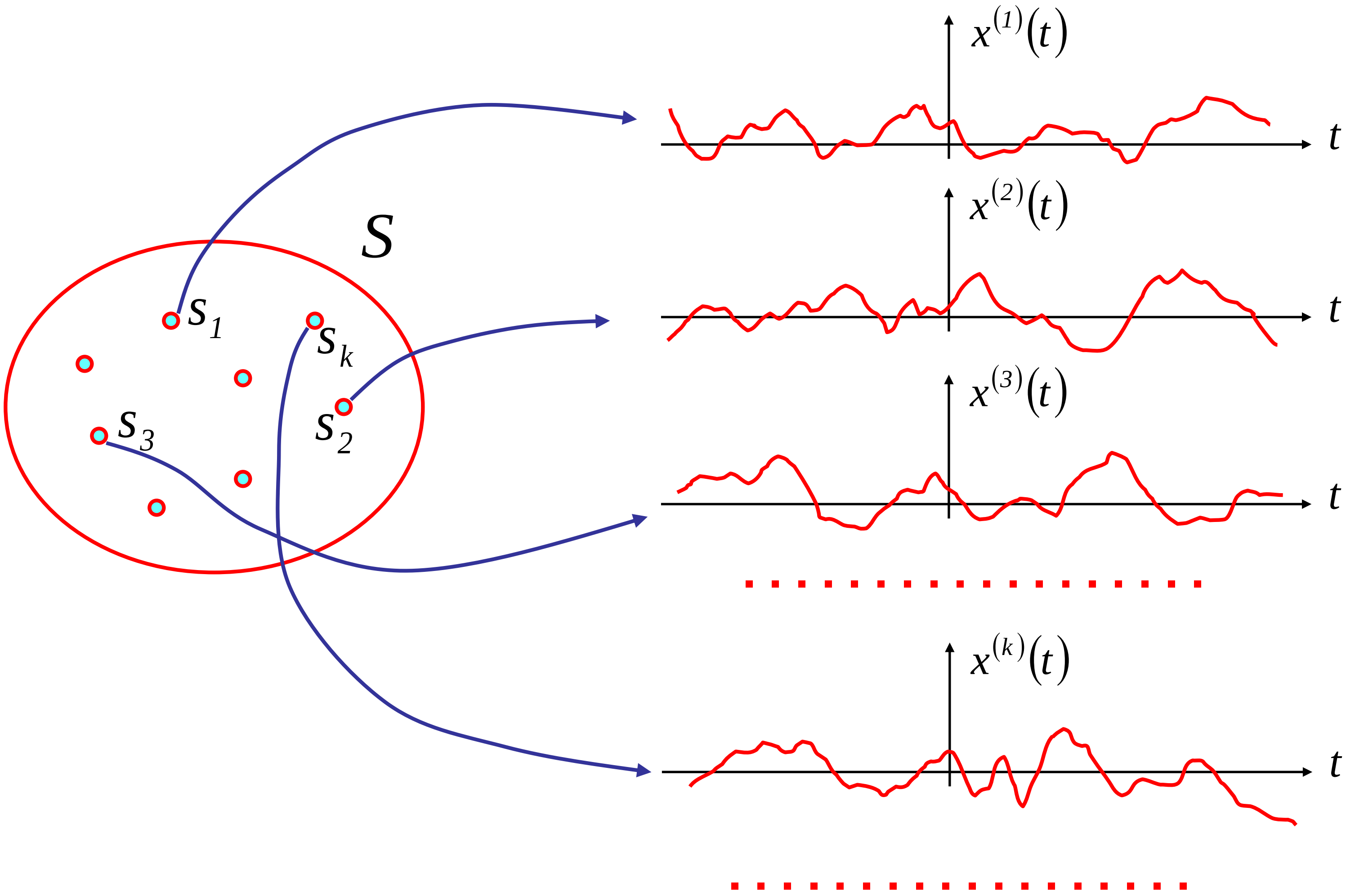
Sommario

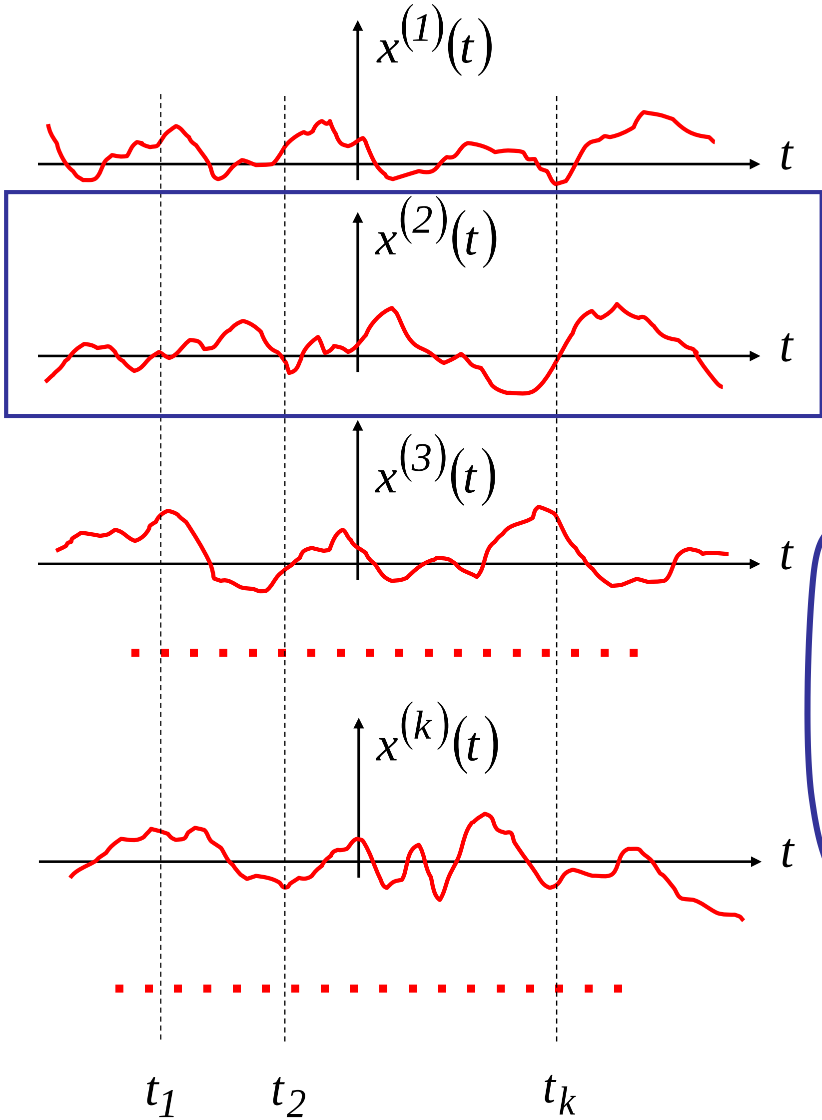
- Modello matematico
- Descrizione probabilistica
- Descrizione statistica:

  valor medio, momenti, funzione di auto correlazione
- Processi aleatori stazionari
- Medie temporali
- Processi aleatori regolari
- Processi aleatori ergodici
- Potenza media di un processo aleatorio

Corrispondenza tra uscite elementari s_i di un esperimento e funzioni di variabile reale t. Ogni funzione è una realizzazione del processo



Proprietà



Processo aleatorio $\{x(t)\}$

fissato S_i → funzione di t

fissato t → variabile aleatoria

fissati S_i e t → numero reale

molto importante

Esempi

a) insieme di tutti i possibili segnali telefonici registrati in un punto della rete (processo aleatorio puro)

b) tensione di rumore ai capi di un grande numero (teoricamente infinito) di resistenze macroscopicamente identiche, poste alla medesima temperatura (processo aleatorio puro)

c) segnale sinusoidale con fase aleatoria:

$$\{x(t)\} = A\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$$

θ variabile aleatoria (ad es: uniformemente distribuita tra *0* e *2*π)

d) sequenza di forme d'onda, ottenuta traslando e pesando con una variabili aleatorie una forma d'onda base (segnale numerico)

$$\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t-kT)$$

a_k variabili aleatorie (spesso indipendenti)

e) con esperimento il lancio del dado ($s_i = 1, 2, \ldots., 6$), $x^{(k)}(t)=s_k$.

(le realizzazioni distinte sono sei)

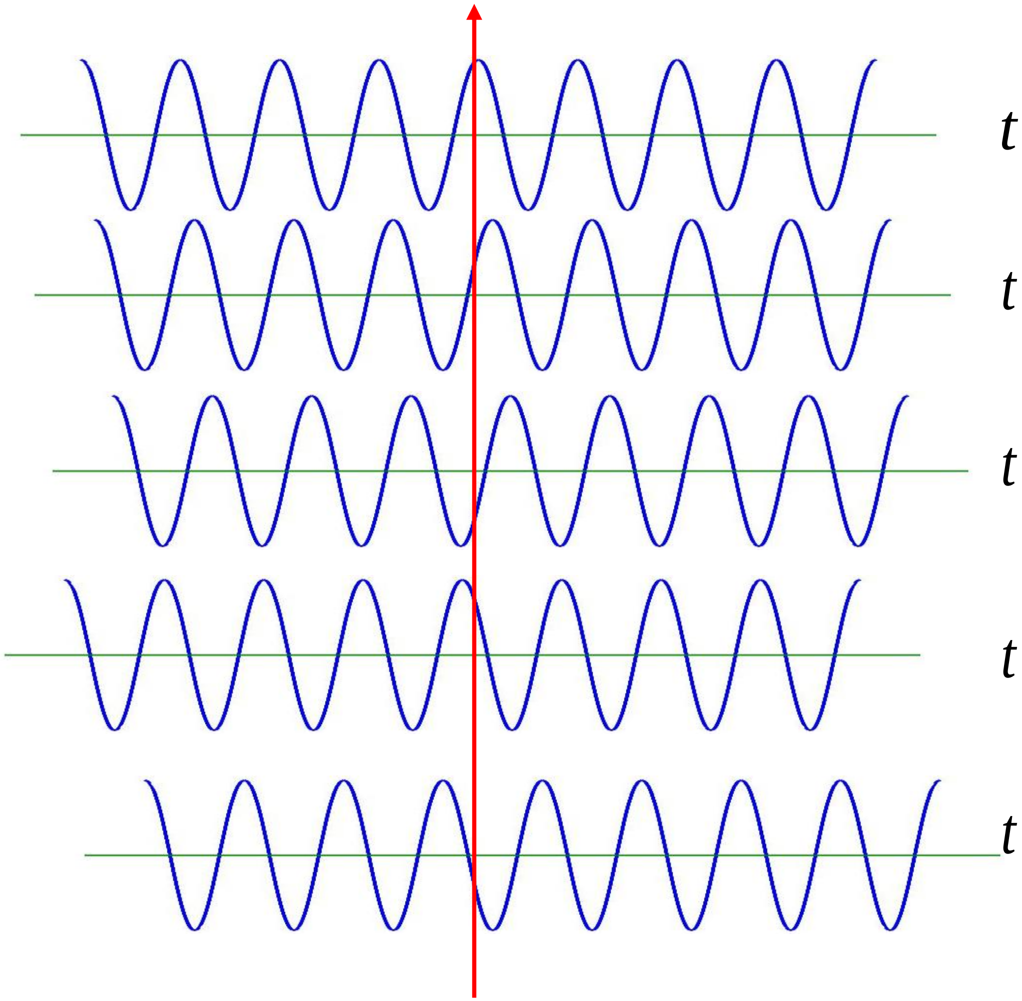
f) con esperimento il lancio della moneta:

