Analisi dei processi aleatori nel dominio della frequenza

Sommario

- Densità spettrale di potenza
- Teorema di Wiener – Khintchine
- Processi aleatori attraverso sistemi LTI
- Processi aleatori gaussiani
- Rumore bianco
- Processi aleatori passa-banda

Premessa

Dato un segnale $x(t)$ di potenza:

$$\left(X_T(f) = F\left\{ x(t)\, rect\left[\frac{t}{T} \right] \right\} \right)$$

$$\underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt}_{\text{potenza media}} = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

Teorema di Parseval

Ammesso di poter scambiare l'operazione di limite con quella di integrazione,

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df$$

La funzione $S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$ rappresenta una densità di potenza

$S_x(f)df =$ Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda infinitesima df

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df =$ Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda tra f_1 e f_2

Densità spettrale di potenza

Per i processi aleatori: ogni realizzazione è un segnale

Ia ipotesi:

per ogni realizzazione esiste il: $\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T} = S^{(k)}(f)$

Le varie funzioni $S^{(k)}(f)$ costituiscono un nuovo processo aleatorio nella variabile f

Si *potrebbe* allora definire densità spettrale del processo

il valor medio di tale processo aleatorio

$$S_x(f) = E\left[S^{(k)}(f)\right] = E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T}\right\}$$

$S_x(f)\,df =$ Potenza media, mediamente portata dalle componenti spettrali del processo nella banda infinitesima *df*

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)\,df =$ Potenza media, mediamente portata dalle componenti spettrali del processo nella banda tra f_1 e f_2

IIª ipotesi:

per le varie realizzazioni non esiste il $\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T} = S^{(k)}(f)$

(situazione molto frequente in pratica)

Spesso non esiste il $\lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T}$, ma esiste il: $\lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T}\right\}$

Pertanto una definizione più appropriata per la densità spettrale di potenza è:

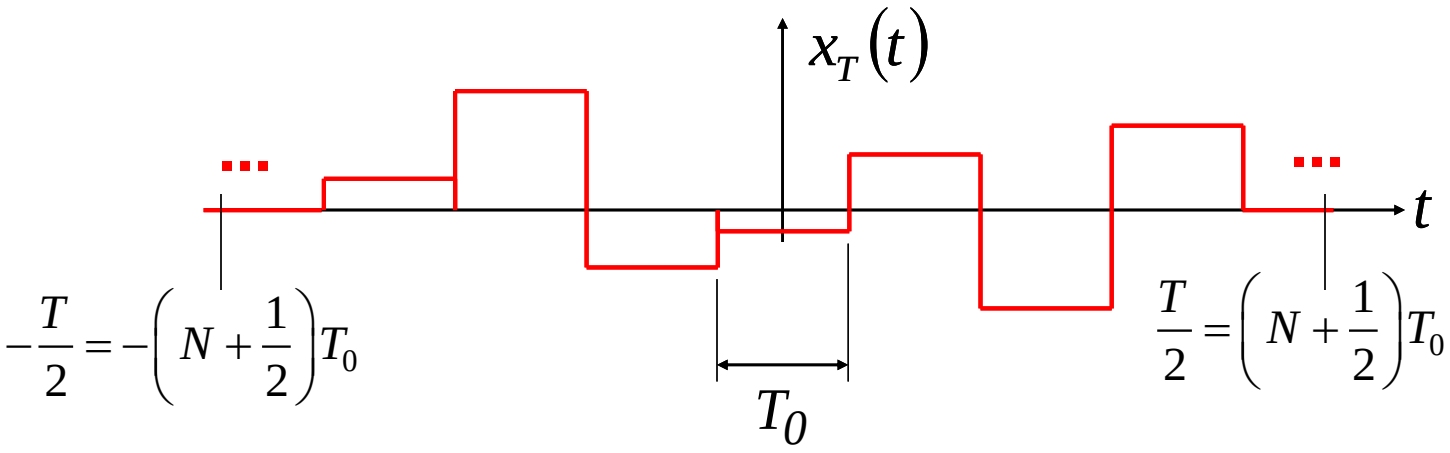
$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T}\right\}$$

essendo $X_T^{(k)}(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x^{(k)}(t) e^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \,\mathrm{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] \qquad \left(\begin{array}{l}\text{segnale PAM, con } E[a_n]=0\\ \text{e } E[a_i a_j]=\sigma_a^2\delta_{ij}\end{array}\right)$$

In questo caso:

$$x_T(t)=\sum_{n=-N}^{N} a_n \,\mathrm{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right]$$



Con quella scelta particolare di T

$$X_{T}(f)_{\{T=(2N+1)T_0\}} = \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)T_0}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)T_0} \sum_{n=-N}^{N} a_n \,\mathrm{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] e^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$= T_0 \,\mathrm{sinc}(f T_0) \sum_{n=-N}^{N} a_n \, e^{-j2\pi f nT_0}$$

$$\frac{|X_T(f)|^2}{T} = \frac{{T_0}^2 \,\mathrm{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)T_0} \left| \sum_{n=-N}^{N} a_n \, e^{-j2\pi f nT_0} \right|^2$$

$$= \frac{{T_0}^2 \,\mathrm{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)T_0} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} a_n a_m \, e^{-j2\pi f (n-m)T_0}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \; ?$$

ma...

se si esegue dapprima la media sulle realizzazioni...

$$E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right\} = \frac{T_0{}^2\,\mathrm{sinc}^2(f\,T_0)}{(2N+1)T_0} E\left\{\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} a_n a_m\, e^{-j2\pi f(n-m)T_0}\right\}$$

$$= \frac{T_0\,\mathrm{sinc}^2(f\,T_0)}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} E[a_n a_m]\, e^{-j2\pi f(n-m)T_0}$$

