

Richiami sul calcolo delle probabilità



- Modello matematico
- Assiomi del calcolo delle probabilità
- Probabilità di un evento
- Probabilità condizionata
- Variabili aleatorie
- Funzione di distribuzione – Densità di probabilità
- Medie
- Variabili aleatorie multiple
- Funzione di distribuzione e densità di probabilità congiunta
- Indipendenza e incorrelazione



Definizioni

Esperimento aleatorio

Esperimento il cui risultato non può essere predetto con certezza

- Es:** lancio di una moneta,
lancio di un dado,
estrazione di una carta da un mazzo,
misura di una tensione di rumore in un dato istante,
misura del livello di un segnale telefonico in un dato punto, ecc
.....



Uscita elementare

ogni possibile risultato dell'esperimento

Spazio dei campioni (S)

l'insieme di tutte le possibili uscite elementari (S_i)

{ discreto (facce di un dado)
non discreto (valore di una tensione di rumore)

Evento

qualsiasi sottoinsieme di S

Es: uscita maggiore di 3,

uscita compresa tra 0 e 2.25,

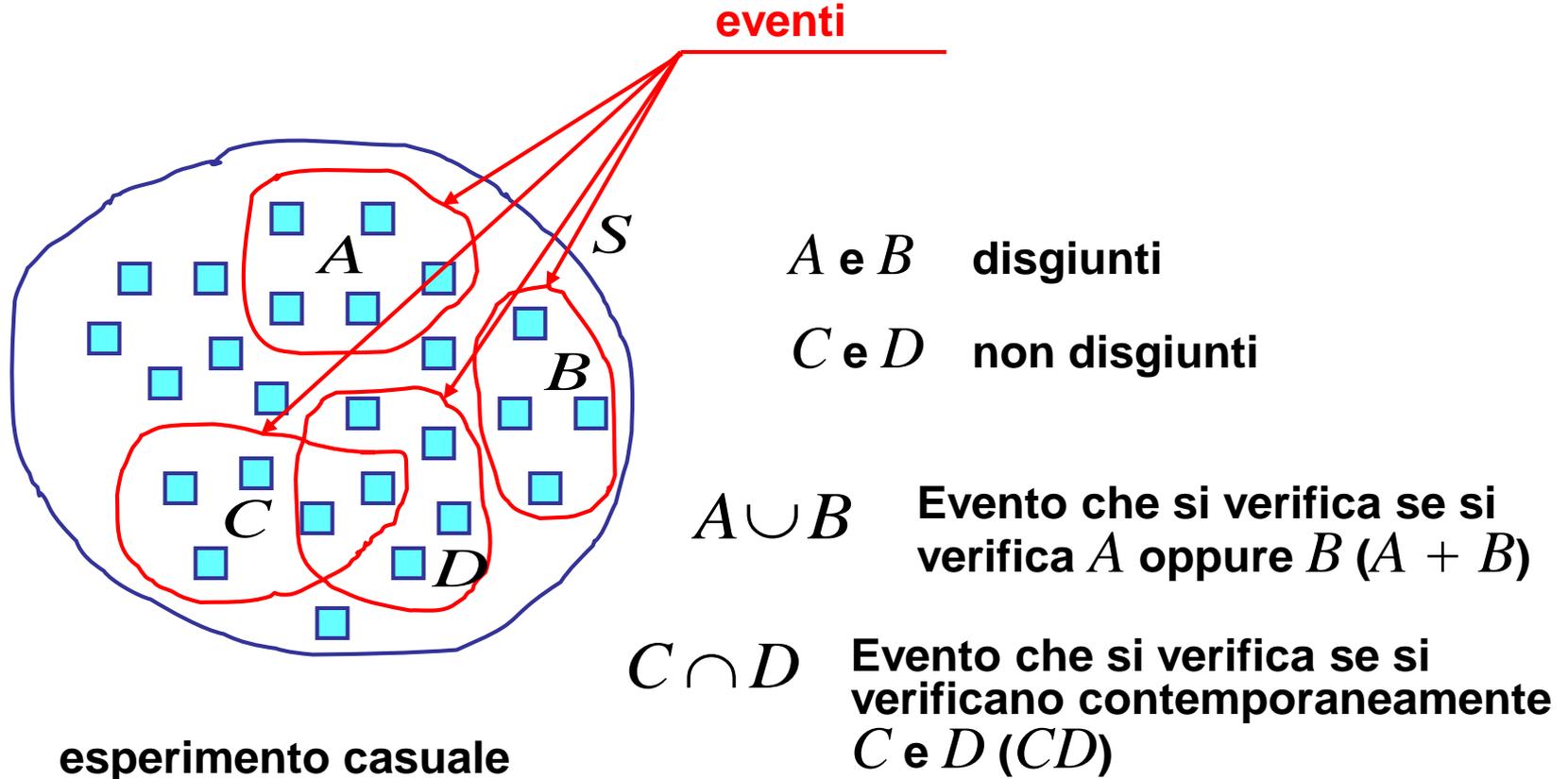
.....



Evento complementare (di un evento A)
evento costituito da tutte quelle uscite
che non appartengono ad A
viene indicato con \bar{A}

Eventi disgiunti (che si escludono a vicenda)
eventi che non hanno uscite elementari in comune
(se si verifica uno non si verifica l'altro, e viceversa)





Ricordare che: **le uscite elementari sono anch'esse eventi**

Sono eventi a due a due disgiunti



$P(A)$ Misura assegnata a ciascun evento in modo da rispettare le seguenti condizioni (**assiomi**):

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ per ciascun evento A

2) $P(S) = 1$

3) Se $E_1, E_2, E_3 \dots$ sono eventi a due a due disgiunti,

$(E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j)$, allora:

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$$



Conseguenze

Dagli assiomi della probabilità discende che:

$$\text{a) } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{b) } P(\emptyset) = 0$$

$$\text{c) } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Uscite elementari \Rightarrow eventi tra loro disgiunti

Se S è discreto,

$$P(E) = \sum_i P(\text{uscita elementare } i\text{-esima} \subset E)$$



Es:

esperimento:

estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte

$E = \{\text{uscita di una figura}\}$

Per simmetria tutte le uscite elementari avranno la stessa probabilità.

Per l'assioma 2) $P(\text{uscita elementare}) = 1/52$

Quindi $P(E) = 12/52$



$$P(E_1/E_2)$$

Dati due eventi E_1 e E_2 si definisce

probabilità di E_1 condizionata a E_2

la probabilità di E_1 allorquando si sa che E_2 si è verificato

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_2)} \quad [P(E_2) \neq 0]$$

Es.:

esperimento: lancio di un dado

$A = \{\text{uscita maggiore di } 3\}$

$B = \{\text{uscita pari}\}$

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = 1/2$$

$$P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/2$$

Probabilità di uscita > 3

sapendo che l'uscita è pari

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(4) + P(6)}{1/2} = 2/3$$



Dato un evento A , $P[A]$ riflette la nostra conoscenza in merito al verificarsi di A . (probabilità a priori)

A volte questa conoscenza può cambiare se sappiamo che si è verificato un evento B

Esempio:

Esperimento: **esecuzione di un test su due circuiti integrati, provenienti dallo stesso wafer di silicio e da una linea di produzione di alta qualità.**

Risultato: **a accettato** **r respinto**

Uscite elementari: **rr, ra, ar, aa**

Evento A : secondo circuito difettoso $A = \{ar, rr\}$

Evento B : primo circuito difettoso $B = \{ra, rr\}$



$P[A]$ Molto bassa (i circuiti provengono da una linea di produzione di alta qualità)

Se è noto che il primo circuito è risultato difettoso, la probabilità che anche il secondo sia respinto aumenta: (i due circuiti provengono dallo stesso wafer)

$$P[A/B] > P[A]$$

Esempio:

Probabilità a priori:

$$P[rr] = 0.01, \quad P[ra] = 0.01, \quad P[ar] = 0.01, \quad P[aa] = 0.97$$

Secondo circuito respinto $P[A] = P[rr] + P[ar] = 0.02$

Primo circuito respinto $P[B] = P[rr] + P[ra] = 0.02$



$$P[A/B] = \frac{P[AB]}{P[B]} = \frac{P[\text{ambedue respinti}]}{P[\text{primo respinto}]}$$

$$P[A/B] = \frac{P[rr]}{P[B]} = \frac{0.01}{0.02} = 0.5$$



Definizione: due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se:

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

Equivalentemente: due eventi A e B sono indipendenti se e solo se:

$$P[A/B] = P[A] \quad P[B/A] = P[B]$$

Il fatto che si sia verificato B non altera la probabilità di A (e viceversa).

Indipendenti e disgiunti non sono sinonimi

Due eventi A e B sono disgiunti se non hanno uscite elementari in comune

$$A \cap B = \phi \quad P[AB] = 0$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$



Indipendenza, mutua esclusione

Esempio:

Lungo una strada ci sono tre semafori.

