\delta[n-2]$
0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0
2	1/9	1	1	0	0	1
3	1/6	1/9	1	0	0	0

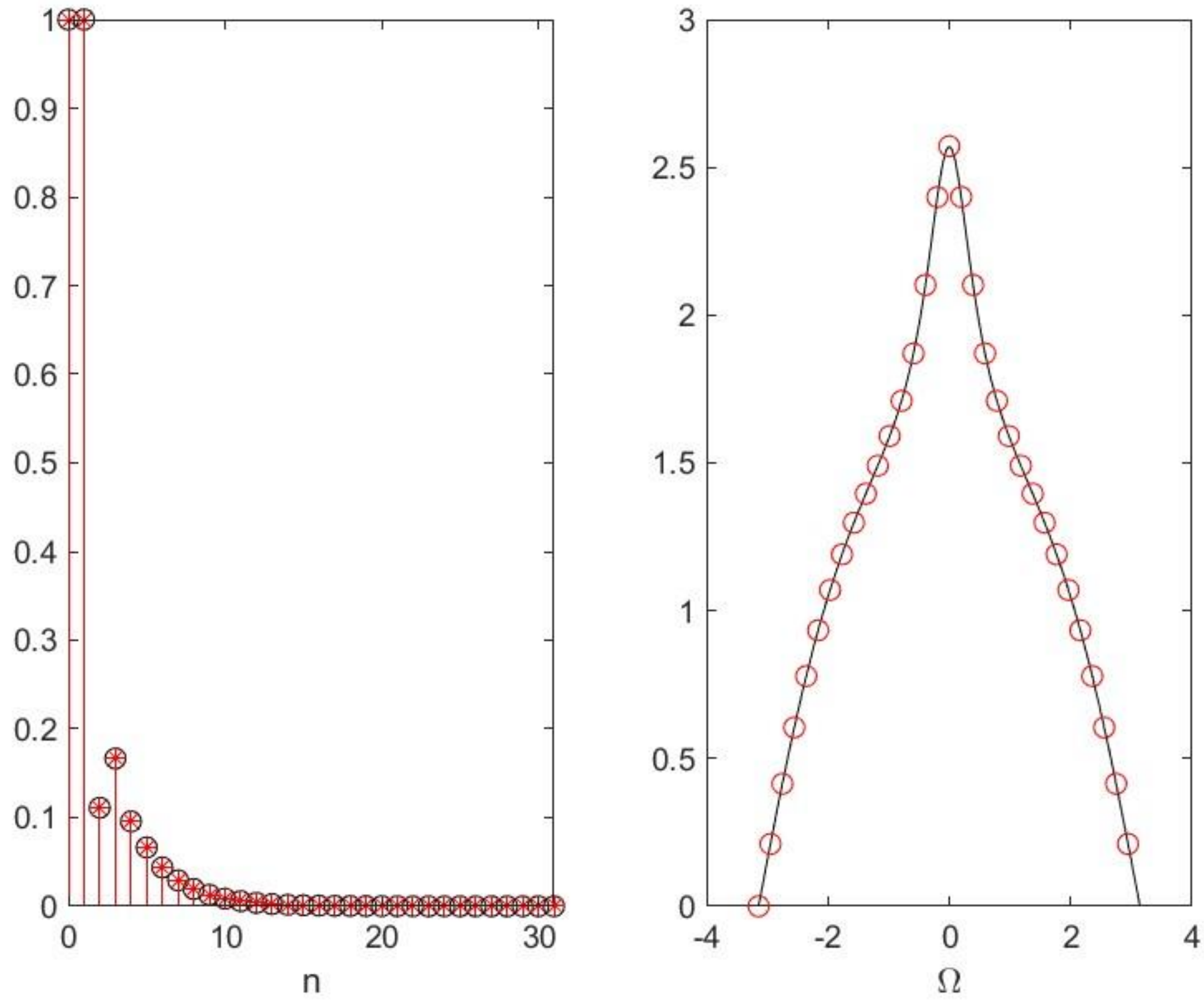
Nella prossima slide una verifica con la divisione lunga.