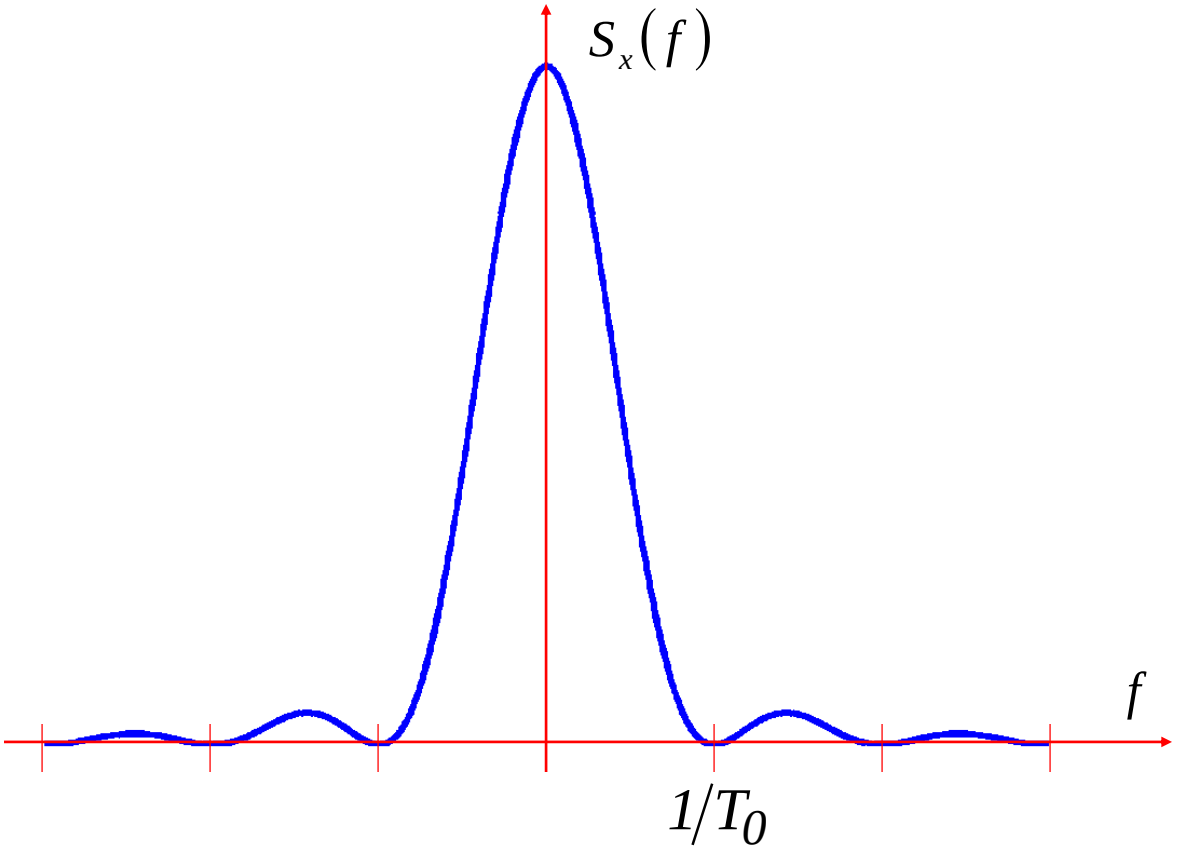
$$= \frac{T_0\,\mathrm{sinc}^2(f\,T_0)}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^{N} E[a_n^2]$$

$$= \frac{T_0\,\mathrm{sinc}^2(f\,T_0)}{(2N+1)}\,\sigma_a^2(2N+1)$$

$$S_x(f) = \lim_{N\to\infty} E\left[\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right] = T_0\,\sigma_a^2\left[\mathrm{sinc}(f\,T_0)\right]^2$$

questo limite esiste

Pur non esistendo il $\lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$, esiste il $\lim_{T\to\infty} E\left[\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right]$



(senza dimostrazione)

Sia $R_x(t,t+\tau)$ la funzione di auto correlazione di un processo $\{x(t)\}$.

Se per qualsiasi τ finito e per qualsiasi intervallo $\mathcal{A}$ di lunghezza $|\tau|$ si ha che:

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_x(t,t+\tau)\,dt \right| < \infty$$

In pratica,

condizione sempre verificata

allora la densità spettrale di potenza del processo è la

trasformata di Fourier

della media temporale della sua funzione di autocorrelazione.

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} R_x(t,t+\tau)\,dt \right\}$$

funzione di τ

Corollario

Se il processo è stazionario:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$$

(per ogni valore di τ, $R_x(t, t+\tau)$ è costante rispetto a *t*)

Se il processo è ciclostazionario di periodo T_0:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} R_x(t, t+\tau)\,dt\right\}$$

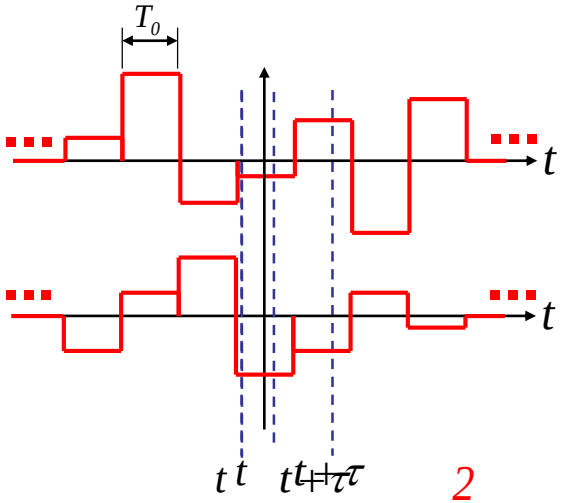
(per ogni valore di τ, $R_x(t, t+\tau)$ è periodica rispetto a *t*)

(Il suo valor medio rispetto a *t* coincide con il suo valor medio su un periodo)

Esempio

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \,\mathrm{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] \qquad \left(\begin{array}{l}\text{segnale PAM, con } E[a_n]=0 \\ \text{e } E[a_i a_j]=\sigma_a^2 \delta_{ij}\end{array}\right)$$

(vedi diap. N. 6)



$$R_x(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$$

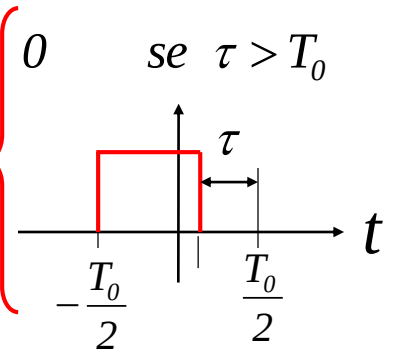
$$=E\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right)\right]\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\tau-mT_0}{T_0}\right)\right]\right\}$$

$$=E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n a_m \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t+\tau-mT_0}{T_0}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[a_n a_n]\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t+\tau-nT_0}{T_0}\right)$$