Per semplicità possono essere soltanto color **rosso** o color **verde** e ogni uscita elementare (sequenza di tre semafori) sia equiprobabile

Spazio dei campioni: $S = \{rrr, rrv, rvr, rvv, vrr, vrv, vvr, vvv\}$

Evento R_i : semaforo i -esimo rosso

Evento V_i : semaforo i -esimo verde



Indipendenza, mutua esclusione

$$R_2 = \{rrr, rrv, vrr, vrv\} \quad P[R_2] = 1/2$$

$$V_2 = \{rvr, rvv, vvr, vvv\} \quad P[V_2] = 1/2$$

$$P[R_2V_2] = 0 \neq P[R_2]P[V_2] \quad \text{eventi dipendenti}$$

$$R_2 \cap V_2 = \emptyset \quad \text{eventi disgiunti}$$

$$R_2 = \{rrr, rrv, vrr, vrv\} \quad P[R_2] = 1/2$$

$$R_1 = \{rvr, rvv, rrv, rrr\} \quad P[R_1] = 1/2$$

$$R_1 \cap R_2 = \{rrr, rrv\} \quad \text{eventi non disgiunti}$$

$$P[R_1R_2] = 1/4 = P[R_1]P[R_2] \quad \text{eventi indipendenti}$$



Formula di Bayes

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$$

Teorema della probabilità totale

Sia: $\{E_i\}_{i=1}^N = \text{Partizione di } S$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^N E_i = S \\ E_i E_j = \phi \quad i \neq j \end{array} \right\}$$

Allora:

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A/E_i)P(E_i)$$

Se $P(E_1/E_2) = P(E_1)$

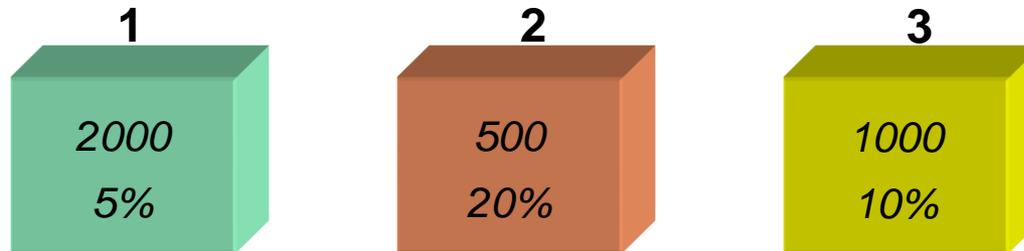
E_1 e E_2 si dicono **statisticamente indipendenti**

Se due eventi sono indipendenti $P(E_1 E_2) = P(E_1) P(E_2)$



Esempio

Scatole con componenti elettronici



Esperimento 1:

scelta a caso una scatola, estrazione a caso di un componente

Valutare la probabilità che il componente sia difettoso

Esperimento 2:

Esame del componente estratto, che risulta difettoso

Valutare la probabilità che il componente provenga dalla scatola N. 3



Esempio

S : 3500 uscite elementari

Evento B_i : Tutti i componenti della scatola i ($i = 1, 2, 3$)

Gli eventi B_i costituiscono una partizione di S

La scatola è scelta **a caso** $\longrightarrow P(B_i) = \frac{1}{3}$

Dai dati del problema si deduce che:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Dif / B_1) = 100/2000 = 0.05 \\ P(Dif / B_2) = 100/500 = 0.20 \\ P(Dif / B_3) = 100/1000 = 0.10 \end{array} \right.$$

Dal teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(Dif) &= \\ &= P(Dif / B_1)P(B_1) + P(Dif / B_2)P(B_2) + P(Dif / B_3)P(B_3) \\ &= 0.05 \times \frac{1}{3} + 0.20 \times \frac{1}{3} + 0.10 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{60} \approx 0.117 \end{aligned}$$



Esempio

Esperimento 2:

Esame del componente estratto, che risulta difettoso

Valutare la probabilità che il componente provenga dalla scatola N. 3

La probabilità cercata è: $P(B_3/Dif)$

Per mezzo della formula di Bayes:

$$P(B_3/Dif) = \frac{P(Dif/B_3)P(B_3)}{P(Dif)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{60}} = \frac{2}{7} \cong 0.286$$



- a) Se l'esperimento A ha n possibili uscite elementari e l'esperimento B ne ha k , allora ci sono nk uscite elementari quando si eseguono entrambi gli esperimenti

A = lancio di una moneta (T,C)

B = lancio di un dado (1,2,3,4,5,6)

C = "lancio di una moneta e di un dado"

(T1,T2,T3,T4,T5,T6,C1,C2,C3,C4,C5,C6)

- b) In generale, se un esperimento E è composto da k subesperimenti E_1, \dots, E_k , ove E_i ha n_i uscite elementari, allora E ha $\prod_{i=1}^k n_i$ uscite elementari



Esempio: quante sono le possibili sequenze ordinate di 52 carte estratte da un mazzo di 52 carte?

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times \dots = 52!$$

Quante sono le possibili sequenze ordinate di n carte estratte da un mazzo di N carte?

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

n - permutazioni di N oggetti distinti



c) Sequenze non ordinate (combinazioni)

Pur comprendendo gli stessi oggetti, due n – permutazioni di N oggetti possono essere diverse, se in esse gli oggetti sono disposti secondo un ordine differente.

Se l'ordine è irrilevante, si parla di combinazioni di n oggetti scelti tra N oggetti distinti

Poiché le sequenze comprendenti gli stessi n oggetti sono in numero di $n!$, il numero di n – combinazioni è :

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$



Una squadra di basket ha 11 giocatori. In quanti modi diversi si possono scegliere i 5 partenti?

Risposta: $\binom{11}{5} = 462$

Si scelgano 7 carte da un mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità di non trovare neanche una donna?

Risposta: ci sono $H = \binom{52}{7}$ possibili mani di 7 carte. Ognuna di esse ha

probabilità $1/H$. Ci sono $H_{NQ} = \binom{48}{7}$ mani di 7 carte senza una donna. Poiché tutte le mani sono equiprobabili, la probabilità di non trovare neanche una donna in 7 carte è:

$$H_{NQ} / H = \frac{45 \times 44 \times 43 \times 42}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = 0.5504$$



d) Sequenze con ripetizione

Sono sequenze di n oggetti estratti da N oggetti distinti, immaginando che ad ogni estrazione (subesperimento) l'oggetto precedentemente estratto venga re-inserito negli N possibili oggetti

Il loro numero è N^n

Esempio: quante sono le colonne distinte del Totocalcio?

$N = 3$ (numero oggetti distinti 1,2,X)

$n = 13$ (lunghezza delle sequenze)

$$3^{13} = 1.594.323$$



Prove ripetute indipendenti

Si consideri un esperimento che consiste nel ripetere più volte la medesima prova. Ogni volta il risultato può essere “successo” con probabilità p o “insuccesso” con probabilità $1-p$.

Inoltre il risultato di ciascuna prova è **indipendente** dall’esito delle precedenti.

Le uscite dell’esperimento sono sequenze di successi e insuccessi, rappresentabili ad esempio come sequenze di uni e di zeri.

Sia $S_{k,n}$ l’evento “ k successi in n prove”

a) Ogni uscita con k successi ha probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$

b) Ci sono $\binom{n}{k}$ uscite che hanno k successi.

Quindi:

$$P[S_{k,n}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



Esempio

Si trasmetta una sequenza di n bit su un canale che ha una probabilità di errore p_e , e si ipotizzi che gli errori siano statisticamente indipendenti.

La probabilità di ricevere una sequenza senza errori è: $P_c = (1 - p_e)^n$

Si supponga di introdurre ora della ridondanza, incrementando la lunghezza della sequenza a n_1 . In questo modo alcuni errori potranno essere corretti. Sia ora t il numero di errori correggibili.

La probabilità di ricevere una sequenza con errori correggibili è

$$P_c = \sum_{k=0}^t \binom{n_1}{k} p_e^k (1 - p_e)^{n_1 - k}$$

Si ipotizzi ad esempio $p_e=0.1$ e $n=4$, otteniamo $P_c=0.656$.