$$\mathrm{T} \rightarrow x(t) = t$$

$$\mathrm{C} \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t$$

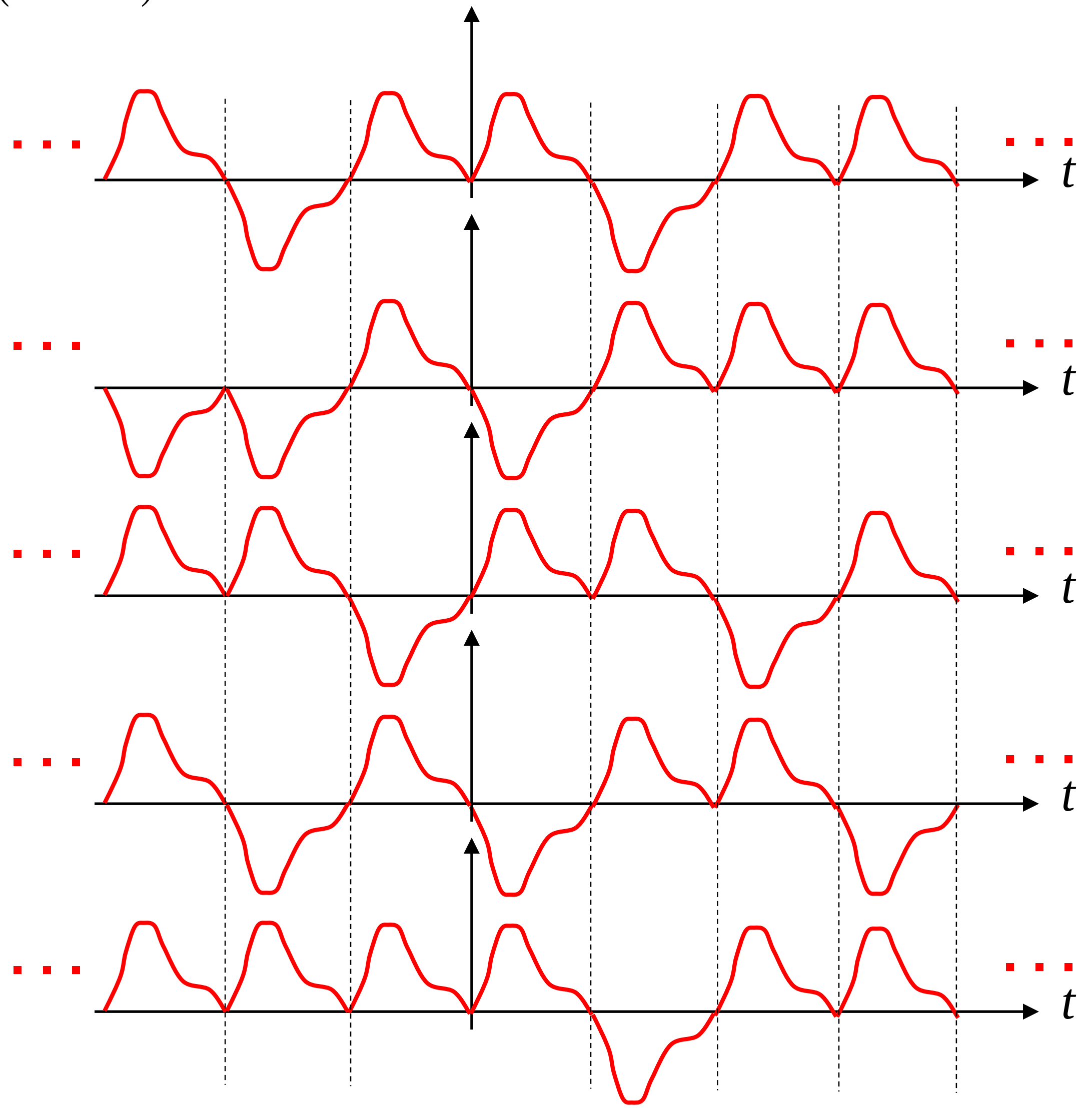
Esempio

$$\{x(t)\} = A\cos(2\pi\ f_0 t + \theta)$$



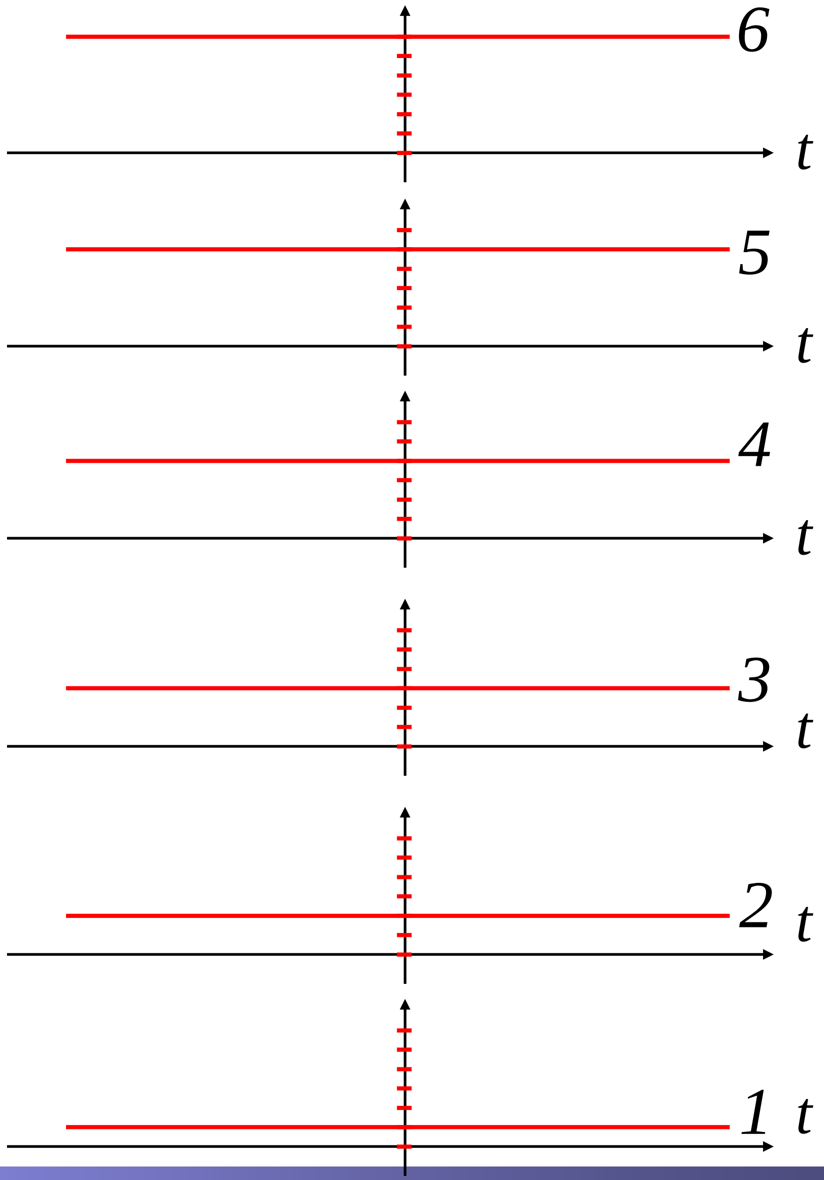
$$\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