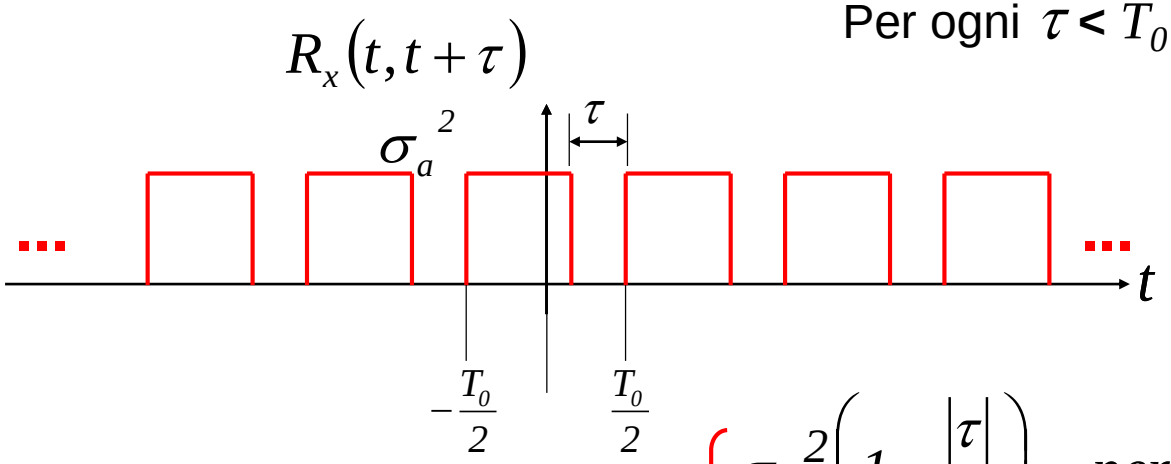
σ_a^2

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_a{}^2 w(t-nT_0) \qquad w(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t+\tau}{T_0}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } \tau > T_0\end{cases}$$



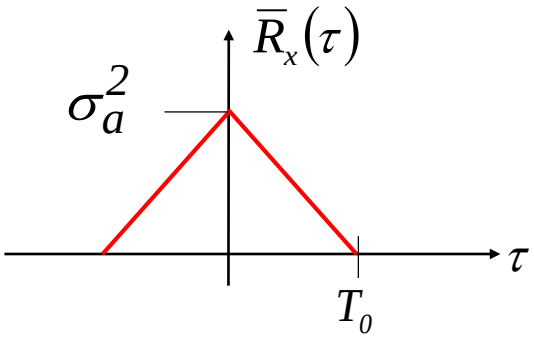
Esempio

Per ogni $\tau < T_0$ è periodica in t



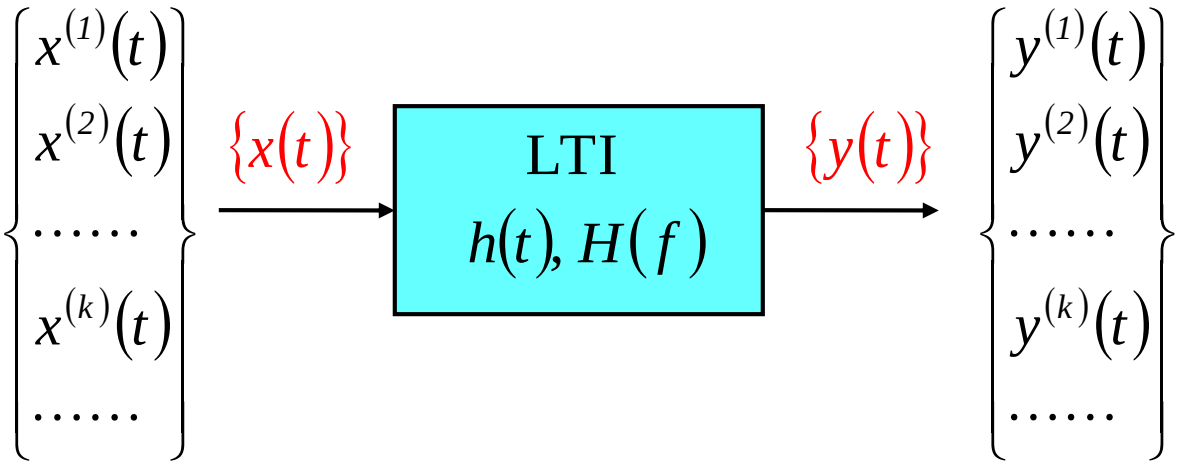
Il valor medio rispetto a t è:

$$\begin{cases} \sigma_a{}^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T_0}\right) & per \quad \tau \le T_0 \\ 0 \quad per \quad \tau > T_0 \end{cases}$$



Trasformata di Fourier :

$$F\{\bar{R}_x(\tau)\} = S_x(f) = T_0\,\sigma_a^2\left[\mathrm{sinc}(f\,T_0)\right]^2$$



$\{x(t)\}$ = Processo aleatorio di ingresso, stazionario

$\{y(t)\}$ = Processo aleatorio di uscita

Il processo all'uscita è ancora stazionario?

Verificheremo cosa succede del valor medio

e della funzione di autocorrelazione di $\{y(t)\}$

Valor medio:

$$y^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(k)}(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t-\tau)]h(\tau)d\tau = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = m_y$$

somma di var. aleatorie pesate

indip. dal tempo

Funzione di mutua correlazione:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E\left[x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x(t+\tau-\alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha = R_x(\tau)\otimes h(\tau)$$

Osservazione sulla funzione di mutua correlazione

Se la funzione di mutua correlazione fosse stata definita così:

$$R_{xy}(t+\tau,t)=E[x(t+\tau)y(t)]$$

si sarebbe ottenuto il seguente risultato: $R_{xy}(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(-\tau)$

(verifica a carico dello studente)

Funzione di auto correlazione:

$$R_y(t,t+\tau)=E[y(t)y(t+\tau)] = E\left[y(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[y(t)x(t+\tau-\alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\alpha-\tau)h(\alpha)d\alpha = R_{xy}(\tau)\otimes h(-\tau)$$

$$= R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

Osservazione

Con la definizione di funzione di mutua correlazione

$$R_{xy}(t+\tau,t)=E[x(t+\tau)y(t)]$$

si sarebbe ottenuto lo stesso risultato: $R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$