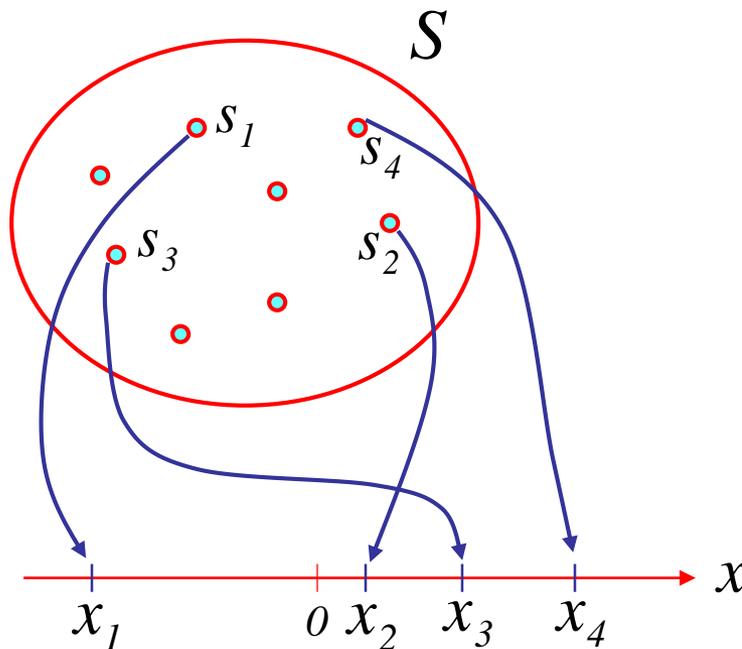
Supponiamo di introdurre ora ridondanza, ponendo $n_1=7$ e $t=1$.

Otteniamo $P_c=0.478+0.372=0.850$



Definizione:

legge di corrispondenza tra uscite elementari e numeri reali



E' possibile definire degli eventi tramite una variabile aleatoria

$$Es: A = \{\mathbf{x} \leq x\},$$

$$B = \{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\},$$

$$C = \{\mathbf{x} > x\}$$

NB.

X Nome della variabile aleatoria

x Numero reale,
valore **eventualmente** assunto dalla variabile aleatoria



Definizione:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

NB!

Consente di valutare la probabilità di eventi espressi tramite X :

$$P(X \leq x_1) = F_X(x_1)$$

$$P(x_2 < X \leq x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_2)$$

Complementare:

$$P(X > x_1) = 1 - F_X(x_1)$$

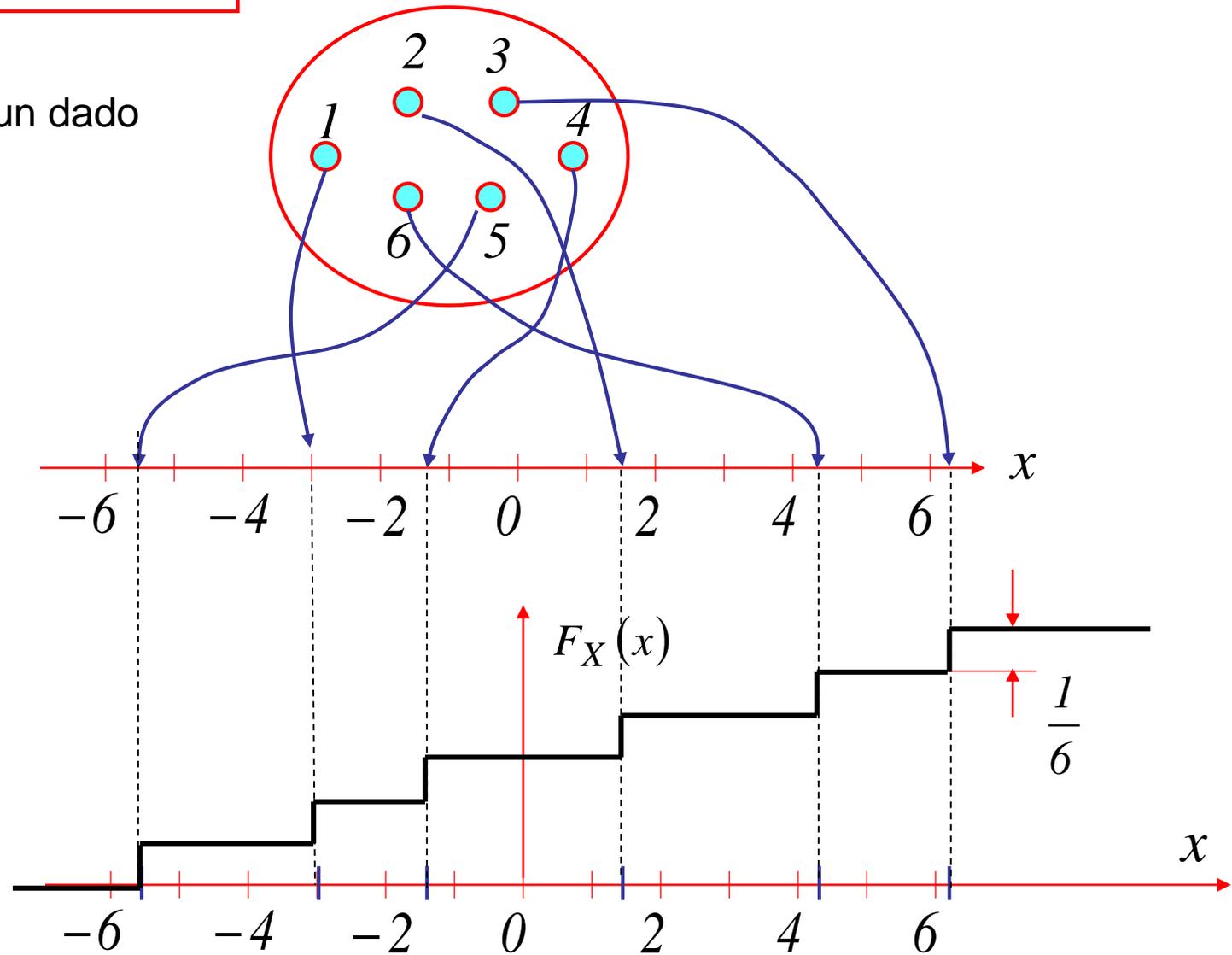
$F_X(x)$ è una probabilità e pertanto è compresa tra 0 e 1.



Esempio: variabile aleatoria discreta

S insieme discreto

Lancio di un dado



Osservazioni:

La funzione di distribuzione presenta una discontinuità in corrispondenza ai valori x_k assunti (**con probabilità $\neq 0$**) dalla variabile aleatoria

In corrispondenza ai valori x_k la funzione di distribuzione presenta un salto pari a $P(x_k)$

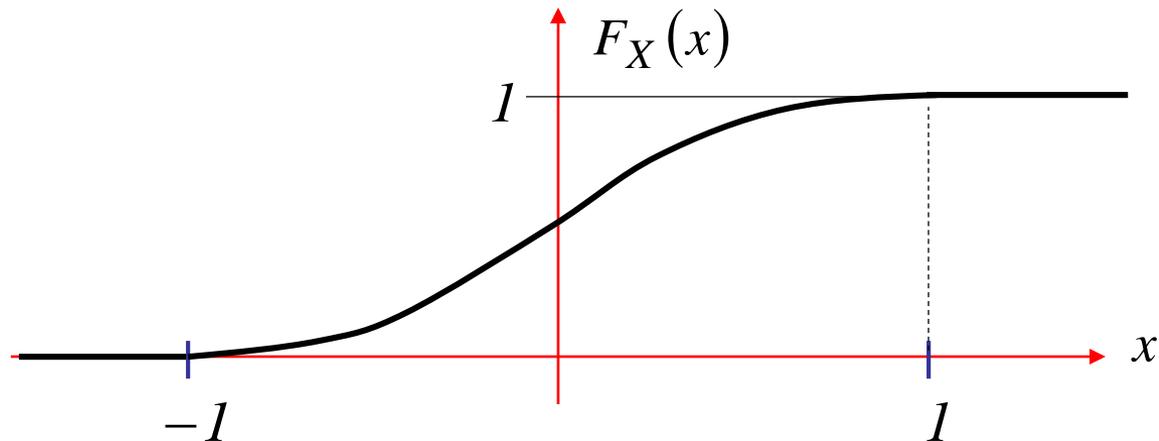
- 1) $F_X(x) \geq 0$
- 2) $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(+\infty) = 1$
- 3) $x_1 > x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \geq F_X(x_2)$
- 4) $F_X(x)$ discontinua in x se $P(s; s \rightarrow x) \neq 0$