$$a_k = \pm 1$$



lancio del dado

$(s_i = 1, 2, \ldots., 6), x^{(k)}(t)=s_k$

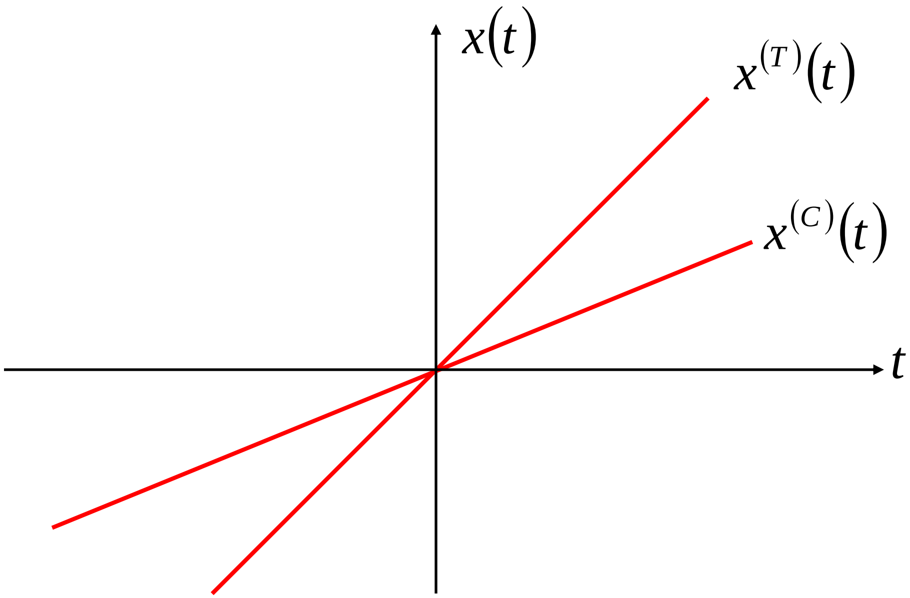


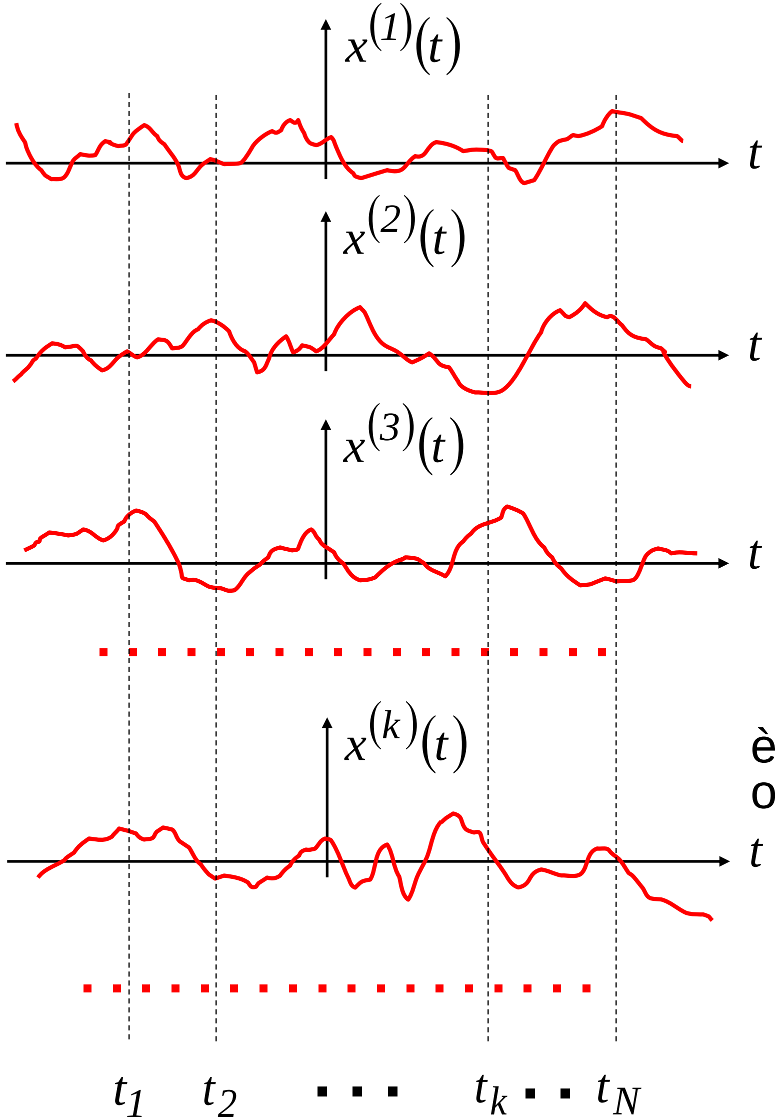
Esempio

lancio della moneta

$$\mathrm{T} \rightarrow x(t) = t$$

$$\mathrm{C} \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t$$





Fissata una N-pla di istanti

$(t_1, t_2, .., t_N)$

si evidenziano N variabili aleatorie

$\{x(t_1), x(t_2),..x(t_N)\}$

Un processo aleatorio è completamente descritto statisticamente se:

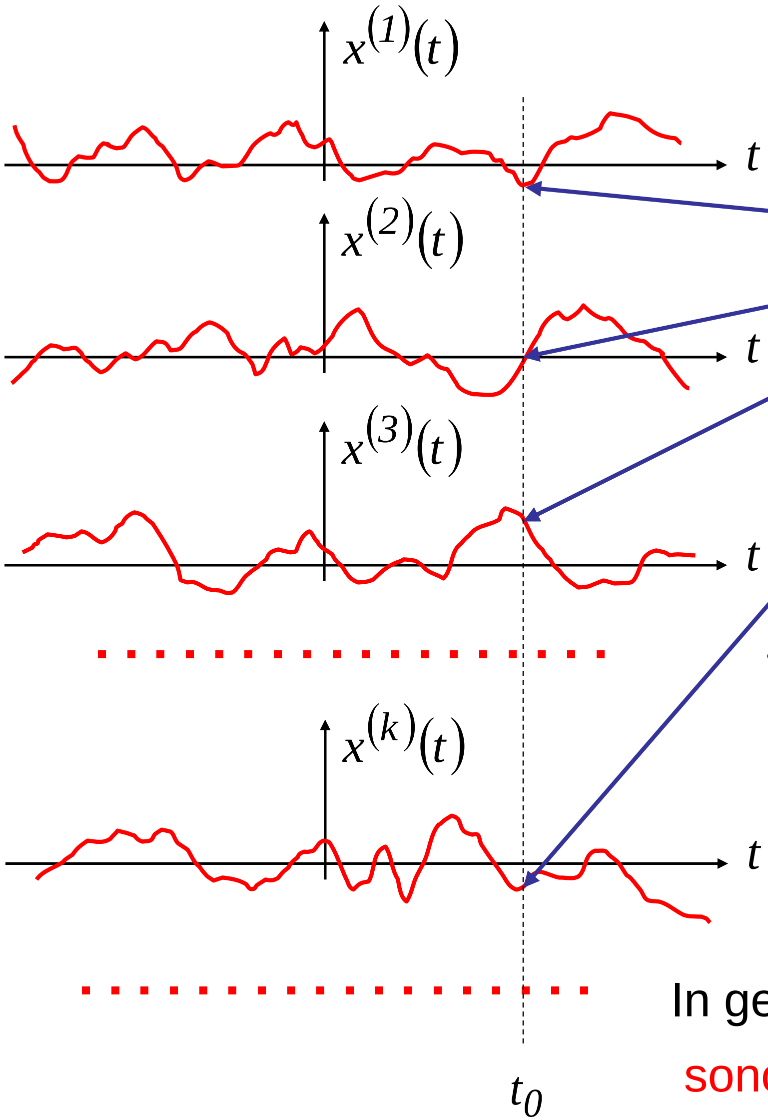
$$\begin{cases} \forall \; N \\ \forall \; (t_1, t_2, ..., t_N) \end{cases}$$

è data la densità di probabilità congiunta di ordine N delle N variabili aleatorie:

$\{x_1=x(t_1), x_2=x(t_2),.., x_N=x(t_N)\}$

$$\boxed{f_N\left(x_1, t_1; x_2, t_2; ....; x_N, t_N\right)}$$

Descrizione probabilistica



Fissato un istante t_0

processo $\{x(t)\} \rightarrow$ variabile aleatoria

$x_0 = x(t_0)$

Essa è caratterizzata da:

funzione di distribuzione $F_1(x_0, t_0)$

densità di probabilità $f_1(x_0, t_0)$

(del primo ordine)

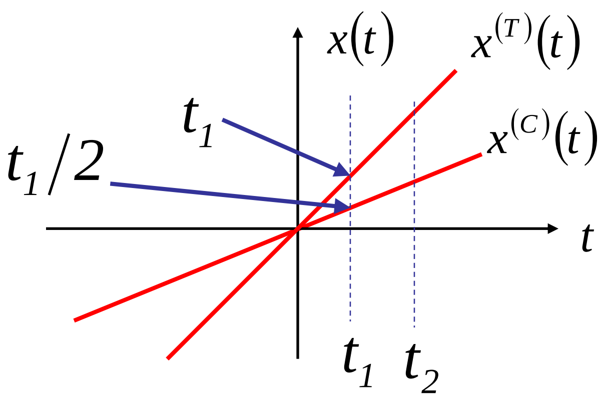
In generale, $F_1(x_0, t_0)$ e $f_1(x_0, t_0)$

sono funzioni dell'istante scelto

lancio della moneta

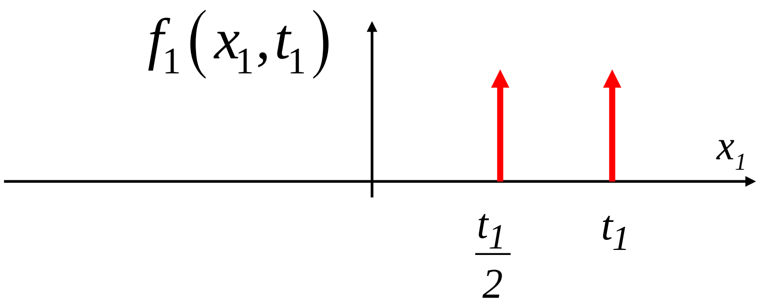
$$\mathrm{T} \rightarrow x(t) = t$$

$$\mathrm{C} \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t$$



Fissato t_1 si ottiene una variabile aleatoria discreta che assume il valore t_1 o il valore $t_1/2$, con probabilità $1/2$.

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{1}{2}\delta(x_1 - t_1) + \frac{1}{2}\delta\left(x_1 - \frac{t_1}{2}\right)$$

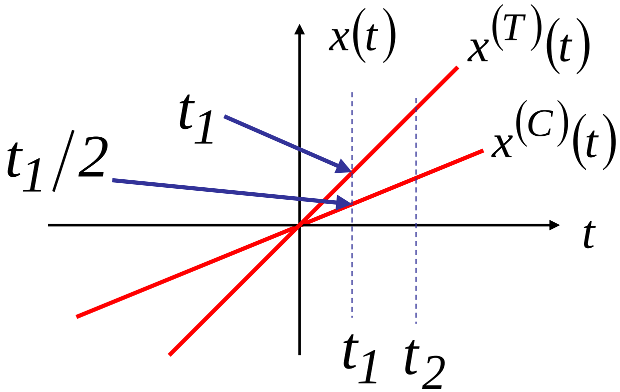


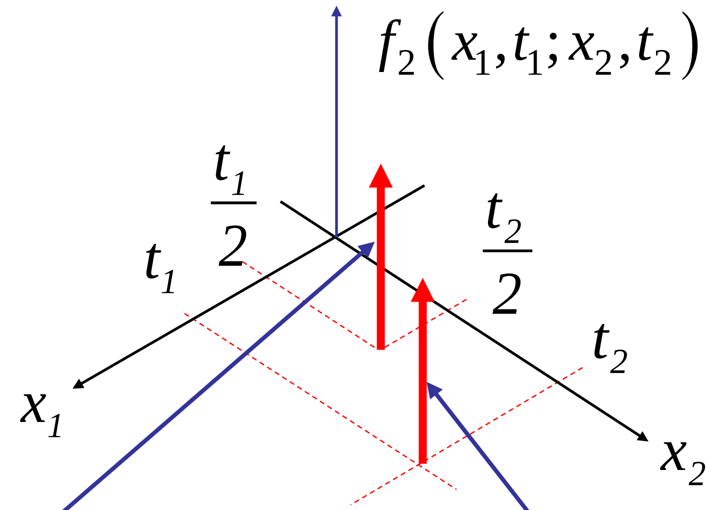
Fissati t_1 e t_2, si hanno due variabili aleatorie x_1 e x_2.

Si possono verificare (con probabilità $1/2$) soltanto gli eventi:

$$\begin{cases} (x_1 = t_1) \cap (x_2 = t_2) \\ \left(x_1 = \frac{1}{2}t_1\right) \cap \left(x_2 = \frac{1}{2}t_2\right) \end{cases}$$

Esempio





Pertanto

$$f_2(x_1,t_1;x_2,t_2)=\boxed{\frac{1}{2}\delta\left(x_1-\frac{t_1}{2}\right)\delta\left(x_2-\frac{t_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{1}{2}\delta(x_1-t_1)\,\delta(x_2-t_2)}$$

Generalizzando, fissata una N-*pla* di istanti si ha:

$$f_N(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots;x_N,t_N)=\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{N}\delta(x_i-t_i)+\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{N}\delta\left(x_i-\frac{t_i}{2}\right)$$

Ricordare:

noi sappiamo fare soltanto il valor medio di una variabile aleatoria

$E\left\{x\left(t_1\right)\right\}$ significa: valor medio della variabile aleatoria $x_1 = x(t_1)$

Pertanto: $$E\left\{x\left(t_1\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1\left(x_1, t_1\right) \mathrm{d}x_1$$

Esso dipende in generale dall'istante t_1

Esempio N. 1: $$E\left[x\left(t_1\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left\{\frac{1}{2}\delta\left(x_1 - t_1\right) + \frac{1}{2}\delta\left(x_1 - \frac{t_1}{2}\right)\right\} \mathrm{d}x_1$$

lancio della moneta

$$T \rightarrow x\left(t\right) = t$$

$$C \rightarrow x\left(t\right) = \frac{1}{2}t$$

$$= \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{3}{4}t_1$$

(funzione di t_1)