Pertanto:

anche il processo di uscita è stazionario (almeno in senso debole)

Densità spettrale di potenza del processo di uscita:

$$S_y(f)=\mathcal{F}\{R_y(\tau)\}=\mathcal{F}\{R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)\}$$
$$=\mathcal{F}\{R_x(\tau)\}\times\mathcal{F}\{h(\tau)\}\times\mathcal{F}\{h(-\tau)\}$$
$$=S_x(f)H(f)H^*(f) \quad \boxed{=S_x(f)|H(f)|^2}$$

Esempio

Sia:

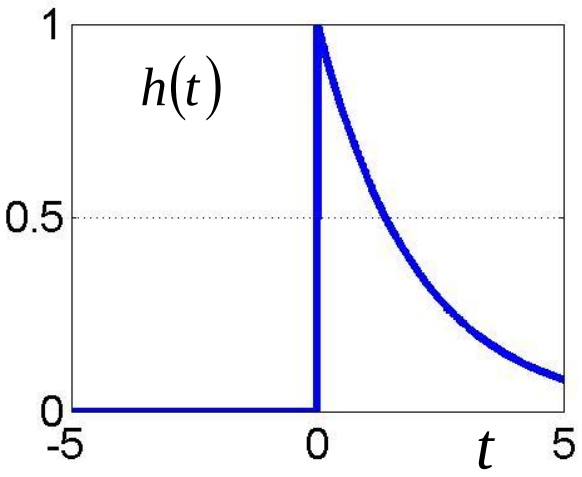
$$h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t) \qquad R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$$

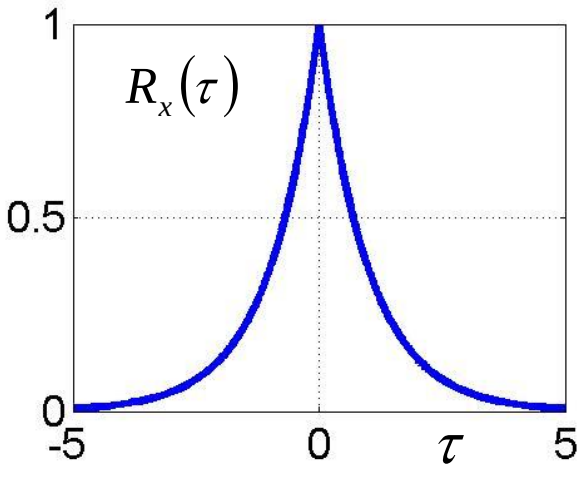
$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}(\tau-\alpha)} \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{\tau} & \tau \le 0 \\ \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\tau} - 2e^{-\tau} & \tau > 0 \end{cases}$$

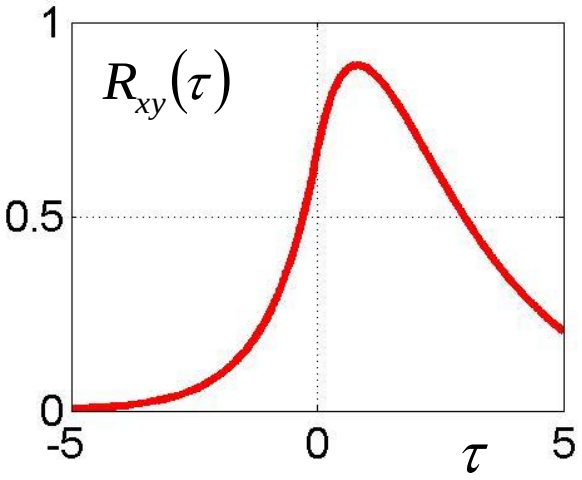
$$R_y(\tau)\big|_{\tau>0} = \int_{\tau}^{+\infty} \left(\frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\alpha} - 2e^{-\alpha} \right) e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\tau)} \mathrm{d}\alpha = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\tau} - \frac{4}{3} e^{-\tau}$$

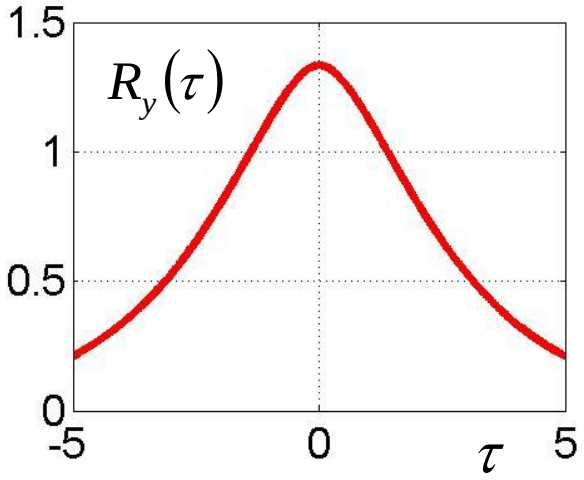
$$R_y(\tau) = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}|\tau|} - \frac{4}{3} e^{-|\tau|}$$

Esempio


$h(t)$
1
0.5
0
-5
0
t
5


$R_x(\tau)$
1
0.5
0
-5
0
τ
5


$R_{xy}(\tau)$
1
0.5
0
-5
0
τ
5


$R_y(\tau)$
1.5
1
0.5
0
-5
0
τ
5

Un processo aleatorio è detto "gaussiano" se:

scelto un qualsiasi intero n,

a qualsiasi $n-pla$ di istanti $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$
corrisponde una $n-pla$ di variabili aleatorie $\{x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)\}$
congiuntamente gaussiane

Significato:

La densità di probabilità congiunta è:

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{C})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\right]$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = \left((x_1-m_1), (x_2-m_2), ..., (x_n-m_n)\right)$$

$\mathbf{C}$ = matrice di covarianza $\quad C_{ij} = E\left[(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right]$