Esempio: variabile aleatoria continua

S insieme continuo

X = segnale telefonico, di ampiezza limitata tra 1 e -1



In questo caso $F_X(x)$ è continua

$$P(X = x; -1 < x < 1) = 0$$

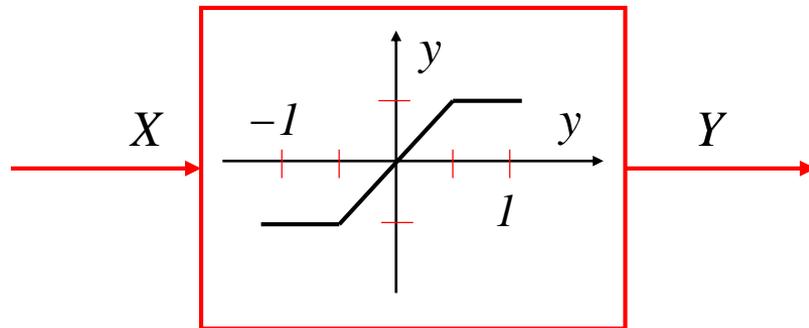
$$P(x_1 < X \leq x_2) \neq 0$$



Esempio: variabile aleatoria mista

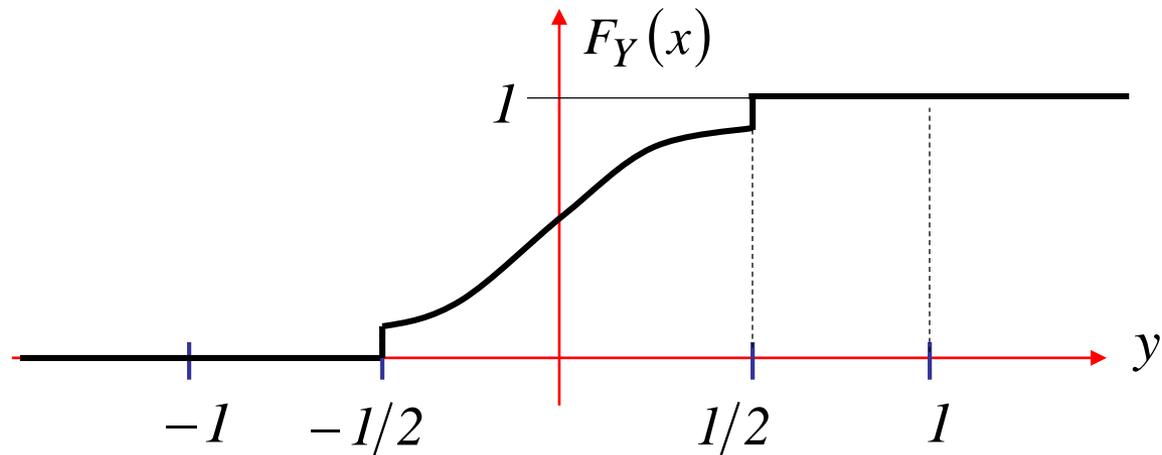
S insieme continuo, con 2 valori con probabilità $\neq 0$

X = segnale telefonico, con ampiezza tra 1 e -1 ,
limitato all'intervallo -0.5 e $+0.5$



$$P_Y(1/2) \neq 0$$

$$P_Y(-1/2) \neq 0$$



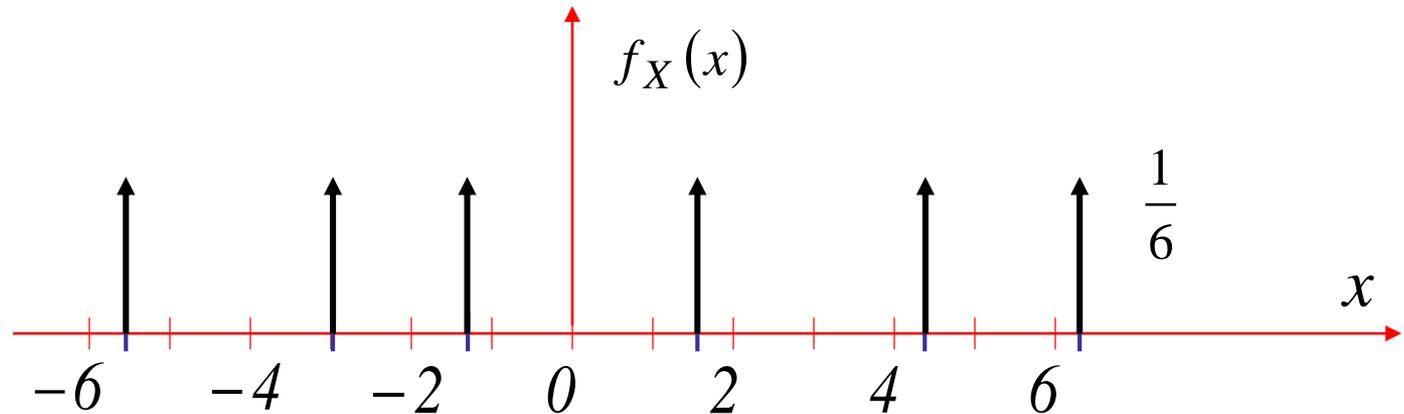
Densità di probabilità

Definizione: $f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}$

Significato: $f_X(x)dx = dF_X = \Pr\{x < X \leq x + dx\}$

Se S discreto: $f_X(x) = \sum_{i=1}^N P(x_i)\delta(x - x_i)$

I valori $P(x_i)$ sono detti probabilità.



Esempio: lancio del dado



$$1) f_X(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$3) P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi = F_X(x)$$

$$4) P(x_2 < X \leq x_1) = \int_{x_2}^{x_1} f_X(\xi) d\xi$$

$$5) P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(\xi) d\xi$$

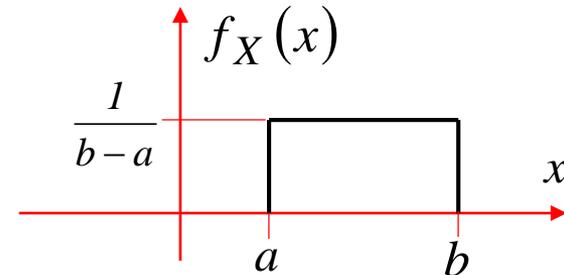
$f_X(x)$ è una densità di probabilità ed è maggiore di 0.

$f_X(x)dx$ è una probabilità elementare.



Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

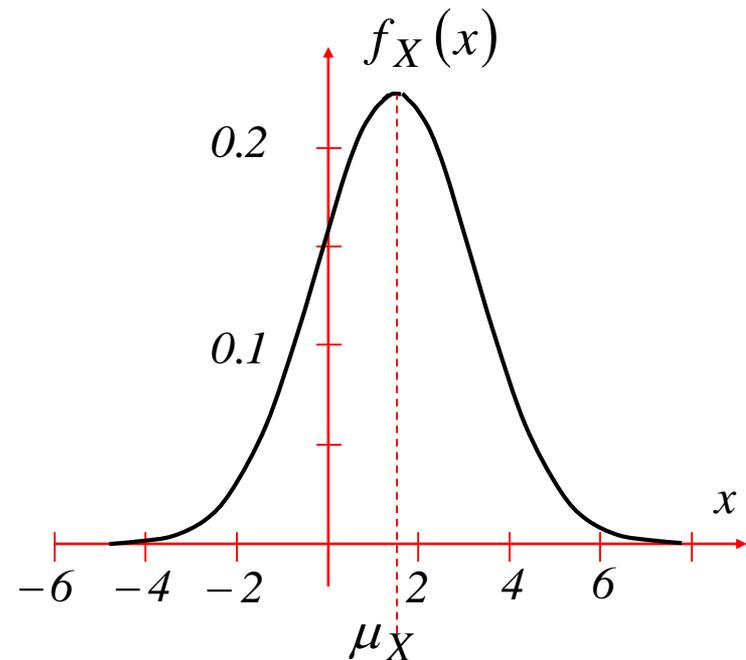


Gaussiana

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

μ_X = valor medio

σ_X^2 = varianza



Binomiale (prove ripetute)

In corrispondenza ad un esperimento,

consideriamo l'evento A “successo” e l'evento “insuccesso”.

$$\text{Sia: } P\{A\} = p \qquad P\{\bar{A}\} = 1 - p$$

variabile aleatoria X : x = numero di successi in N prove consecutive
indipendenti

X assume i valori $0, 1, 2, \dots, N$ con probabilità:

$$P\{X = k\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \delta(x-k)$$

$$\left\{ \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!} \right\}$$



Valor medio di X :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = m_X, \mu_X \dots$$

Per variabili casuali discrete:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i [P\{X = x_i\} \delta(x - x_i)] dx \\ &= \sum_i P\{X = x_i\} \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - x_i) dx = \sum_i P\{X = x_i\} x_i \end{aligned}$$

Valor medio di $Y=g(X)$ (funzione di variabile aleatoria):

Teorema del valor medio

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad \text{ma anche} \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

formula importantissima !!!