Esempio N. 2:

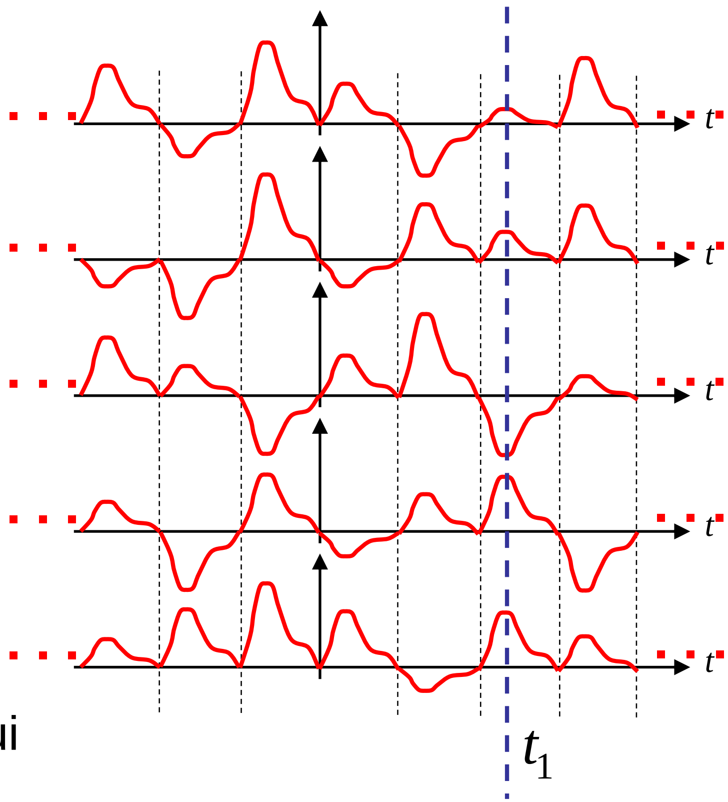
$$\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t-kT)$$

$a_k =$ variabili aleatorie indip.

$E[a_k] = m_a,$

$E\left[(a_k - m_a)(a_j - m_a)\right] = \sigma_a^2 \delta_{kj}$

$$E[x(t_1)] = E\Bigg[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t_1-kT)}_{\text{variabile aleatoria}}\Bigg]$$



Se $g(t)$ ha una durata temporale $\le T$ la sommatoria si riduce ad un unico termine:

$$E[x(t_1)] = E\left[a_{\bar{k}} g(t_1-\bar{k}T)\right]$$

$$= g(t_1-\bar{k}T)E\left[a_{\bar{k}}\right] = m_a g(t_1-\bar{k}T)$$

$\bar{k}$ individua l'intervallo di durata T in cui cade t_1

Seguito esempio N. 2

In generale: $$E\left[x(t_1)\right]=E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k g(t_1-kT)\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}E\left[a_k\right]g(t_1-kT)$$

$$=m_a\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g(t_1-kT)$$

Periodico rispetto a t_1

Esempio N. 3

$$\{x(t)\}=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$$

θ variabile aleatoria uniformemente distribuita tra *0* e 2π

$$E\left[x(t_1)\right]=E[\underbrace{A\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)}_{\text{var. aleatoria, funzione di var. aleatoria}}]$$

$$=\int_0^{2\pi}A\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\boxed{\frac{1}{2\pi}}\mathrm{d}\theta=0$$

Densità di probabilità della variabile θ

Indipendente da t_1

Definizione :

$$E\left\{\left[x(t_1)\right]^n\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1{}^n f_1(x_1,t_1)\,\mathrm{d}x_1$$

Particolarmente importante quello del secondo ordine:

$$E\left\{\left[x(t_1)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1{}^2 f_1(x_1,t_1)\,\mathrm{d}x_1$$

Corrisponde al valor medio della potenza istantanea del processo aleatorio

si immagini ogni realizzazione del processo come se fosse una tensione o una corrente applicate ad una resistenza di valore unitario

$x_1^2 = x^2(t_1) =$ Potenza istantanea all'istante $t = t_1$

Funzione di autocorrelazione

Definizione:

$$R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1,t_1;x_2,t_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Correlazione tra il valore in t_1 e il valore in t_2

a) Fissati t_1 e t_2, $\boxed{x(t_1)\times x(t_2)}$ è una variabile aleatoria

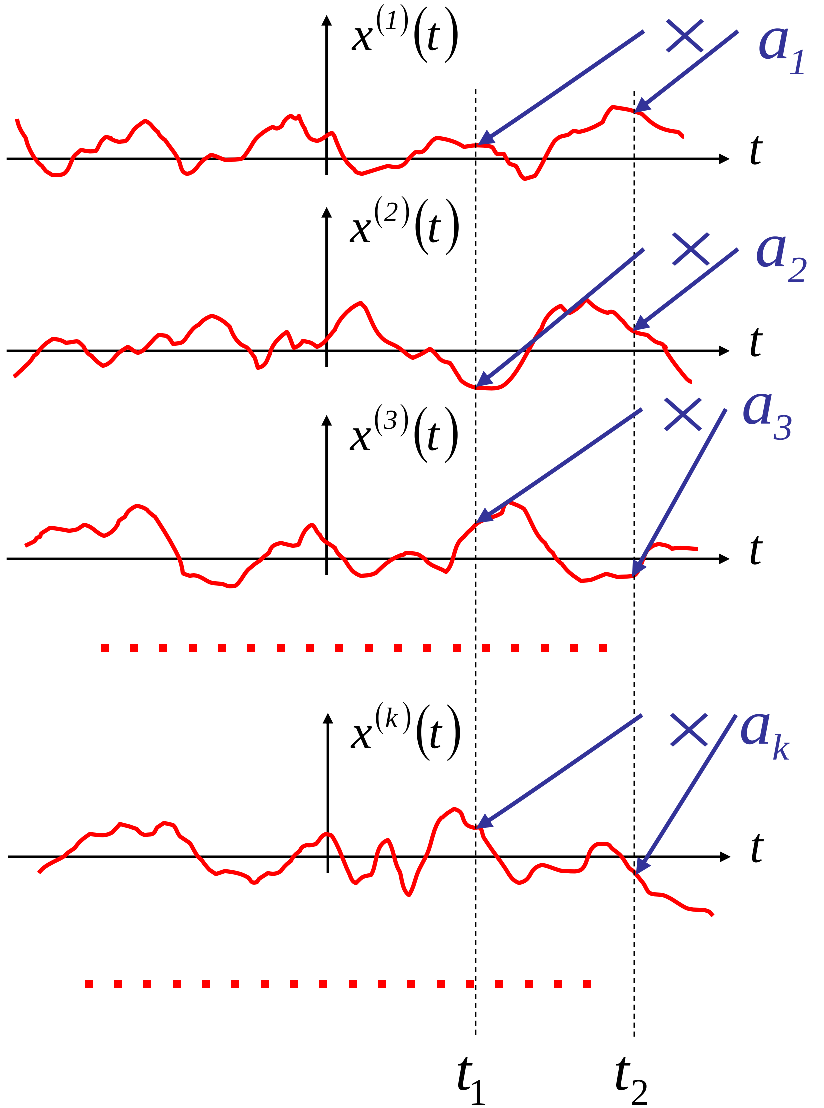
b) Il valore assunto da tale variabile aleatoria cambia a seconda di qual è la realizzazione con la quale si manifesta il processo

c) La funzione di autocorrelazione è il valor medio di questa variabile aleatoria

d) Tale valor medio dipende dalla scelta degli istanti t_1 e t_2 , pertanto la funzione di autocorrelazione è una funzione di t_1 e t_2

ulteriore considerazione

Se di un processo aleatorio si hanno a disposizione le registrazioni di N realizzazioni ....



Sperimentalmente:

$$R_x(t_1,t_2) \cong \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}(t_1)\,x^{(i)}(t_2)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$$

essendo:

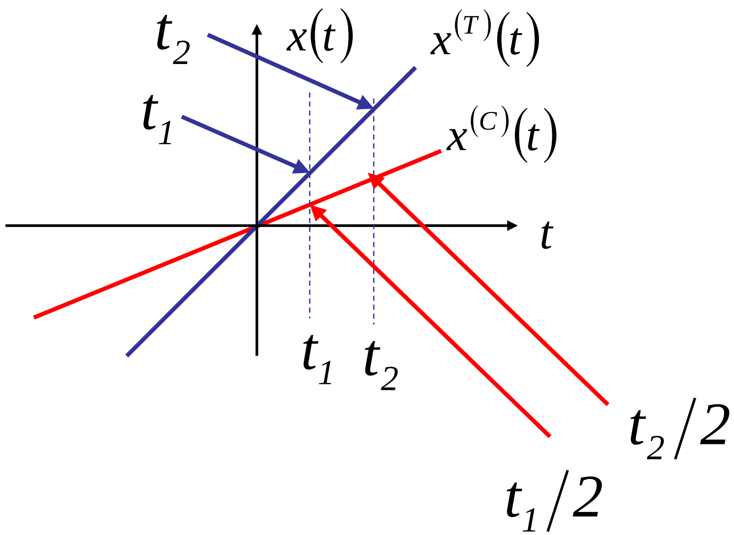
$$a_i = x^{(i)}(t_1)\,x^{(i)}(t_2)$$

lancio della moneta

$$T \rightarrow x(t) = t \qquad R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right]$$

$$C \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t$$

$$= \frac{1}{2}(t_1 t_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t_1 \times \frac{1}{2}t_2\right) = \frac{5}{8}t_1 t_2$$



Usualmente si pone:

$$t_1 = t$$

$$t_2 = t + \tau$$

$$R_x(t,t+\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right]$$

$$= \frac{5}{8}\left(t^2 + t\tau\right)$$

In questo caso $R_x(t,t+\tau)$ dipende sia da t sia da τ

Esempi

$$\{x(t)\} = A\cos\left(2\pi\, f_0\, t + \theta\right)$$

θ variabile aleatoria (ad es: uniformemente distribuita tra *0* e *2*π)

$$R_x\left(t_1, t_2\right) = E\left[x\left(t_1\right)x\left(t_2\right)\right]$$

$$= \underbrace{E\left[A\cos\left(2\pi\, f_0 t_1 + \theta\right) \times A\cos\left(2\pi\, f_0 t_2 + \theta\right)\right]}_{\text{Variabile aleatoria, funzione di } \theta}$$

Ricordare sempre: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

$$= \frac{A^2}{2}\underbrace{E\left[\cos\left(2\pi\, f_0\left(t_1+t_2\right)+2\theta\right)\right]}_{= 0 \text{ (sinusoide di periodo } \pi)} + \frac{A^2}{2}\underbrace{E\left[\cos\left(2\pi\, f_0\left(t_1-t_2\right)\right)\right]}_{=\cos\left(2\pi\, f_0\left(t_1-t_2\right)\right) \text{ (costante)}}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi\, f_0 \tau\right) \qquad \left(\tau = t_1 - t_2\right)$$