Determiniamo i primi termini mediante la divisione lunga

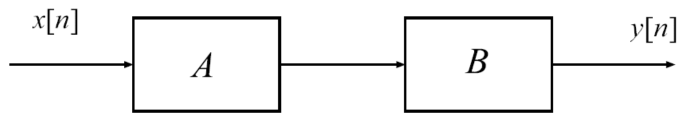
$$
\begin{array}{llll|l}
z^2 & Dz & C & & z^2 - Bz - A \\
\hline
-z^2 & Bz & A & & 1+\left(B+D\right)z^{-1}+\left(A+C+\left(B+D\right)B\right)z^{-2} \\
\cline{1-4}
- & \left(B+D\right)z & A+C & & \\
 & -\left(B+D\right)z & \left(B+D\right)B & \left(B+D\right)Az^{-1} & \\
\cline{1-4}
 & - & A+C+\left(B+D\right)B & \left(B+D\right)Az^{-1} &
\end{array}
$$

Otteniamo

$y[0]=1$,
$y[1]=B+D=1$,
$y[2]= A+C+B(B+D)=1/9$,
$y[3]=(A+C+B(B+D))B+A(B+D)=1/6$,
...


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
n
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-4
-2
0
2
4
Ω

Si consideri il sistema riportato in figura.



Sia $H_A(z) = 1 + 2z^{-2}$ e $h_B[n] = u[n]$.

a) Determinare la risposta complessiva $H(z)$.
b) Quante sono le anti-trasformate?
c) Con riferimento alla anti-trasformata destra, dire se è causale e/o stabile.
d) Determinare l'equazione alle differenze che descrive il sistema.
e) Determinare i primi tre termini della risposta impulsiva.

f) Determinare la risposta al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;

(suggerimento: conviene determinare la risposta come somma di due termini, di cui uno ritardato).

Svolgimento

a) $H_B(z) = \dfrac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \qquad H(z) = \dfrac{z^2+2}{z(z-1)} = \dfrac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}}$.

b) Le anti-trasformate sono 2, una per $0<|z|<1$, e una per $|z|>1$.

c) Nessuna delle regioni di convergenza include il cerchio di raggio unitario. Pertanto non ci sono anti-trasformate stabili.

d) $Y(z)\left(1-z^{-1}\right)=X(z)\left(1+2z^{-2}\right)$ pertanto $y[n]=y[n-1]+x[n]+2x[n-2]$

e) Utilizzando l'equazione alle differenze otteniamo

n	$h[n]$	$h[n-1]$	$\delta[n]$	$\delta[n-1]$	$\delta[n-2]$
0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0
2	3	1	0	0	1
3	3	3	0	0	0

f) $H(z)=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{z-1}2z^{-2}$ e $X(z)=\dfrac{z}{z-1/2}$

Invertendo i due dispositivi, il primo termine della risposta è $y[n]=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}=\dfrac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$

Pertanto $y[n]=2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)u[n]+4\left(1-(1/2)^{n-1}\right)u[n-2]$

Se, in generale, $x[n]=q^{n}u[n]$ otteniamo $y_1[n]=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}u[n]$ e $y[n]=y_1[n]+2y_1[n-2]$

Verifica mediante Matlab ed equazione alle differenze.

```
clear
N=20; q=1/2; %parametri, q diverso da 1
nx=0:N-1;% asse delle ascisse
x=q.^nx;%segnale di ingresso
y=zeros(1,N);%segnale di uscita da calcolare con ricorsione
y(1)=x(1); %primo valore
y(2)=y(1)+x(2);%secondo valore
for i0=3:N
   y(i0)=y(i0-1)+x(i0)+2*x(i0-2); %calcolo gli altri valori
end
yt1=(1-q.^(nx+1))/(1-q);%primo termine della risposta
yt=yt1; %primo termine della risposta
yt(nx>1)=yt(nx>1)+2*yt1(1:N-2); %sommo il secondo termine
stem(nx,y,'k')
hold on
stem(nx,yt,'r*')
hold off
```