Medie importanti

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad \text{Momento di ordine } n$$

$$E\{(X - \mu_X)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx \quad \text{Momento centrale di ordine } n$$

Momento centrale di ordine 2 = **Varianza** (σ_X^2)

$$\sigma_X^2 = E\{(X - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx$$

Relazione importante: $\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \mu_X^2$



1) variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-a$ e a

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-a}^{+a} x \frac{1}{2a} dx = 0$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-a}^{+a} x^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{a^2}{3}$$

2) variabile aleatoria gaussiana:

$$\mu_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx$$



Metodo per il calcolo della f_y

- Sia $Y = g(X)$

- Calcolare $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

- La funzione cercata è $f_Y(y) = \frac{dF_Y(x)}{dy}$

- Esempio: $Y = aX + b, a > 0$

$$F_Y(y) = P\{aX + b \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(x)}{dy} = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$E[Y] = aE[X] + b$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 = a^2 \sigma_X^2$$

- **Applicazioni:** sia X una v. a. uniformemente compresa tra 0 e 1.

Si considerino due costanti, a e b , con $b > a$.

La variabile aleatoria $Y = a + X(b-a)$ è uniformemente compresa tra a e b .

Sia N una v. a. gaussiana con media nulla e varianza unitaria (**normale**).

$Y = \sigma_y N + \mu_y, \sigma_y > 0$ è una v.a. gaussiana con media μ_y e varianza σ_y^2 .



Esempio

■ sia X una v. a. uniformemente compresa tra 0 e 1. Sia $Y=X^2$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$F_Y(y) = P\{X^2 \leq y\} = P\{X \leq \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y})$$

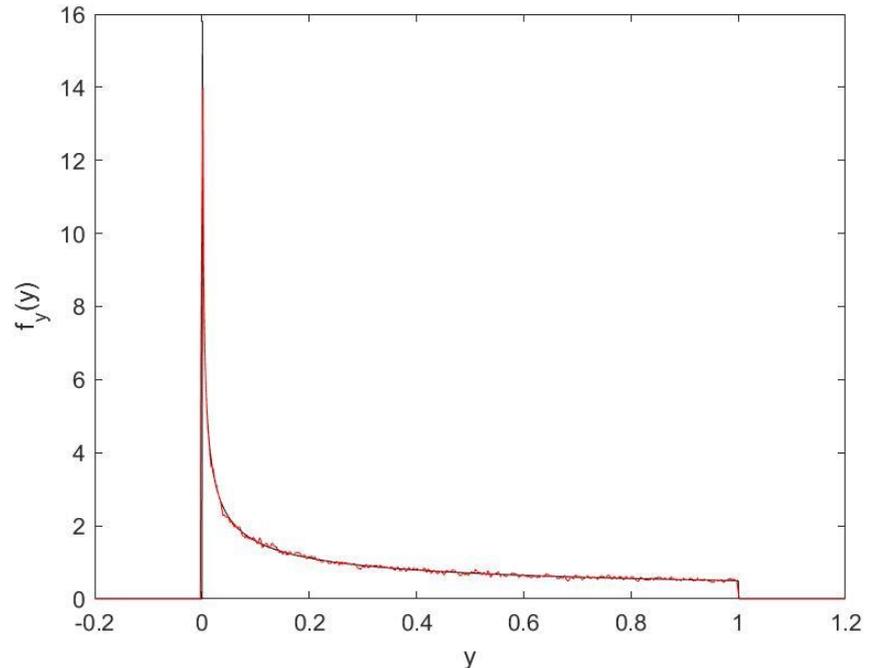
$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

$$E\{Y = X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} dy = \frac{1}{3}$$

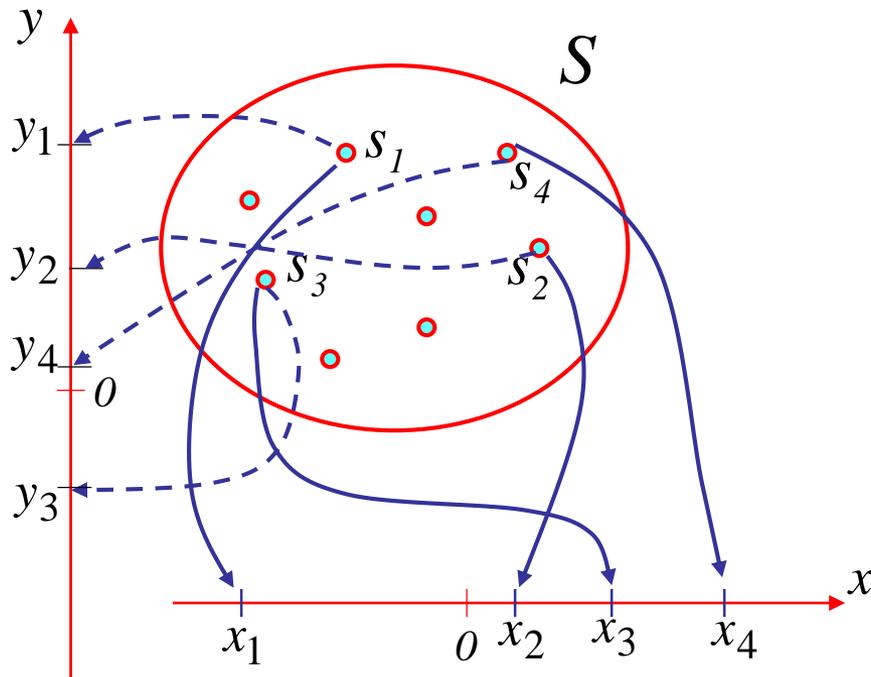


Verifica con Matlab (script S1)

```
clear
x=rand(1,1e5);
y=x.^2;
xa=-.2:.001:1.2;
[cdfy,pdfy]=ecdf2(xa,y); %stima di pdf e cdf empirica
pdft=zeros(1,length(xa));
pdft(xa>0&xa<=1)=1./(2*(xa(xa>0&xa<=1)).^(1/2));
plot(xa,pdft,'k');
hold on;
plot(xa,pdfy,'r');
xlabel('y');
ylabel('f_y(y)');
hold off;
```



Coppia di variabili aleatorie



Funzione di distribuzione congiunta

$$F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

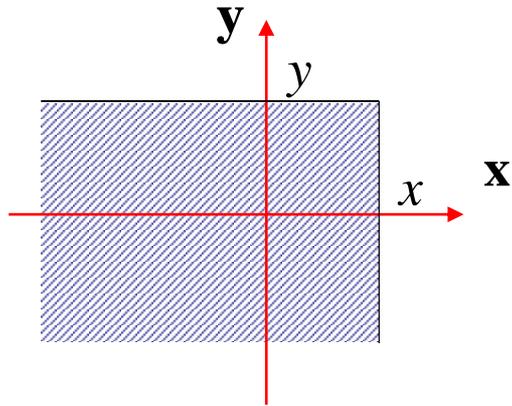
$$P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)$$

$$P\{X \leq x, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)$$

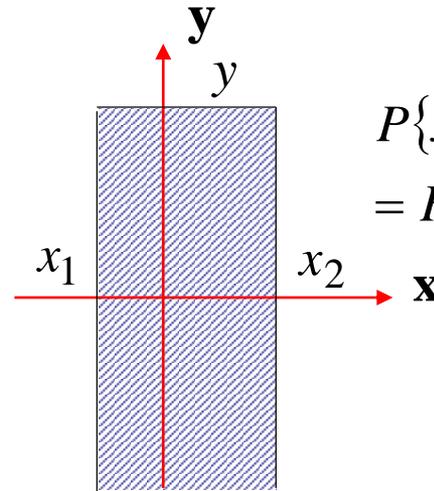
$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$



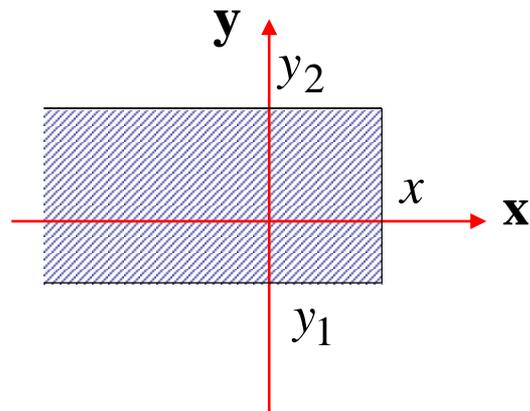
Funzione di distribuzione congiunta



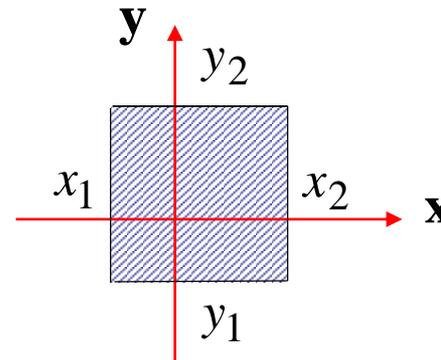
$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = F_{XY}(x, y)$$



$$P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} \\ = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)$$



$$P\{X \leq x, y_1 < Y \leq y_2\} \\ = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)$$



$$P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\ = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) \\ - F_{XY}(x_1, y_2) + F_{XY}(x_1, y_1)$$