Dipende soltanto dalla differenza t_1 - t_2

$$\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

a_k = variabili aleatorie indipendenti

Per questo esempio supponiamo per semplicità:

$$E[a_k] = 0, \quad E[a_k a_j] = \sigma_a^2 \, \delta_{kj}$$

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j g(t + \tau - jT)\right)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} E[a_k a_j] g(t - kT) g(t + \tau - jT)$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT) g(t + \tau - kT)$$

$\boxed{\text{per ogni valore di } \tau \text{ è periodica di periodo } T \text{ in } t}$

processo stazionario in senso stretto (o forte):

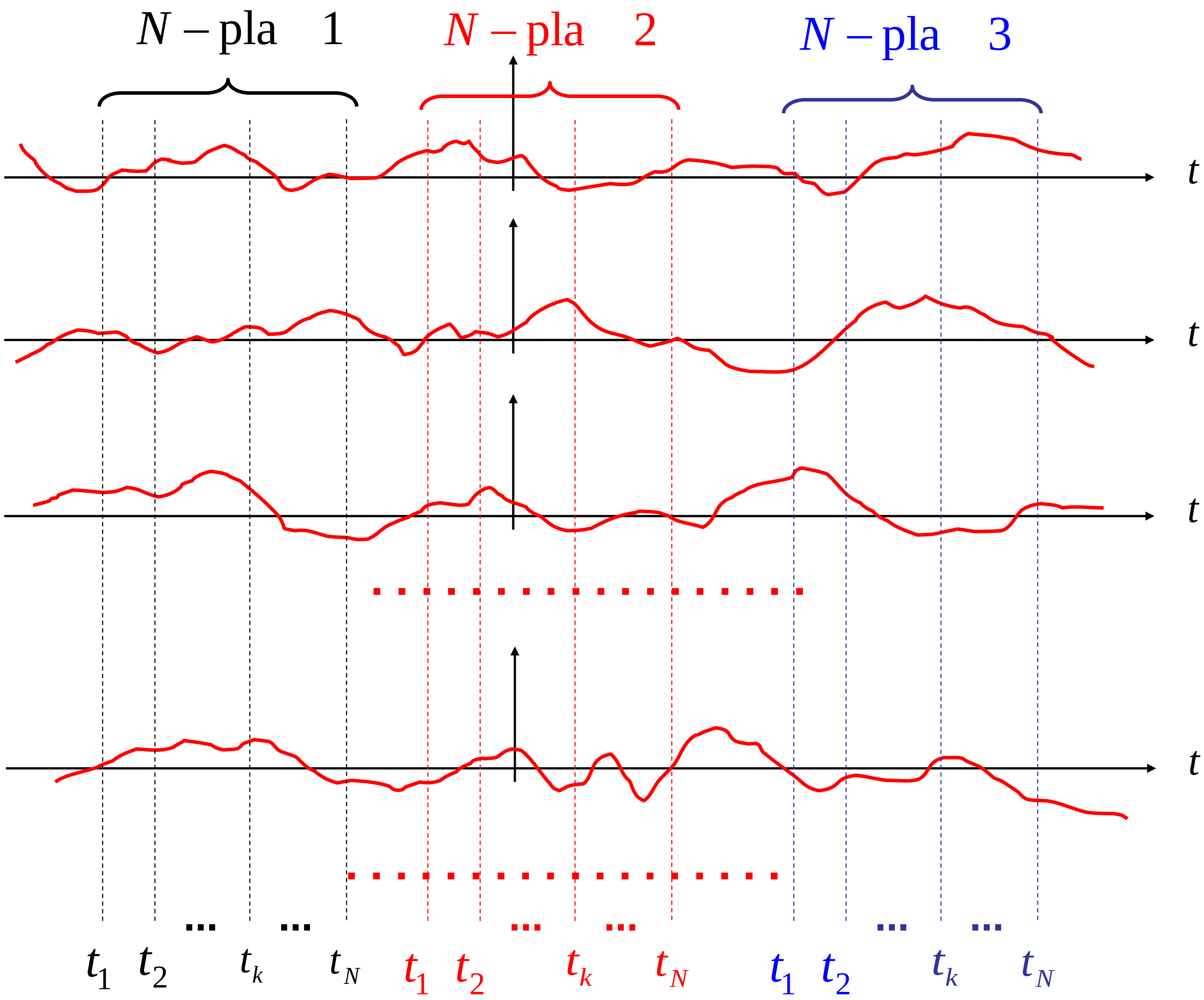
$$\left\{\begin{array}{l} \forall N \\ \forall N-pla\ \left(t_1,t_2,.\,.t_N\right) \\ \forall \tau \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f_N\left(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_N,t_N\right)= \\ & \quad = f_N\left(x_1,t_1+\tau;x_2,t_2+\tau;\ldots;x_N,t_N+\tau\right) \end{aligned}}$$

Il processo aleatorio è invariante alla traslazione temporale

Significato:

le proprietà statistiche di qualsiasi N-pla di variabili aleatorie dipendono esclusivamente dalle reciproche distanze degli istanti di tempo che le hanno determinate


$N-$pla 1
$N-$pla 2
$N-$pla 3
t
t
t
t
t_1 t_2 ... t_k ... t_N
t_1 t_2 ... t_k ... t_N
t_1 t_2 ... t_k ... t_N

processo stazionario in senso lato (o debole):

La proprietà relativa a $f_N(.....)$ dei processi stazionari vale per $N \leq 2$

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1)$$ indipendente da t_1

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau)$$

Pertanto:

$E[x(t)]$	indipendente da t
$R_x(t, t+\tau)$	dipende solo da τ

Il processo:

$$\{x(t)\} = A\cos(2\pi\ f_0\, t + \theta)$$

θ variabile aleatoria (ad es: uniformemente distribuita tra 0 e 2π)

risulta essere stazionario (almeno in senso lato) processo ciclo-stazionario in senso lato:

$$E\left[x(t)\right] \qquad \text{periodico in } t$$

$$R_x(t, t+\tau) \qquad \forall\ \tau \ \text{è periodica in } t$$

La dipendenza da *t*, se c'è,
deve essere di tipo periodico

Esempio:

$$\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

a_k = variabili aleatorie indipendenti

con $E[a_k] = 0, \quad E[a_k a_j] = \sigma_a^2\,\delta_{kj}$

è un processo ciclostazionario

Processo aleatorio:

Corrispondenza tra uscite elementari di un esperimento aleatorio e funzioni della variabile t, $x^{(i)}(t)$ (realizzazioni).

Fissati N istanti un istante t_1, t_2 ,..., t_N , campionando le realizzazioni otteniamo N variabili aleatorie $\{x_1=x(t_1), x_2=x(t_2),.., x_N=x(t_N)\}$ la cui densità di probabilità congiunta $f_N\left(x_1,t_1;\, x_2,t_2;....;\, x_N,t_N\right)$ rappresenta il modello completo di ordine N del processo.

Processo stazionario in senso forte (stretto): $\forall\, N$, il modello è invariante a una traslazione degli istanti temporali.
Il modello dipende da t_i-t_1 per i=2,..., N ma non da t_1.

Limitiamoci ora a $N \leq 2$.

Sia $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$.

Modello del primo ordine $f_1\left(x(t)\right)$ caratterizzato dal valor medio d'insieme $E\left[x(t)\right]$.
Modello del secondo ordine $f_2\left(x(t), x(t+\tau)\right)$ caratterizzato dalla funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau) = E\left[x(t)\,x(t+\tau)\right]$.

- Il processo si dice stazionario (almeno in senso debole o lato) se il valor medio e la funzione di autocorrelazione non dipendono da t.
- Il processo si dice ciclo-stazionario (almeno in senso debole o lato) se almeno una delle due medie dipende da t e, qualora ci sia dipendenza da t, la dipendenza è di tipo periodico.
- Il processo si dice non stazionario (nemmeno in senso debole) se almeno una delle due medie dipende da t in modo non periodico.

1) $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ (funzione pari)

2) $R_x(0) > 0$ (corrisponde alla potenza media del processo)

Per un processo stazionario $E[x^2(t)]$ è indipendente da *t*

La potenza istantanea media è indipendente da *t*

Essa è pari alla potenza media del processo

3) $R_x(0) \geq \left|R_x(\tau)\right|$

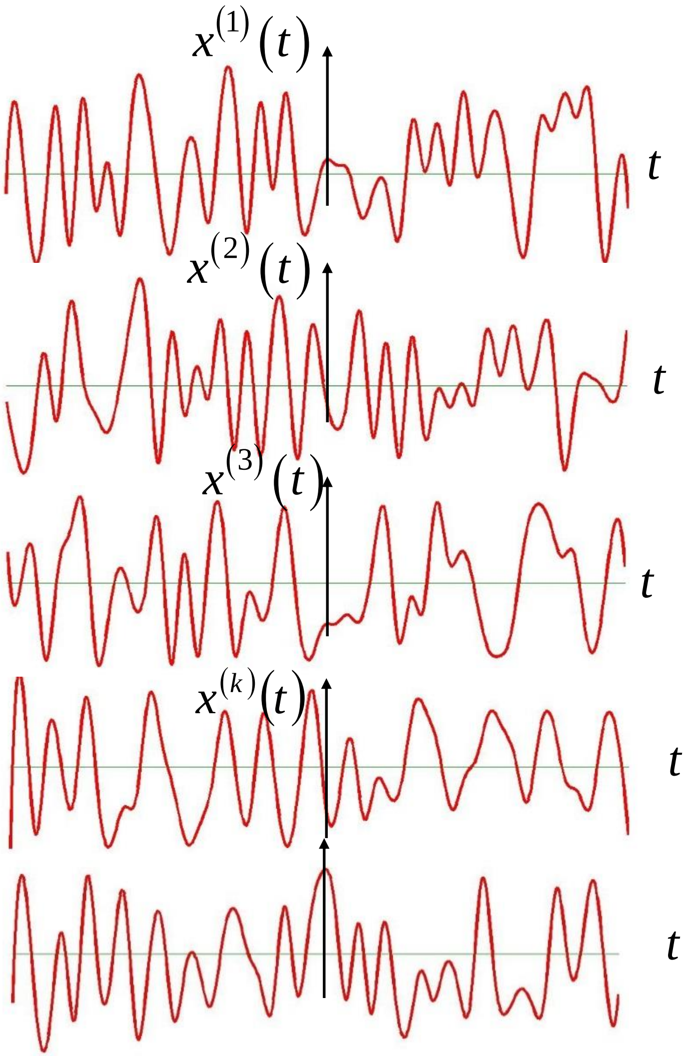
$$E\left\{\left[x(t) \pm x(t+\tau)\right]^2\right\} \geq 0$$