Esercizi (S2d)

Verifica mediante Matlab ed equazione alle differenze e ingresso $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n < N_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

```
clear
N=20; N1=5; %parametri,
nx=0:N-1;% asse delle ascisse
x=zeros(1,N); %segnale di ingresso
x(nx<N1)=1;
y=zeros(1,N);%segnale di uscita da calcolare con ricorsione
y(1)=x(1); %primo valore
y(2)=y(1)+x(2);%secondo valore
for i0=3:N
   y(i0)=y(i0-1)+x(i0)+2*x(i0-2); %calcolo gli altri valori
end
yt1=zeros(1,N);
yt1(nx<N1)=nx(nx<N1)+1;
yt1(nx>=N1)=N1; %primo termine della risposta
yt=yt1; %primo termine della risposta
yt(nx>1)=yt(nx>1)+2*yt1(1:N-2); %sommo il secondo termine
stem(nx,y,'k')
hold on
stem(nx,yt,'r*')
hold off
```

Si consideri il sistema descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$2y[n]-y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

a) Dire se il sistema è stabile.
b) Determinare i primi 5 termini della risposta impulsiva.
c) Determinare la risposta al gradino unitario.
d) Determinare come si modifica la risposta se $y[-1]=1$ e $y[n]=0$, $n<-1$.

Svolgimento

a) $$H(z)=\frac{1+2z^{-2}}{2-z^{-1}}=\frac{z^2+2}{z(2z-1)}$$

Il sistema ha due poli, in $z=0$ e $z=1/2$, La regione di convergenza $|z|>1/2$, che corrisponde alla risposta destra, include il cerchio di raggio unitario. Pertanto il sistema è stabile.

Esercizi (S3b)

b) Utilizzando l'equazione alle differenze otteniamo i risultati riportati in tabella.

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}x[n]+x[n-2]$$

n	**h[n]**	**h[n-1]**	**δ[n]**	**δ[n-1]**	**δ[n-2]**
0	1/2	0	1	0	0
1	1/4	1/2	0	1	0
2	9/8	1/4	0	0	1
3	9/16	9/8	0	0	0
4	9/32	9/16	0	0	0
5	9/64	9/32	0	0	0

c) $$Y(z)=\frac{z^2+2}{z(2z-1)}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2+2}{(2z-1)(z-1)}=\frac{z^2+2}{2z^2-3z+1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{z+1}{(z-1/2)(z-1)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{(z-1)}-\frac{3}{(z-1/2)}\right)$$

Pertanto $\boxed{y[n]=\frac{1}{2}\delta[n]+3\left(1-3/2^{n+1}\right)u[n-1]}$.

d) Consideriamo la trasformata unilatera. Dall'equazione alle differenze otteniamo:

$$Y^+(z)=\frac{1}{2}\left(y[-1]+z^{-1}Y^+(z)\right)+\frac{1}{2}X^+(z)+X^+(z)z^{-2}$$

$$\boxed{Y^+(z)=\frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+X^+(z)\frac{1+2z^{-2}}{2-z^{-1}}}$$

Pertanto, alla risposta forzata (determinata in precedenza) si aggiunge il termine

$$\boxed{y_l[n]=y[-1]\frac{1}{2^{n+1}}u[n],\quad n\geq 0}$$

d) Nella prima tabella abbiamo la risposta al gradino con y[-1]=0.

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + x[n-2]$$

n	**y[n]**	**y[n-1]**	**x[n]**	**x[n-1]**	**x[n-2]**
-1	0	0	0	0	0
0	1/2	0	1	0	0
1	3/4	1/2	1	1	0
2	15/8	3/4	1	1	1
3	39/16	15/8	1	1	1
4	87/32	27/16	1	1	1

Nella seconda tabella abbiamo la risposta al gradino con y[-1]=1.

n	**y[n]**	**y[n-1]**	**x[n]**	**x[n-1]**	**x[n-2]**
-1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0
2	2	1	1	1	1
3	5/2	2	1	1	1
4	11/4	5/2	1	1	1