Densità di probabilità congiunta

Definizione: $f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$

Da $f_{XY}(x, y)$ a $F_{XY}(x, y)$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) dv du$$

Poiché $f_{XY}(x, y) dx dy = P\{x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy\}$

 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x, y) dx dy$



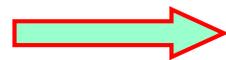
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

Variabili statisticamente indipendenti:

X e Y sono **indipendenti** se gli eventi: $\{x \in R_A\}$ e $\{y \in R_B\}$ sono indipendenti, qualunque siano gli insiemi R_A e R_B rispettivamente sugli assi x e y

In questo caso: $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$



$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$



Densità condizionate

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ per } y \text{ tale che } f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, \text{ per } x \text{ tale che } f_X(x) > 0$$

Se X e Y sono statisticamente indipendenti: $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$,

Esempio di variabili aleatorie non indipendenti

$$f_{XY}(xy) = \begin{cases} 3x & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad E[XY] = 3/10$$

Densità Marginali

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad E[X] = 3/4 \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad E[Y] = 3/8$$

Densità Condizionate

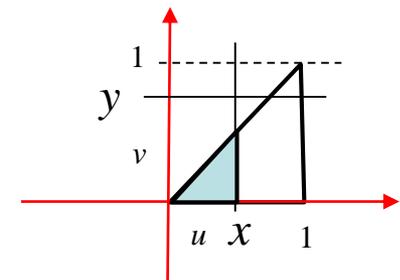
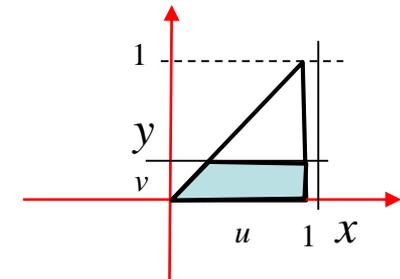
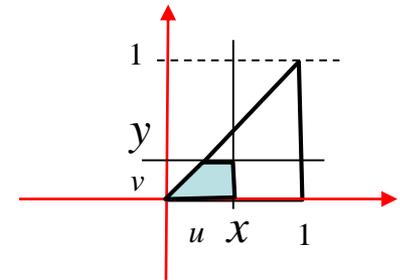
$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{1-y^2} & 0 \leq y < 1, y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Cumulativa di una coppia di v.a.

$$f_{XY}(xy) = \begin{cases} 3x & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ e/o } y \leq 0 \\ \int_0^y \int_0^x 3udvdu + \int_y^x \int_0^y 3udvdu = \frac{y}{2}(3x^2 - y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ \int_0^y \int_0^1 3udvdu + \int_y^1 \int_0^y 3udvdu = \frac{y}{2}(3 - y^2) & x \geq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \int_0^x \int_0^x 3udvdu = x^3 & 0 \leq x \leq 1, y \geq x \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$



Densità condizionata a un evento

Sia B un evento di probabilità $P[B]>0$. La probabilità condizionata congiunta di una coppia di v.a. X e Y dato B è data da:

$$f_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} f_{X,Y}(x,y)/P[B] & (x,y) \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio $f_{XY}(xy) = \begin{cases} 3x & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Sia $B = \{X+Y \geq 1\}$ $P[B] = \int_{1/2}^1 3x \int_{1-x}^x dy dx = \frac{5}{8}$

$$f_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} x \cdot 24/5 & 1/2 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[XY|B] = \frac{24}{5} \int_{1/2}^1 x^2 \int_{1-x}^x y dy dx = \frac{17}{40}$$

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \frac{8}{5} \int_{1-x}^x 3x dy = \frac{24}{5} x(2x-1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X|B] = \frac{24}{5} \int_{1/2}^1 x^2(2x-1) = \frac{17}{20}$$

$$f_{Y|B}(x) = \begin{cases} \frac{24}{5} \int_{1-y}^1 x dx = \frac{12}{5} y(2-y) & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{24}{5} \int_y^1 x dx = \frac{12}{5} (1-y^2) & \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[Y|B] = \frac{12}{5} \left[\int_0^{1/2} y^2(2-y) dy + \int_{1/2}^1 y(1-y^2) dy \right] = \frac{1}{2}$$



Densità condizionata a un evento (Script Matlab S2)

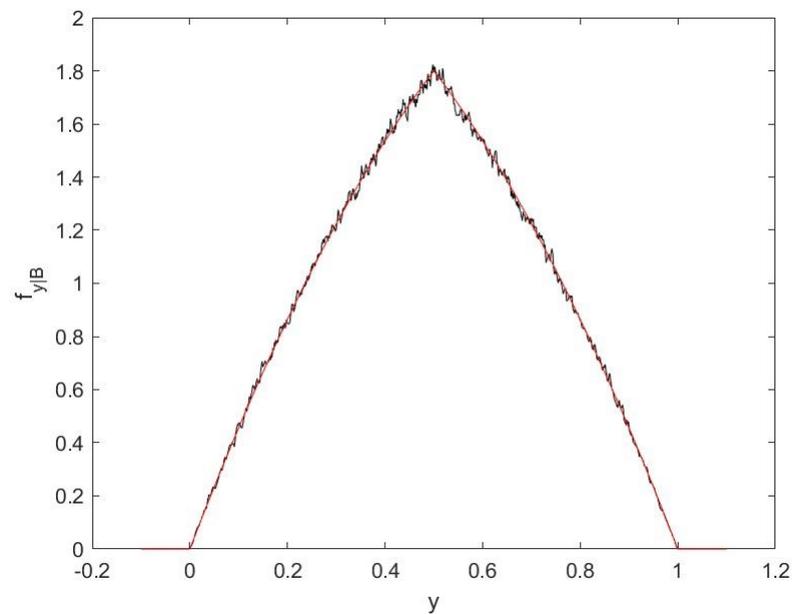
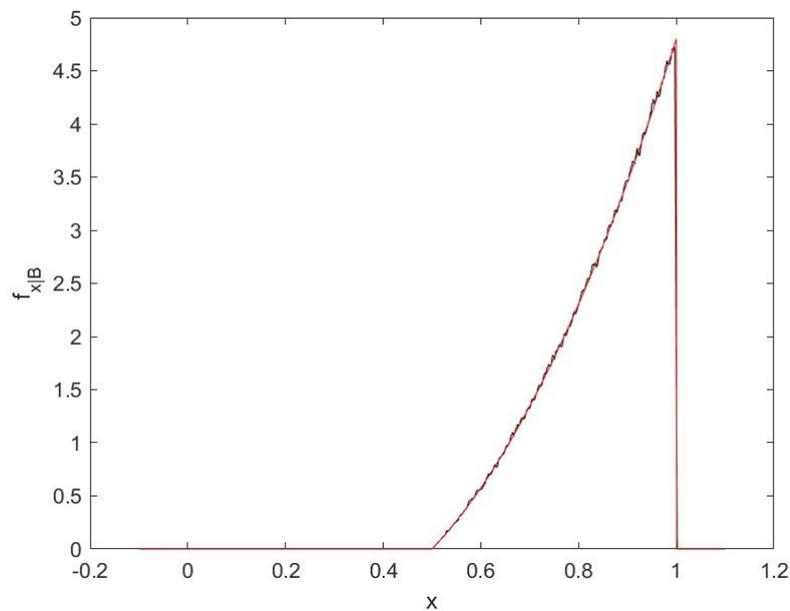
```
clear
N=1e5;
u=rand(2,N);
x=u(1,:).^ (1/3); %generiamo la v.a. x
y=u(2,:).*x; %generiamo la v.a. y|x (uniforme tra 0 e x)
xb=x(x+y>=1); yb=y(x+y>=1);
pb=length(xb)/N; pbt=5/8;
str=sprintf('P[B]=%.3f (s), %.3f (t)',pb, pbt); disp(str)
mxyb=mean(xb.*yb); mxybt=17/40;
str=sprintf('E[XY|B]=%.3f (s), %.3f (t)',mxyb,mxybt);
disp(str)
mxb=mean(xb); mxbt=17/20;
str=sprintf('E[X|B]=%.3f (s), %.3f (t)',mxb,mxbt);disp(str)
myb=mean(yb); mybt=1/2;
str=sprintf('E[Y|B]=%.3f (s), %.3f (t)',myb,mybt);disp(str)
xa=-.1:.001:1.1;
Pxt=zeros(1,length(xa)); I0=(xa>=0&xa<1/2); I1=(xa>=1/2&xa<=1);
Pxt(I1)=24/5*xa(I1).*(2*xa(I1)-1);
[Cx,Px]=ecdf2(xa,xb); plot(xa,Px,'k');hold on, plot(xa,Pxt,'r')
Pyt=zeros(1,length(xa));
Pyt(I0)=12/5*xa(I0).*(2-xa(I0)); Pyt(I1)=12/5*(1-(xa(I1)).^2);
figure();
[Cy,Py]=ecdf2(xa,yb); plot(xa,Py,'k'); hold on, plot(xa,Pyt,'r')
```

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Densità condizionata a un evento (Script Matlab S2)



Covarianza, correlazione

Covarianza: $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

Correlazione: $R(X, Y) = E[XY] = \text{Cov}(X, Y) + \mu_X \mu_Y$

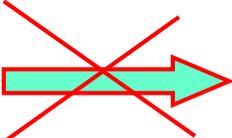
Coefficiente di correlazione $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

Due variabili aleatorie si dicono **incorrelate** se: $E[XY] = E[X]E[Y] = \mu_X \mu_Y$
(la covarianza è nulla).

indipendenza 

ma in generale:

incorrelazione  **indipendenza**



Siano X e Y due variabili aleatorie.