$R_x(0)$ $R_x(\tau)$

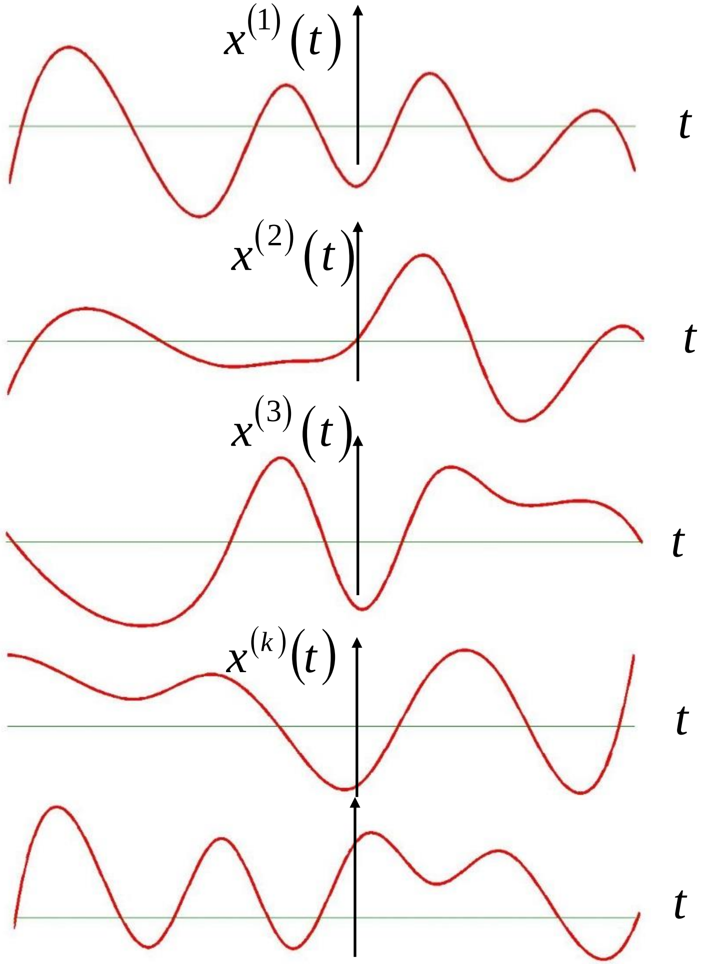
$$E\left\{\left[x(t) \pm x(t+\tau)\right]^2\right\} = E\left[x^2(t)\right] + E\left[x^2(t+\tau)\right] \pm 2E\left[x(t)x(t+\tau)\right] \geq 0$$

$$2R_x(0) \geq \pm 2R_x(\tau) \Longrightarrow R_x(0) \geq \left|R_x(\tau)\right|$$

Con riferimento ad un processo stazionario

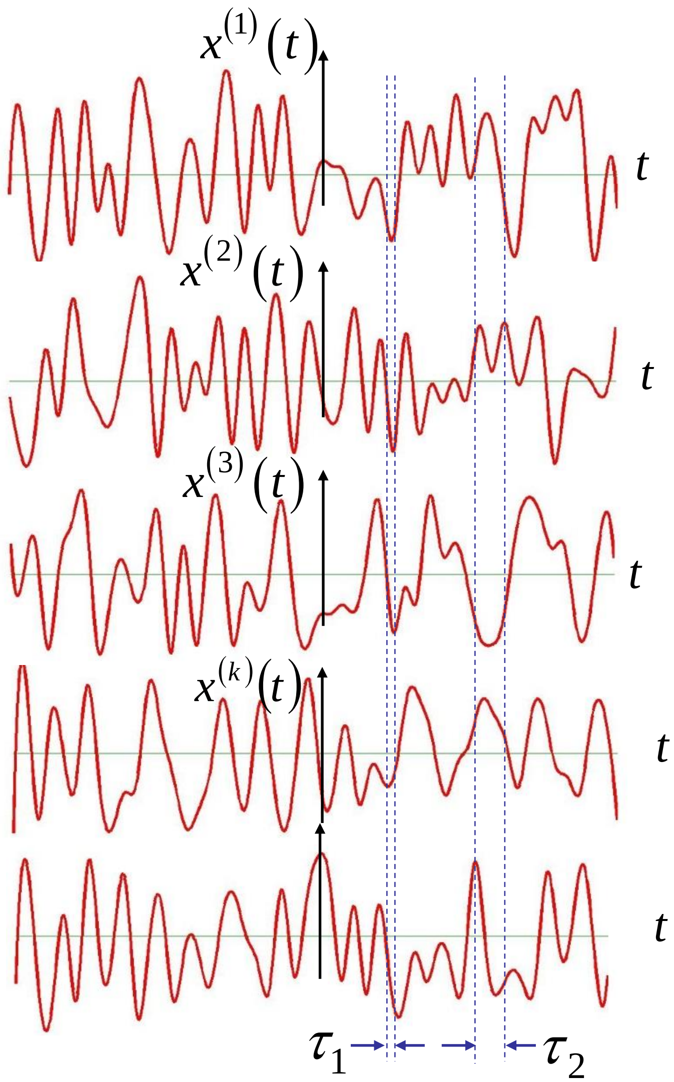


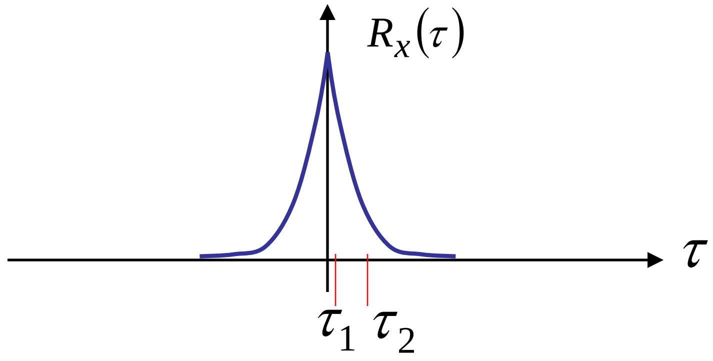
Processo rapidamente variabile



Processo lentamente variabile

Processo rapidamente variabile





$\tau_1 \Rightarrow$ I prodotti: $x(t)x(t+\tau)$ sono per lo più positivi

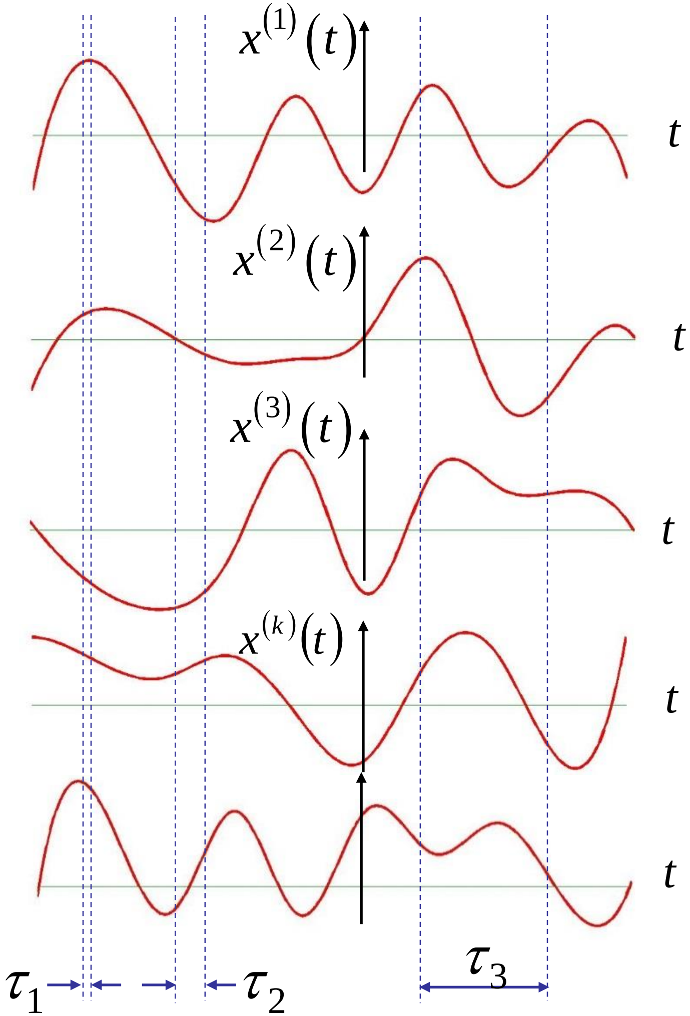
$$E[x(t)x(t+\tau_1)] > 0$$

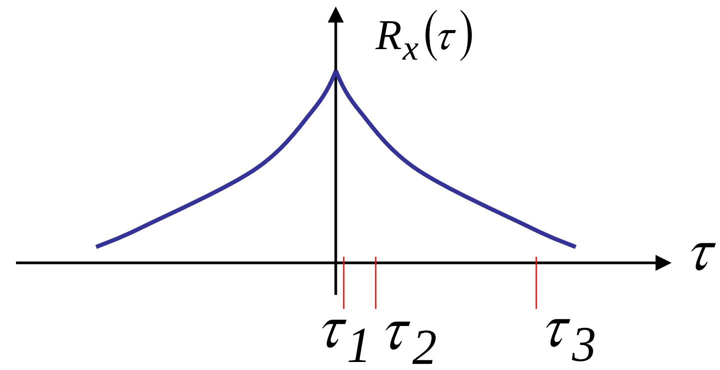
$\tau_2 \Rightarrow$ I prodotti: $x(t)x(t+\tau)$ sono sia positivi, sia negativi

$$E\left[x(t)x(t+\tau_2)\right] \cong 0$$

Significato della funzione di auto correlazione

Processo lentamente variabile





τ_1
τ_2

I prodotti: $x(t)x(t+\tau)$
sono per lo più positivi

$$E\left[x(t)\,x(t+\tau_1)\right]>0$$

$$E\left[x(t)\,x(t+\tau_2)\right]>0$$

τ_3

I prodotti: $x(t)x(t+\tau)$
sono sia positivi, sia negativi

$$E\left[x(t)\,x(t+\tau_3)\right]\cong 0$$

Definizione:

Data una funzione del tempo $x(t)$, e una funzione

$$g[x(t), x(t+\tau_1), x(t+\tau_2), x(t+\tau_3),\ldots],$$

si definisce media temporale di $g[x(t), x(t+\tau_1), x(t+\tau_2), x(t+\tau_3),\ldots]$ il

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} g\left[x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2),\ldots\right]\mathrm{d}t$$

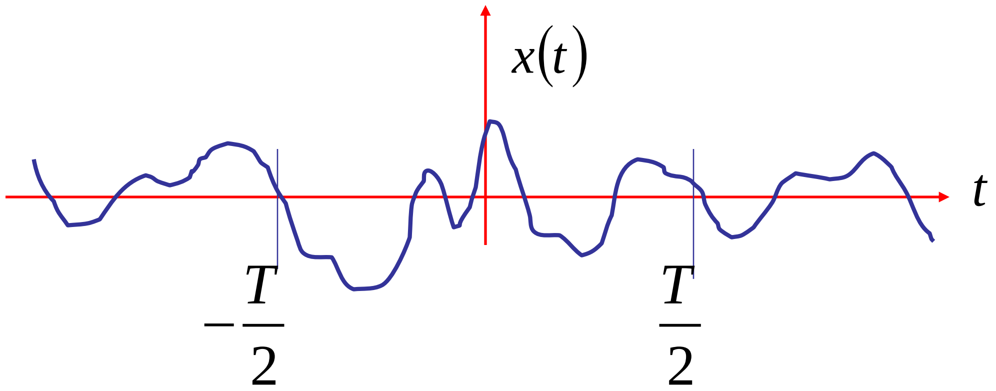
$$=\left\langle g\left[x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2),\ldots\right]\right\rangle$$