Esempio per due variabili aleatorie gaussiane

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m}) = \big((x_1 - m_1),\ (x_2 - m_2)\big)$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & E\big[(x_1-m_1)(x_2-m_2)\big] \\ E\big[(x_1-m_1)(x_2-m_2)\big] & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\rho = \frac{E\big[(x_1-m_1)(x_2-m_2)\big]}{\sigma_1\sigma_2} = \text{coefficiente di correlazione}$$

$$\det\mathbf{C} = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T =$$

$$= \big((x_1-m_1)(x_2-m_2)\big)\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\begin{vmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} (x_1-m_1) \\ (x_2-m_2) \end{vmatrix}$$

$$\left(\left(x_1-m_1\right)\left(x_2-m_2\right)\right)\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{vmatrix}\begin{matrix}\left(x_1-m_1\right)\\ \left(x_2-m_2\right)\end{matrix}$$

$$=\frac{\sigma_2^2\left(x_1-m_1\right)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\left(x_2-m_2\right)\left(x_1-m_1\right)+\sigma_1^2\left(x_2-m_2\right)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2}{\left(1-\rho^2\right)}$$

$$f_2\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2}{2\left(1-\rho^2\right)}}$$

Proprietà

1) Un processo gaussiano, posto all'ingresso di un sistema lineare, dà luogo ad un processo di uscita ancora gaussiano.

2) Un processo gaussiano stazionario in senso lato è stazionario anche in senso stretto.

3) Se due processi gaussiani sono tra loro incorrelati, sono anche indipendenti.

4) Se di un processo gaussiano è nota la densità di probabilità del secondo ordine, allora è nota la densità di probabilità di qualsiasi ordine.

Teorema del limite centrale

Date N variabili aleatorie indipendenti $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

di valor medio $\{m_1, m_2, \ldots, m_N\}$ e varianza $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_N^2\}$

La variabile aleatoria $Z = \sum_{i=1}^{N} x_i$ tende ad una variabile gaussiana con:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

a patto che per tutti gli indici i $\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_i}{\sigma} = 0$

(ogni variabile aleatoria contribuisce in maniera infinitesima alla somma)

Molte grandezza fisiche relative a fenomeni naturali seguono una distribuzione statistica gaussiana

Definizione

Un processo è detto “bianco” se la sua densità spettrale di potenza è costante per tutte le frequenze.

Alcuni processi di rumore naturali (ad esempio **il rumore termico**) possono essere considerati “bianchi” su un intervallo di frequenze molto ampio.

Es.: La densità spettrale del rumore dovuto all’agitazione termica degli elettroni in un conduttore è data da:

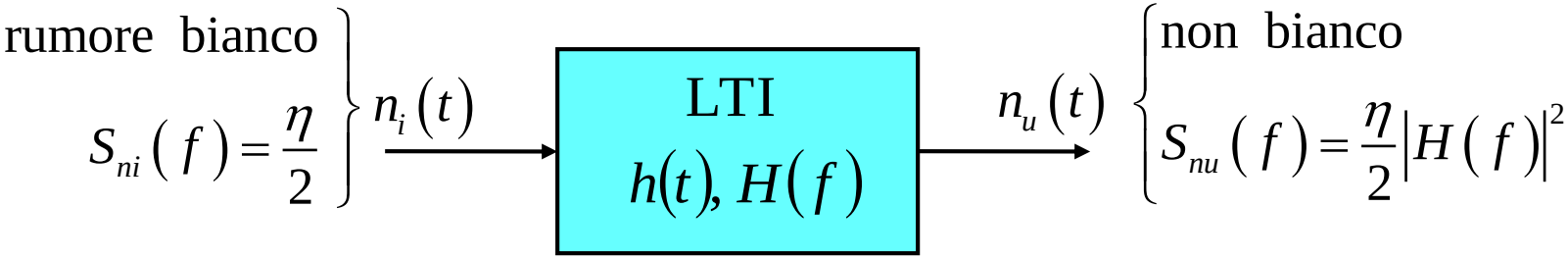
$$S_n(f) = \frac{\hbar f}{2\left(e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1\right)}$$

- $\hbar$ costante di Planck $(6.6 \times 10^{-34}\ J \times s)$
- k costante di Boltzmann $(1.38 \times 10^{-23}\ J / °K)$
- T temperatura assoluta $(°K)$

$$S_n(f) = \frac{hf}{2\left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1\right)}$$

A $300°K$ essa è praticamente costante e pari a $kT/2$ fino a frequenze dell'ordine di 10^{12} Hz.

Banda equivalente di rumore:



potenza di rumore in uscita:

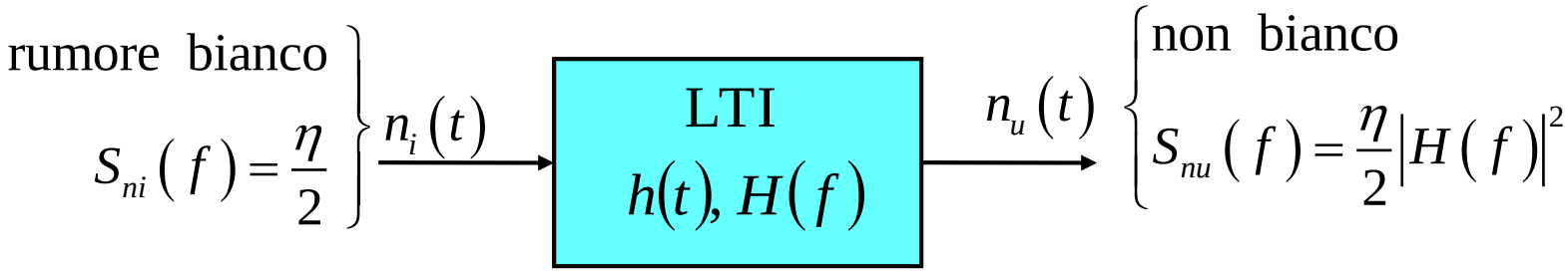
$$P_{nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nu}(f)\,df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2\,df = \eta \times B_{eq} H_{\max}^2$$

$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2\,df}{2H_{\max}^2}$$

Alcune considerazioni:

a) Un processo aleatorio bianco è un processo ideale, poiché implica una potenza media infinita

b) Utile per generare un processo aleatorio con densità spettrale di potenza $S(f)$.