- **Somma:** sia $W=X+Y$. In generale risulta:

$$F_W(w) = P\{X + Y \leq w\} = P\{Y \leq w - X\} = \int F_{Y|X}(w - x) f_X(x) dx$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = \int f_{Y|X}(w - x) f_X(x) dx$$

Se sono indipendenti

$$f_W(w) = \int f_Y(w - x) f_X(x) dx = f_X(w) \otimes f_Y(w)$$

- **Prodotto.** Si ipotizzi che X e Y siano a valori non negativi.

$$F_W(w) = P\{XY \leq w\} = P\{Y \leq w/X\} = \int_0^\infty F_{Y|X}(w/x) f_X(x) dx$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = U(w) \int_0^\infty \frac{1}{x} f_{Y|X}\left(\frac{w}{x}\right) f_X(x) dx$$

- **Rapporto.** Si ipotizzi che X e Y siano a valori non negativi

$$F_W(w) = P\{Y/X \leq w\} = P\{Y \leq wX\} = \int_0^\infty F_{Y|X}(wx) f_X(x) dx$$

$$f_W(w) = \frac{\partial F_W(w)}{\partial w} = U(w) \int_0^\infty x f_{Y|X}(wx) f_X(x) dx$$



Esempio

- Siano X e Y due variabili aleatorie u.c. tra 0 e 1.

- **Somma:** sia $W=X+Y$. Si ottiene:

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ w & 0 \leq w \leq 1 \\ 2-w & 1 \leq w \leq 2 \\ 0 & w \geq 2 \end{cases}$$

- **Prodotto:** sia $W=XY$. Si ottiene:

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ -\ln(w) & 0 < w \leq 1 \\ 0 & w \geq 1 \end{cases}$$

- **Rapporto:** sia $W=Y/X$. Si ottiene:

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1/2 & 0 < w \leq 1 \\ 1/2w^2 & w \geq 1 \end{cases}$$



Funzione generatrice dei momenti

- Funzione generatrice dei momenti: $\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int e^{sX} f_X(x) dx$

- Risultata: $\Phi_X(s=0) = 1$ $E[X^n] = \left. \frac{d^n \Phi_X(s)}{ds^n} \right|_{s=0}$

- Esempi: variabile aleatoria gaussiana, con media μ_x e varianza σ_x^2 :

$$\Phi_X(s) = \exp\left(s\mu_x + s^2\sigma_x^2/2\right)$$

- Variabile aleatoria u.c. tra a e b :

$$\Phi_X(s) = \frac{\exp(bs) - \exp(as)}{s(b-a)}$$

- Variabile aleatoria esponenziale:

$$f_X(x) = \frac{1}{\mu_x} \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right) U(x) \quad \Phi_X(s) = \frac{1}{1-s\mu_x} \quad \sigma_X^2 = (E[x])^2 = \mu_X^2$$



Somma di variabili aleatorie indipendenti

- Sia $W=X+Y$, con X e Y indipendenti. Dalla: $f_W(w) = f_X(w) \otimes f_Y(w)$ si ottiene: $\Phi_W(s) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s)$

- Esempio: sia X una v.a di Bernoulli

$X=1$ con probabilità p ; $X=0$ con probabilità $1-p$.

$$\Phi_X(s) = 1 - p + pe^s$$

- Sia Y la v.a. binomiale, che si ottiene sommando N v.a. di Bernoulli indipendenti. Pertanto:

$$\Phi_Y(s) = (1 - p + pe^s)^N \quad E[Y] = Np \quad \sigma_Y^2 = Np(1 - p)$$



Altri esempi di variabili aleatorie

- **Geometrica:** sia p la probabilità di successo di un esperimento, con $0 \leq p \leq 1$. Si effettuino prove ripetute indipendenti. La probabilità che il primo successo si abbia al k -mo tentativo è data dalla:

$$P_X(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Phi_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s} \quad E[X] = \frac{1}{p} \quad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

- **Poisson:** Probabilità che si verifichino n eventi in un intervallo di tempo T (ad esempio che vengano trasmessi n pacchetti), quando il verificarsi di un evento è la risultante di infinite cause tra di loro indipendenti (ad esempio traffico prodotto da sorgenti indipendenti). L'intervallo tra due eventi è distribuito in maniera esponenziale, con valor medio $1/\lambda$.

$$P_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda T} (\lambda T)^k / k! & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

λ è il tasso di arrivo

$$\Phi_X(s) = e^{\lambda T(e^s - 1)}$$

$$E[X] = \sigma_X^2 = \lambda T$$



Generazione di valori una variabile aleatoria

Si consideri una v.a. X la cui funzione di distribuzione, $u=F_X(x)$, è invertibile. I valori di u sono uniformemente distribuiti tra 0 e 1. Per ottenere i valori di x è sufficiente generare una sequenza di valori u uniformemente distribuiti fra 0 e 1 e poi calcolare $x=F_x^{-1}(u)$.

V. a. **esponenziale**

$$f_X(x) = \frac{1}{\mu_x} \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right) U(x)$$

$$F_X(x) = u = \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)\right] U(x)$$

$$x = -\mu_x \ln(1-u)$$

V.a. **Weibull**

$$E[X] = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{m}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^m\right] U(x)$$

$$\sigma_X^2 = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right]$$

$$x = \beta (-\ln(1-u))^{1/m}$$



Esempio

- Siano X e Y due variabili esponenziali indipendenti di valor medio G .
- **Somma**: sia $W=X+Y$. Si ottiene:

$$f_W(w) = \frac{w}{G^2} \exp\left(-\frac{w}{G}\right) U(w)$$

- **Prodotto**: sia $W=XY$. Si ottiene (K_0 è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo di ordine 0):

$$f_W(w) = \frac{2}{G^2} K_0\left(\frac{2\sqrt{w}}{G}\right) U(w)$$

- **Rapporto**: sia $W=Y/X$. Si ottiene:

$$f_W(w) = \frac{1}{(1+w)^2} U(w)$$



Altre formule utili

▪ Normale da due uniformi, U_1 , U_2 , indipendenti.

$$N = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

▪ Uniforme da due normali N_1 , N_2 , indipendenti.

$$U = \exp\left(-\frac{N_1^2 + N_2^2}{2}\right)$$



Si consideri una v.a. a valori non negativi.

Il valor medio si può calcolare utilizzando la formula:

$$E[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx$$

Dimostrazione:

$$1 - F_X(x) = \int_x^{\infty} f_x(t) dt$$

$$\int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_x(t) dt dx = \int_0^{\infty} f_x(t) \int_0^t dx dt = \int_0^{\infty} f_x(t) t dt = E[x]$$

Esempio (esponenziale): $1 - F_X(x) = \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)$, $x \geq 0$

$$\int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx = \mu_X$$



Generalizzazione

- Sia X una v.a. a valori non negativi e $Y=g(X)$.
Il valor medio di Y si può calcolare utilizzando la formula:

$$E[Y] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] g'(x) dx + g(0)$$

- Esempio: $g(x) = \log_2(1+x)$ (capacità di un canale in funzione del rapporto segnale/rumore, x). Ipotizzando che x sia distribuito con legge esponenziale (fading di Rayleigh), $1 - F_X(x) = \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right)$, $x \geq 0$
la capacità media è data dalla:

$$C(\mu_x) = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\mu_x}\right) \frac{1}{1+x} dx = \exp\left(\frac{1}{\mu_x}\right) \frac{E_1(1/\mu_x)}{\ln(2)}$$