Se vi è una sola variabile τ_i, la indicheremo semplicemente con τ

Esempio n. 1

Non è presente alcuna variabile τ_i e la funzione $g[x(t)]$ è l'identità:

$$\boxed{g[x(t)] = x(t)}$$



$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,\mathrm{d}t =$$ Valor medio temporale di $x(t)$

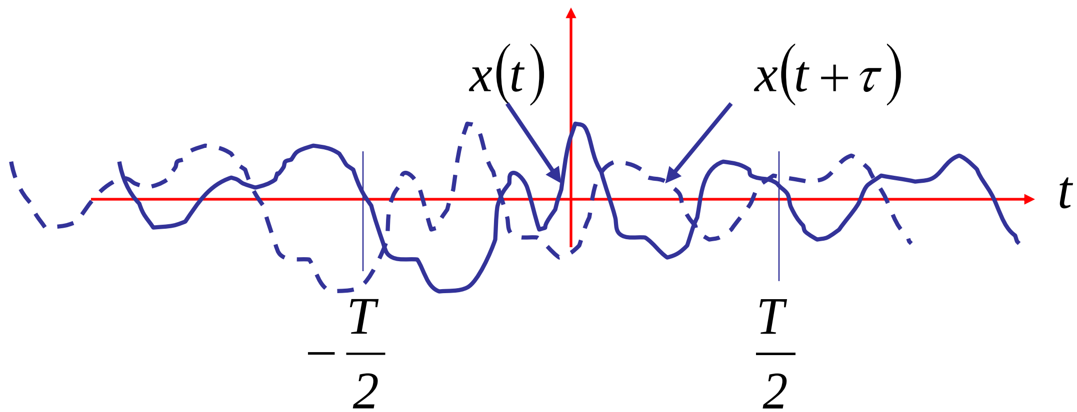
Esempio n. 2 $$g[x(t)] = x^2(t)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t$$ Valore quadratico medio

Corrisponde alla potenza media del segnale $x(t)$

Esempio n. 3

$$g\left[x(t), x(t+\tau)\right] = x(t)\,x(t+\tau)$$



$$\left\langle x(t)\,x(t+\tau)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,\mathrm{d}t = \Re_x(\tau)$$

$\boxed{\text{Funzione di autocorrelazione temporale del segnale } x(t)}$

- Le medie temporali vengono eseguite su singole funzioni

- Possono quindi essere eseguite su ciascuna realizzazione di un processo aleatorio

In generale:

una prefissata media temporale è funzione della realizzazione su cui viene eseguita

Ma....

ci sono processi aleatori tali che la media temporale è indipendente dalla realizzazione su cui viene eseguita esempio

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

A: var. aleatoria, unif. distribuita tra -1 e $+1$

ϕ: var. aleatoria, unif. distribuita tra 0 e 2π

A e ϕ tra loro indipendenti

Valor medio temporale:

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\mathrm{d}t = 0$$

indipendente dalla realizzazione

Autocorrelazione temporale:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A^2\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cos\left[2\pi f_0(t+\tau)+\varphi\right]\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2}A^2\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\varphi)\mathrm{d}t + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi f_0\tau)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi f_0\tau)}$$

Dipende dalla realizzazione

Definizione:

Processi aleatori regolari in senso stretto (o forte)

processi aleatori per i quali tutte le medie temporali fatte sulle varie realizzazioni coincidono con probabilità $= 1$

Processi aleatori regolari in senso lato (o debole)

processi aleatori per i quali il valor medio e l'autocorrelazione temporale fatte sulle varie realizzazioni coincidono con probabilità $= 1$

con probabilità $= 1$:

Significa che su qualche realizzazione una media può anche essere diversa rispetto a quella ottenuta sulle altre realizzazioni,

ma questo evento ha probabilità nulla

Esempio n. 1

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

A: var. aleatoria, unif. distribuita tra -1 e $+1$

ϕ: var. aleatoria, unif. distribuita tra 0 e 2π

A e ϕ tra loro indipendenti

$$\langle x(t)\rangle = 0$$

indipendente dalla realizzazione

$$\Re_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi f_0 \tau)$$

dipende dalla realizzazione

Questo processo non è regolare, nemmeno in senso debole

Esempio n. 2

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

A: costante

ϕ: var. aleatoria, unif. distribuita tra 0 e 2π

Valor medio temporale:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\mathrm{d}t = 0$$

indipendente dalla realizzazione

Autocorrelazione temporale:

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cos[2\pi f_0 (t+\tau) + \varphi]\mathrm{d}t$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau)}$$ indipendente dalla realizzazione

Questo processo aleatorio è regolare (almeno in senso debole)

Si consideri un processo che sia:

a) stazionario in senso stretto

b) regolare in senso stretto

Se per $\forall g[\cdot]$ e per $\forall(\tau_1,\tau_2,\tau_3\dots)$:

$$\left\langle g\left[x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2),\dots\right]\right\rangle = E\left\{g\left[x(t),x(t+\tau_1),x(t+\tau_2),\dots\right]\right\}$$

diremo che il processo aleatorio è ergodico in senso stretto

Si consideri un processo che sia:

a) stazionario in senso debole

b) regolare in senso debole

Se : $\langle x(t)\rangle = E[x(t)]$

e se $\forall\tau$ $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = E[x(t)x(t+\tau)] = R_x(\tau)$

diremo che il processo aleatorio è ergodico in senso debole

Significato:

Fissata una qualsiasi $N-\text{pla}\ \ (\tau_1,\ \tau_2,\ ...)$ e una qualsiasi funzione $g[\ ]$,

la media temporale

$$\left\langle g\left[x(t), x(t+\tau_1), x(t+\tau_2), \ldots\right]\right\rangle$$

(indipendente dalla realizzazione, poiché il processo è regolare)

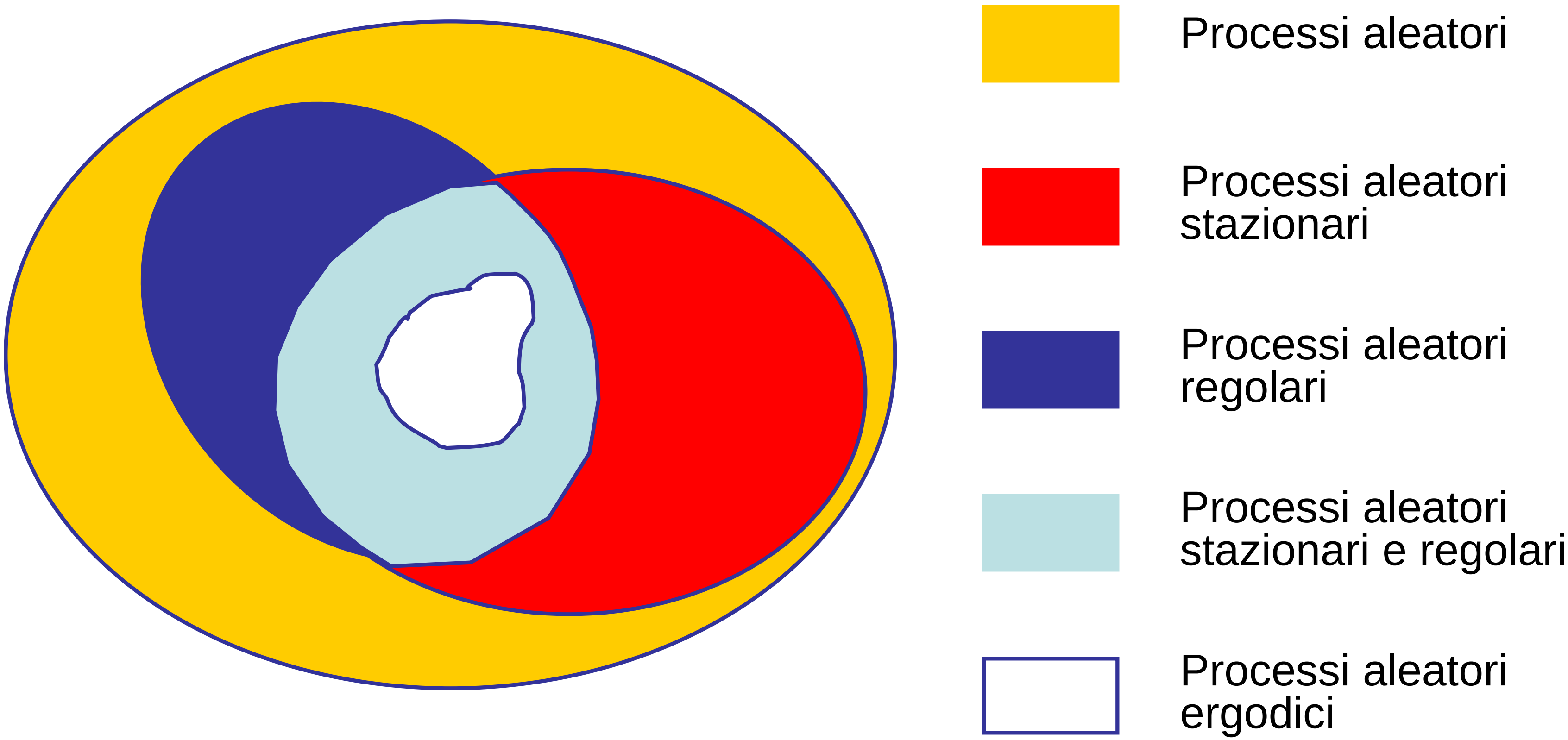
coincide con la media d'insieme

$$E\{g[x(t), x(t+\tau_1), x(t+\tau_2), \ldots]\}$$

(dipendente soltanto dalla funzione $\mathrm{g}[\ ]$ e dalla $N-\text{pla}\ (\tau_1,\ \tau_2,\ ...)$, poiché il processo è stazionario)

(Significato ovvio per il caso di processi ergodici in senso debole)

Mappa dei processi aleatori



Esempio di processo ergodico

Esempio

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

A: costante

ϕ: var. aleatoria, unif. distribuita tra 0 e 2π

Già visto che questo processo aleatorio è:

Stazionario (almeno in senso debole**)**
(diapositiva N. 21)

Regolare (almeno in senso debole)
(diapositiva N. 39)

Esso è anche ergodico (almeno in senso debole)

$$E\left[\left\{x(t)\right\}\right] = 0 \qquad R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$\left\langle x(t)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Re_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta)\,\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Energia e potenza

Qualche considerazione...