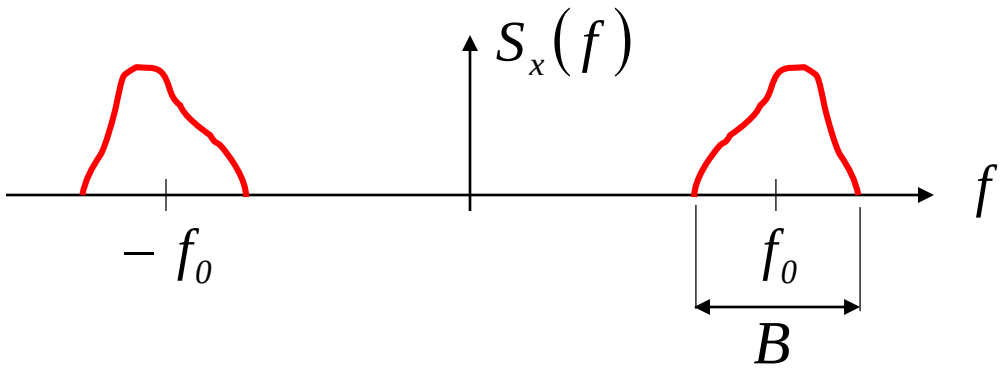


c) La funzione di auto correlazione di un processo aleatorio bianco stazionario di densità spettrale di potenza pari a $\eta/2$ è:

$$R_n(\tau)=\frac{\eta}{2}\delta(\tau)$$

Processi caratterizzati da:

$S_x(f) = 0$ tranne che su un intervallo di frequenze B attorno ad una frequenza f_0



Come per i segnali deterministici, anche per i processi passa banda si possono introdurre due processi in banda base:

$x_c(t)$ componente in fase

$x_s(t)$ componente in quadratura

tali che: $\{x(t)\} = \{x_c(t)\}\cos(2\pi f_0 t) - \{x_s(t)\}\sin(2\pi f_0 t)$

Proprietà dei processi $x_c(t)$ e $x_s(t)$.

- processi in banda base ($S_{xc}(f) = S_{xs}(f) = 0$ tranne che su un intervallo di frequenze B attorno a $f = 0$)

- se $\{x(t)\}$ è un processo stazionario, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono congiuntamente stazionari:

$$E\{x_c(t)\} \; e \; E\{x_s(t)\} \;\; \text{indip. da } t$$

$$R_{x_c}(t, t+\tau) = R_{x_c}(\tau)$$

$$R_{x_s}(t, t+\tau) = R_{x_s}(\tau)$$

$$R_{x_c x_s}(t, t+\tau) = R_{x_c x_s}(\tau)$$

Proprietà dei processi $x_c(t)$ e $x_s(t)$

Hanno la medesima densità spettrale di potenza (e la stessa funzione di autocorrelazione). Risulta:

(ricordare)

$$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$R_{x_c}(t, t+\tau) = E[x_c(t)x_c(t+\tau)] =$$

$$= E\{[x(t)\cos(\omega_0 t) + \hat{x}(t)\sin(\omega_0 t)][x(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau)) + \hat{x}(t+\tau)\sin(\omega_0(t+\tau))]\}$$

$$= E[x(t)x(t+\tau)]\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) +$$
$$+ E[x(t)\hat{x}(t+\tau)]\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau)) +$$
$$+ E[\hat{x}(t)x(t+\tau)]\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) +$$
$$+ E[\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))$$

$R_x(\tau)$

$\hat{R}_x(\tau)$

$-\hat{R}_x(\tau)$

$$= R_x(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau) + \hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0 \tau)$$

$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$

Stesso per $x_s(t)$

Con procedimento analogo

$$R_{x_c x_s}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) - R_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

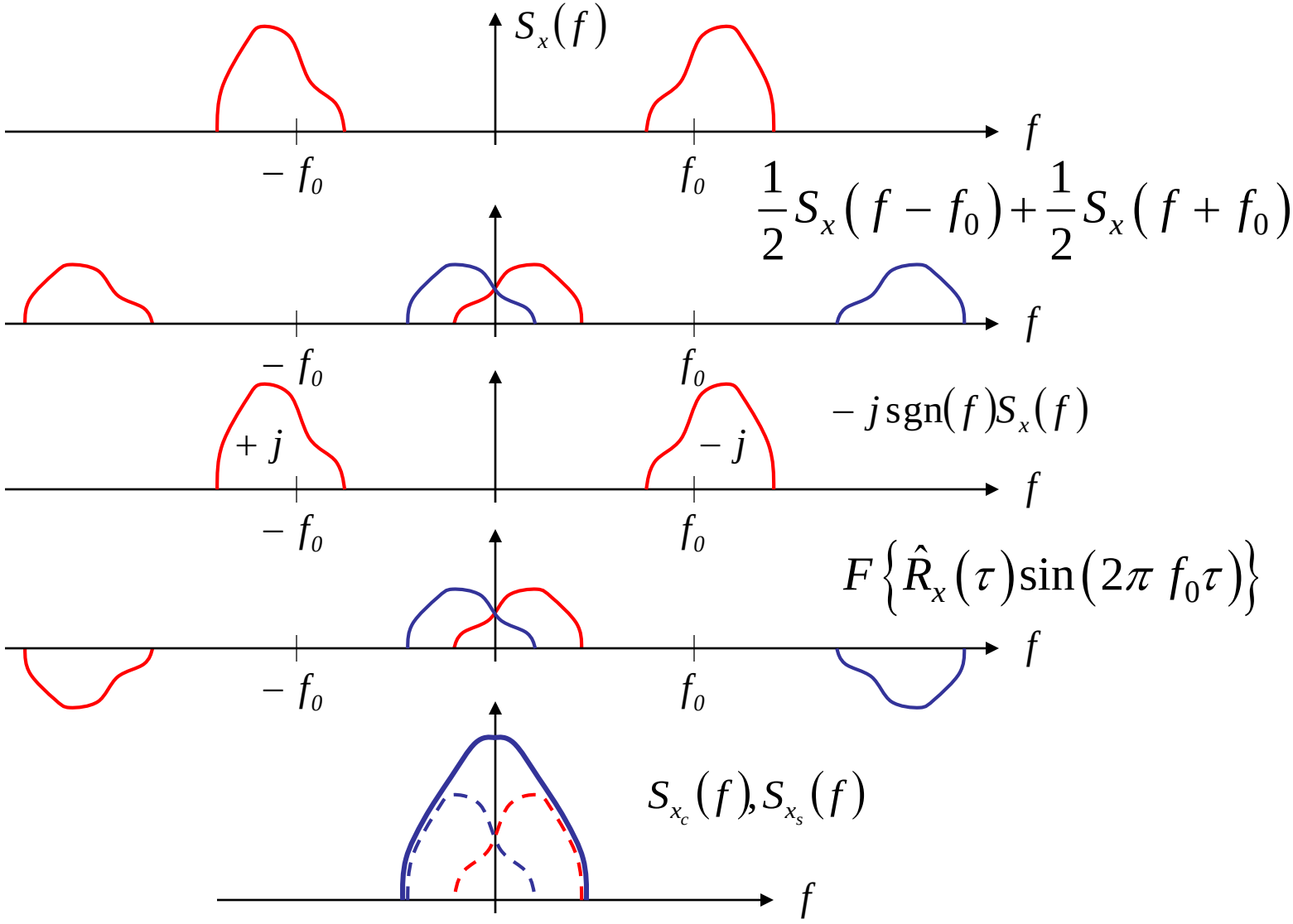
Densità spettrale di potenza:

$$R_{x_c}(\tau) = R_{x_s}(\tau) = R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

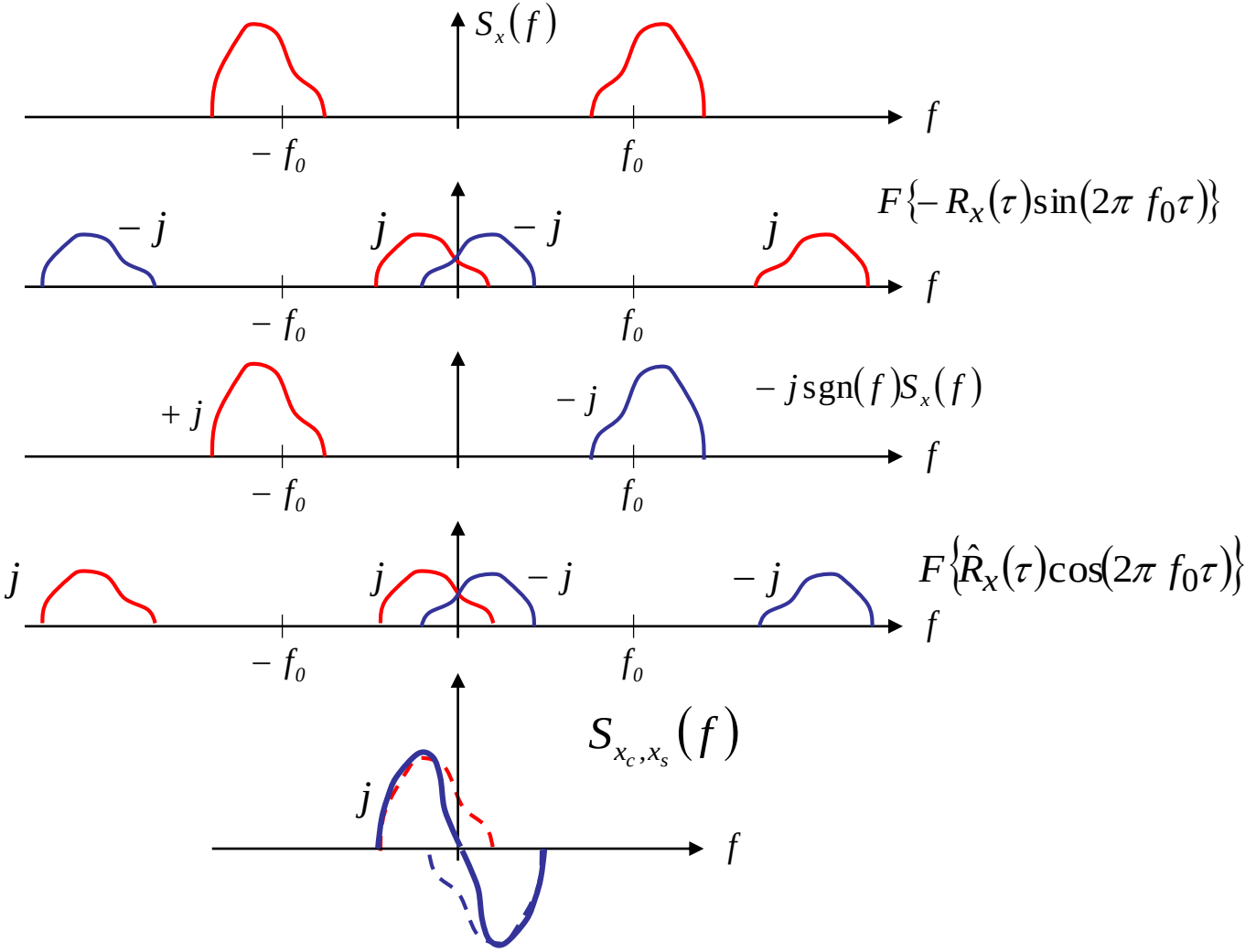
$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = F\left\{R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\right\}$$

$$\begin{cases} F\{R_x(\tau)\} = S_x(f) \\ F\{R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\} = \frac{1}{2}S_x(f - f_0) + \frac{1}{2}S_x(f + f_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\{\hat{R}_x(\tau)\} = -j\,\mathrm{sgn}(f)S_x(f) \\ F\{\hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\} = \\ = -\mathrm{sgn}(f - f_0)\frac{1}{2}S_x(f - f_0) + \mathrm{sgn}(f + f_0)\frac{1}{2}S_x(f + f_0) \end{cases}$$


$S_x(f)$
f
$-f_0$
f_0
$\frac{1}{2}S_x(f-f_0)+\frac{1}{2}S_x(f+f_0)$
$+j$
$-j$
$-j\,\mathrm{sgn}(f)S_x(f)$
$F\left\{\hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\right\}$
$S_{x_c}(f), S_{x_s}(f)$

In modo analogo: $S_{x_c,x_s}(f) = F\left\{\hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) - R_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\right\}$



In conclusione:

$$S_{x_c}(f)=S_{x_s}(f)=\begin{cases}S_x(f-f_0)+S_x(f+f_0) & \text{per } f \text{ attorno a } f=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$S_{x_c x_s}(f)=F\{R_{x_c x_s}(\tau)\}=\begin{cases}-j\left[S_x(f+f_0)-S_x(f-f_0)\right] & \text{per } f \text{ attorno a } f=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$R_{x_c x_s}(\tau)$ dispari $\Rightarrow$ $R_{x_c x_s}(0)=0$