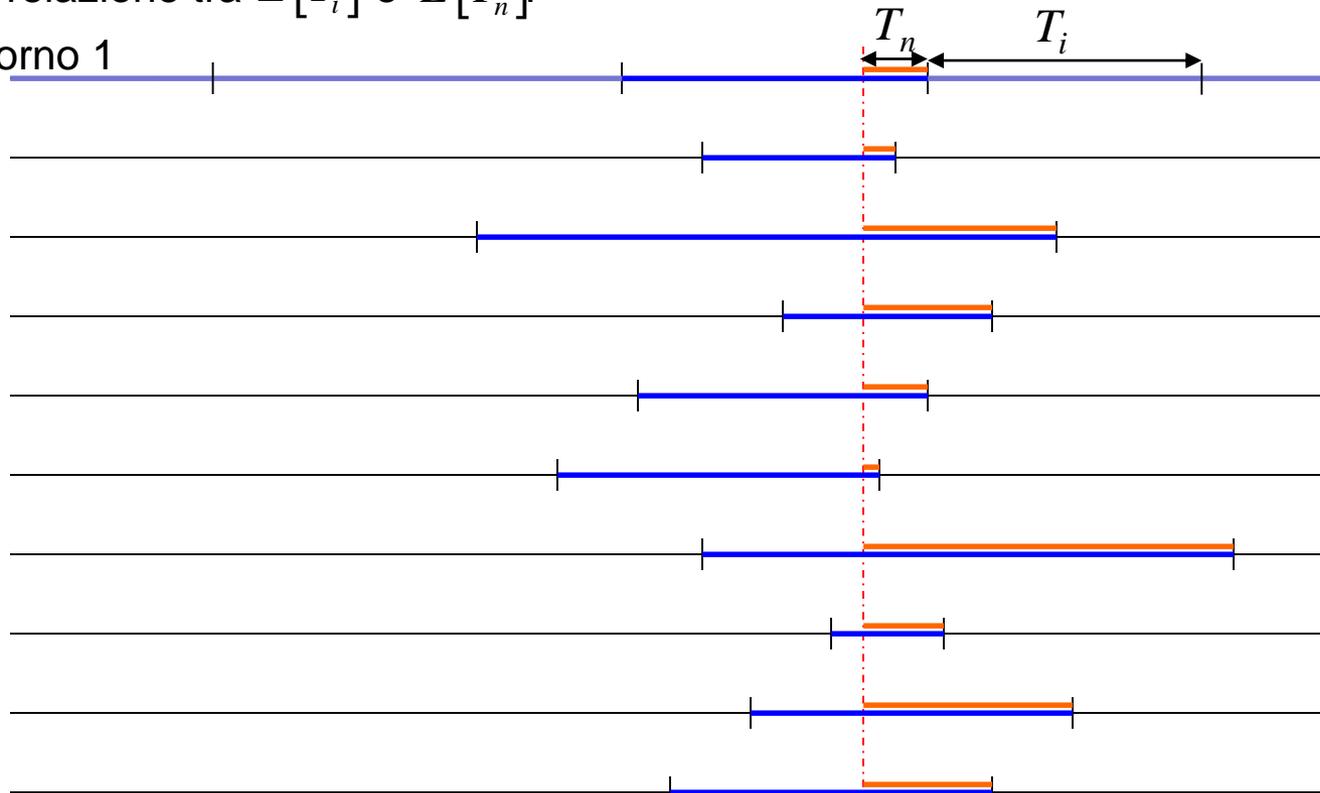
dove $E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ è l'integrale esponenziale.



Tempo di interarrivo

- Esempio: osserviamo su un canale il transito di pacchetti. Definiamo T_i intervallo **aleatorio** di interarrivo tra due pacchetti consecutivi **qualsiasi**. Ripetiamo l'osservazione ogni giorno. Fissata un'ora t . Definiamo T_n intervallo **aleatorio** tra t e l'istante di arrivo del prossimo pacchetto (in rosso nella figura): qual è la relazione tra $E[T_i]$ e $E[T_n]$?

▪ giorno 1



▪ giorno N



Esercizio 1

- Si considerino due variabili aleatorie indipendenti con le seguenti densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} by^2 & 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare il valore delle costanti a e b .
- Determinare $E[X]$, e $E[Y]$
- Sia $A=X>Y$. Determinare $E[X|A]$ e $E[Y|A]$ (si ricordi che X e Y sono indipendenti).
- Facoltativo: proporre uno script Matlab per valutare la correttezza dei valori ottenuti.

- Svolgimento

$$\int_0^2 ax \, dx = 2a = 1 \quad \text{da cui } a=1/2. \quad \int_0^2 by^2 \, dy = \frac{8}{3}b = 1 \quad \text{da cui } b=3/8.$$

$$E[X] = \int_0^2 \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{4}{3} \quad E[Y] = \int_0^2 \frac{3}{8}y^3 \, dy = \frac{3}{2}$$

$$P[A] = \int_0^2 \frac{3}{8}y^2 \int_y^2 \frac{x}{2} \, dx \, dy = \frac{2}{5}$$



Esercizio 1 (continua)

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \int_0^x \frac{1}{2} x \frac{3}{8} y^2 dy = \frac{5}{32} x^4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X|A] = \frac{5}{32} \int_0^2 x^5 dx = \frac{5}{3}$$

$$f_{Y|A}(y) = \begin{cases} \frac{5}{2} \int_y^2 \frac{1}{2} x \frac{3}{8} y^2 dx = \frac{15}{64} y^2 (4 - y^2) & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[Y|A] = \frac{15}{64} \int_0^2 y^3 (4 - y^2) dy = \frac{5}{4}$$

Per la verifica con il Matlab determiniamo le cumulative

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = 2\sqrt{u}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ x^3/8 & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad y = 2\sqrt[3]{u}$$



Esercizio 1 (E1 script Matlab)

```
clear
N=1e5;
u=rand(2,N); %generiamo 2 v.a. uniformi indipendenti
x=2*u(1,:).^5; %generiamo la v.a. x
y=2*u(2,:).^(1/3); %generiamo la v.a. y
xA=x(x>y);
yA=y(x>y);
pA=length(xA)/N; pAt=2/5;
str=sprintf('P[A]=%.3f (s), %.3f (t)',pA,pAt); disp(str)
mx=mean(x); mxt=4/3;
str=sprintf('E[x]=%.3f (s), %.3f (t)',mx,mxt); disp(str)
my=mean(y); myt=3/2;
str=sprintf('E[Y]=%.3f (s), %.3f (t)',my,myt); disp(str)
mxA=mean(xA); mxAt=5/3;
str=sprintf('E[X|A]=%.3f (s), %.3f (t)',mxA,mxAt);disp(str)
myA=mean(y(y<x)); myAt=5/4;
str=sprintf('E[Y|A]=%.3f (s), %.3f (t)',myA,myAt);disp(str)
```



Esercizio 2

- Si consideri la seguente densità di probabilità di una coppia di variabili aleatorie:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Determinare il valore di c .
- Verificare se X e Y sono indipendenti
- Facoltativo: determinare $P[Y < X]$.

- Svolgimento

$$\int_0^1 c \int_{1-y}^1 x \, dx \, dy = \frac{c}{2} \int_0^1 [1 - (1-y)^2] \, dy = \frac{c}{2} \int_0^1 (2y - y^2) \, dy = \frac{c}{3} = 1 \quad \text{da cui } c=3.$$

$$f_X(x) = \int_{1-x}^1 3x \, dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad f_Y(y) = \int_{1-y}^1 3x \, dx = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3}{2}y(2-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

Le variabili aleatorie non sono indipendenti, poiché $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

$$E[X] = \int_0^1 3x^3 \, dy = \frac{3}{4} \quad E[Y] = \int_0^1 \frac{3}{2}(2y^2 - y^3) \, dy = \frac{5}{8}$$



Esercizio 2 (continua)

$$P[X < Y] = 3 \int_{1/2}^1 \int_{1-2(1-y)}^y x \, dx \, dy = \frac{3}{2} \int_{1/2}^1 (2y-1) \, dy = \frac{3}{8}$$

- Questi risultati si possono verificare in modo semplice utilizzando Matlab.

Si ottiene infatti

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1, 1-x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si osserva quindi che $x = \sqrt[3]{u}$ mentre $Y|X$ è una v.a. uniforme compresa tra $1-x$ e 1



Esercizio 2 (E2 script Matlab)

```
clear
N=1e5;
u=rand(2,N); %generiamo 2 v.a. uniformi indipendenti
x=u(1,:).^ (1/3); %generiamo la v.a. x
y=u(2,:).*x+(1-x); %generiamo la v.a. y|x
mx=mean(x);mxt=3/4;
str=sprintf('E[x]=%.3f (s), %.3f (t)',mx,mxt); disp(str)
my=mean(y); myt=5/8;
str=sprintf('E[Y]=%.3f (s), %.3f (t)',my,myt); disp(str)
pxmy=length(x(x<y))/N;pxmyt=3/8;
str=sprintf('P[X<Y]=%.3f (s) %.3f (t)',pxmy,pxmyt);
disp(str)
for i=1:3000,
    plot(x(i),y(i),'k*');
    hold on,
end,
hold off
xlabel('x');ylabel('y');
```