Per la i-esima realizzazione di un processo aleatorio:

$$E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad P_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Energia complessiva

Potenza media

variabili aleatorie

Per il processo:

$$E_x = E[E_i] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[x^2(t)\right]\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,t)\,\mathrm{d}t$$

$$P_x = E\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E\left[x^2(t)\right]\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} R_x(t,t)\,\mathrm{d}t$$

... ulteriori considerazioni

Se il processo è stazionario**:**

$$P_x = R_x(0) \qquad\qquad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(0)\,\mathrm{d}t$$

Per processi stazionari:

$$E_x \leq M < \infty \Longrightarrow R_x(0) = 0,\; E\left[x^2(t)\right] = 0$$

e quindi:

$$\boxed{\forall t, x(t) = 0 \quad \text{con} \;\; \text{probabilità} = 1}$$

Pertanto da un punto di vista teorico si considerano solo processi stazionari “di potenza”

Processi aleatori congiunti

Su uno stesso spazio probabilistico possono essere definiti più processi aleatori

(ad esempio i processi di ingresso e di uscita di un sistema LTI)

Due processi aleatori $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ si dicono

indipendenti (incorrelati) se:

$$\forall\,(t_1, t_2),$$

$x(t_1)$ e $y(t_2)$ sono variabili aleatorie indipendenti (incorrelate)

Funzione di mutua correlazione

Definizione:

$$\boxed{R_{xy}\left(t_1,t_2\right)=E\left[x\left(t_1\right)y\left(t_2\right)\right]}$$

NB.: $R_{xy}\left(t_1,t_2\right)=R_{yx}\left(t_2,t_1\right)$

Due processi aleatori si dicono

congiuntamente stazionari in senso lato se :

1) ambedue sono stazionari in senso lato

2) $R_{xy}(t_1,t_2)$ dipende solo da $\tau = t_2 - t_1$

In questo caso: $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$

Processo aleatorio:

Corrispondenza tra uscite elementari di un esperimento aleatorio e funzioni di una variabile $x^{(i)}(t)$

Fissato un istante t_0 il processo diventa una variabile aleatoria, caratterizzata dalla sua funzione di distribuzione e dalla sua densità di probabilità.

Ad ogni istante t_0 corrisponde un valor medio del processo $E\left[x(t_0)\right]$
Per certi processi aleatori esso è indipendente da t_0

Scegliendo due qualsiasi istanti t_1 e t_2, si evidenziano due variabili aleatorie: $x(t_1)$ e $x(t_2)$. Si definisce funzione di auto correlazione il valor medio del prodotto di queste due variabili aleatorie:

$$R_x(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right]$$

In generale essa dipende da t_1 e t_2, ma talvolta dipende soltanto dalla differenza $t_1 - t_2 = \tau$

Un processo aleatorio caratterizzato da:

Valor medio indipendente dall'istante t

Funzione di auto correlazione dipendente soltanto da $\tau = t_1 - t_2$

si dice stazionario in senso debole

Ogni realizzazione è una funzione della variabile t.

Per ognuna di esse si può definire un valor medio temporale:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,dt =$$

e una funzione di autocorrelazione temporale:

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau)\,dt = \Re_x(\tau)$$

Processi aleatori regolari in senso lato (o debole)

processi aleatori per i quali il valor medio e l'autocorrelazione temporale fatte sulle varie realizzazioni coincidono con probabilità $= 1$

Se un processo è:

a) stazionario in senso debole

b) regolare in senso debole

e se : $\langle x(t) \rangle = E[x(t)]$

e per $\forall \tau$ $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = E[x(t)x(t+\tau)] = R_x(\tau)$

allora il processo aleatorio è ergodico in senso debole

Determinare medie temporali e medie d'insieme del processo aleatorio,

$$\left\{x^{(k)}(t)\right\} = A\cos\left(2\pi f_0 t + |\theta_k|\right)$$

discutendo le caratteristiche del processo (stazionarietà, regolarità, ergodicità).

A e f_0 sono costanti, mentre θ_k è uniformemente distribuita tra -π e π.

Soluzione

Medie d'insieme

$$E\left[x(t)\right] = E\left[A\cos\left(2\pi f_0 t + |\theta_k|\right)\right] = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_k\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2A}{\pi}\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$E\left[x(t)x(t+\tau)\right] = E\left[A^2\cos\left(2\pi f_0 t + |\theta_k|\right)\cos\left(2\pi f_0\left(t+\tau\right) + |\theta_k|\right)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos\left(2\pi f_0\left(2t+\tau\right) + 2\theta_k\right)\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)\mathrm{d}\theta + \right] = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)$$

Medie temporali

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A\cos\left(2\pi f_0 t + |\theta_k|\right)dt = 0$$

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A^2\cos\left(2\pi f_0 t + |\theta_k|\right)\cos\left(2\pi f_0 (t+\tau) + |\theta_k|\right)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[\cos\left(2\pi f_0(2t+\tau)+2|\theta_k|\right)+\cos\left(2\pi f_0\tau\right)\right]\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)$$

Discussione

La media d'insieme dipende da t in modo periodico, mentre la funzione di autocorrelazione d'insieme non dipende da t. Pertanto il processo è ciclo-stazionario, almeno in senso debole.

Le medie temporali non dipendono dalla realizzazione. Pertanto il processo è regolare, almeno in senso debole.

Non essendo stazionario, il processo non è ergodico, nemmeno in senso debole.

Script Matlab (S1)

```
clear
f0=1; T0=5;dt=.01;t=0:dt:T0; %asse dei tempi
N=10000;N1=100; phim=pi; %realizzazioni, elementi correlazione, fase max
A=ones(1,N); %A=1
phi=rand(1,N)*2*pi-pi; %angolo unif. compreso tra -pi e pi
for i=1:N, x(i,:)=A(i)*cos(2*pi*f0*t+abs(phi(i))); end %realizzazioni
plot(t,mean(x,1),'k')
xlabel('t');
title('valor medio processo in funzione di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont');keyboard;
[corr,corrcoeff,media,varianza] = correlazione(x,N1); %correlazione d'insieme
plot(t(1:size(corr,2)),corr(1,:),'k')
xlabel('\tau');
title('correlazione d''insieme in funzione di \tau per un dato valore di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont'); keyboard;
plot(t(1:size(corr,1)),corr(:,1),'k')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('t');
title('correlazione d''insieme in funzione di t per un dato valore di \tau')
disp('digitare dbcont'); keyboard;
[corrt,corrcoefft,mediat,varianzat] = correlazionetemporale(x,N1); %corr. temporale
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(1,:),'k-o');hold on;
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(2,:),'r:*'); hold off
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('\tau');
title('correlazione temporale prima (o) e seconda (*) realizzazione')
```

Script Matlab (S2)

```
clear
f0=1; T0=5;dt=.01;t=0:dt:T0; %asse dei tempi
N=10000;N1=100; phim=pi; %realizzazioni, elementi correlazione, fase max
%A=2*(rand(1,N)>0.5)-1; %A=+1 o -1 con uguale probabilità
%A=2*rand(1,N)-1; %A uniformemente compresa tra -1 e 1
A=ones(1,N); %A=1
phi=rand(1,N)*phim; %angolo unif. compreso tra 0 e phim
for i=1:N, x(i,:)=A(i)*cos(2*pi*f0*t+phi(i)); end %realizzazioni
plot(t,mean(x,1),'k')
xlabel('t');
title('valor medio processo in funzione di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont');keyboard;
[corr,corrcoeff,media,varianza] = correlazione(x,N1); %correlazione d'insieme
plot(t(1:size(corr,2)),corr(1,:),'k')
xlabel('\tau');
title('correlazione d''insieme in funzione di \tau per un dato valore di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont'); keyboard;
plot(t(1:size(corr,1)),corr(:,1),'k')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('t');
title('correlazione d''insieme in funzione di t per un dato valore di \tau')
disp('digitare dbcont'); keyboard;
[corrt,corrcoefft,mediat,varianzat] = correlazionetemporale(x,N1); %corr. temporale
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(1,:),'k-o');hold on;
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(2,:),'r:*'); hold off
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('\tau');
title('correlazione temporale prima (o) e seconda (*) realizzazione')
```

Esercizio

Determinare medie temporali e medie d'insieme del processo aleatorio,

$$\left\{x^{(k)}(t)\right\} = A_k \cos\left(2\pi f_k t + \theta\right)$$

discutendo le caratteristiche del processo (stazionarietà, regolarità, ergodicità).

A_k può assumere con uguale probabilità i valori 1 e -1, f_k, indipendente da A_k, può assumere con uguale probabilità i valori f_0 e $2f_0$, mentre θ è una costante.

Soluzione

Medie d'insieme

$$E\left[x(t)\right] = E\left[A_k \cos\left(2\pi f_k t + \theta\right)\right] = E\left[A_k\right] E\left[\cos\left(2\pi f_k t + \theta\right)\right] = 0$$

$$E\left[x(t)x(t+\tau)\right] = E\left[A^2 \cos\left(2\pi f_k t + \theta\right)\cos\left(2\pi f_k (t+\tau) + \theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} E\left[\cos\left(2\pi f_k (2t+\tau) + 2\theta\right) + \cos\left(2\pi f_k \tau\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\theta\right) + \cos\left(2\pi f_0 \tau\right) + \cos\left(2\pi 2 f_0 (2t+\tau) + 2\theta\right) + \cos\left(2\pi 2 f_0 \tau\right)\right)$$

Esercizio

Medie temporali

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A_k \cos\left(2\pi f_k t+\theta\right)dt = 0$$

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \cos\left(2\pi f_k t+\theta\right)\cos\left(2\pi f_k\left(t+\tau\right)+\theta\right)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[\cos\left(2\pi f_k\left(2t+\tau\right)+2\theta\right)+\cos\left(2\pi f_k\tau\right)\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_k\tau\right)$$

Discussione

La media d'insieme non dipende da t, mentre la funzione di autocorrelazione d'insieme dipende da t in modo periodico. Pertanto il processo è ciclo-stazionario, almeno in senso debole.

L'autocorrelazione temporale dipende dalla realizzazione. Pertanto il processo non è regolare, nemmeno in senso debole.

```
clear
f0=1; T0=5;dt=.01;t=0:dt:T0; %asse dei tempi
N=10000;N1=100; phi=pi/4; %realizzazioni, elementi correlazione, fase max
A=2*(rand(1,N)>0.5)-1; %A=+1 o -1 con uguale probabilità
fk=f0*((rand(1,N)>0.5)+1); %fk=f0 o 2f0 con uguale probabilità
for i=1:N, x(i,:)=A(i)*cos(2*pi*fk(i)*t+phi); end %realizzazioni
plot(t,mean(x,1),'k')
xlabel('t');
title('valor medio processo in funzione di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont');keyboard;
[corr,corrcoeff,media,varianza] = correlazione(x,N1); %correlazione d'insieme
plot(t(1:size(corr,2)),corr(1,:),'k')
xlabel('\tau');
title('correlazione d''insieme in funzione di \tau per un dato valore di t')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
disp('digitare dbcont'); keyboard;
plot(t(1:size(corr,1)),corr(:,1),'k')
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('t');
title('correlazione d''insieme in funzione di t per un dato valore di \tau')
disp('digitare dbcont'); keyboard;
[corrt,corrcoefft,mediat,varianzat] = correlazionetemporale(x,N1); %corr. temporale
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(1,:),'k-o');hold on;
plot(t(1:size(corrt,2)),corrt(2,:),'r:*'); hold off
set(gca,'Ylim',[-1,1]);
xlabel('\tau');
title('correlazione temporale prima (o) e seconda (*) realizzazione')
```