Fissato un qualsiasi istante t,

$x_c(t)\,e\;\;x_s(t)$ sono due var. aleatorie **incorrelate**

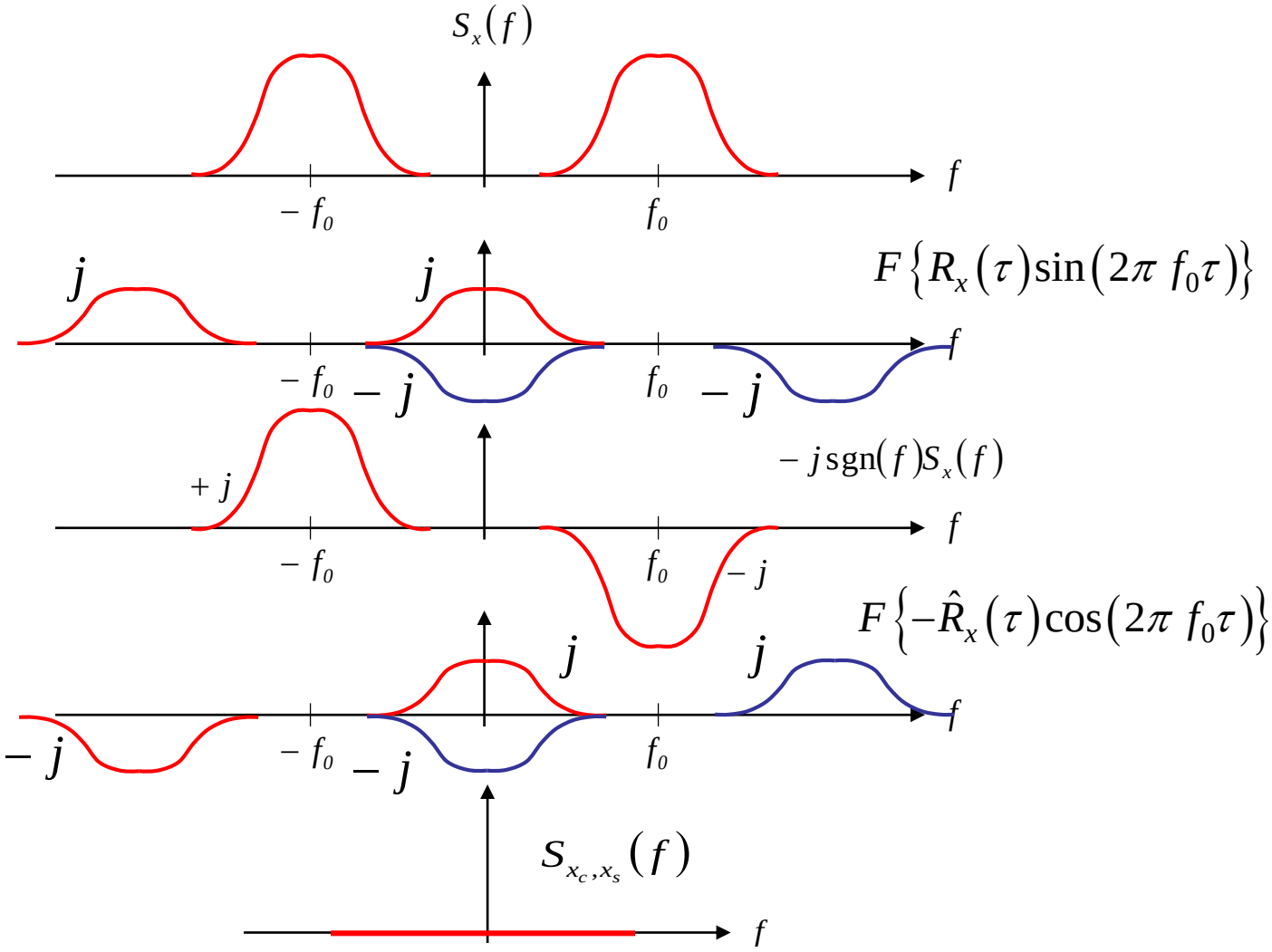
Se $S_x(f)$ è simmetrica rispetto a f_0, attorno a $f=0$

$$S_x(f+f_0)=S_x(f-f_0)$$

$$\Rightarrow S_{x_c x_s}(f)\equiv 0 \Rightarrow R_{x_c x_s}(\tau)\equiv 0$$

$x_c(t)\;e\;\;x_s(t)$ sono due processi aleatori incorrelati

Esempio


$S_x(f)$
f
$-f_0$
f_0
$F\{R_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\}$
j
$-j$
$-j\,\mathrm{sgn}(f)S_x(f)$
$+j$
$F\{-\hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\}$
$S_{x_c,x_s}(f)$

La **densità di potenza** di un processo aleatorio è una funzione della frequenza così definita:

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{\left|X_T^{(k)}(f)\right|^2}{T}\right\}$$

essendo $X_T^{(k)}(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x^{(k)}(t) e^{-j2\pi f t} dt$

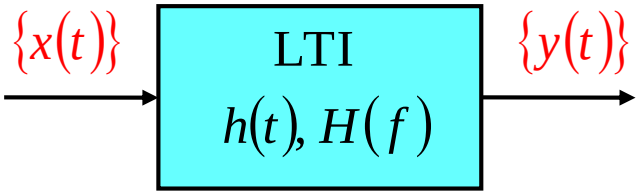
$S_x(f)\,\mathrm{d}f =$ Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda infinitesima df

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)\,\mathrm{d}f =$ Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda tra f_1 e f_2

Teorema di Wiener-Khintchine: $S_x(f) = \mathcal{F}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} R_x(t, t+\tau)\,dt\right\}$

Se il processo è stazionario: $S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$

Processi aleatori stazionari attraverso sistemi LTI



$$E[y(t)] = m_y = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau-\alpha)h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = R_x(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$R_y(t, t+\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

Processi aleatori passa banda:

$$\{x(t)\} = \{x_c(t)\}\cos(2\pi f_0 t) - \{x_s(t)\}\sin(2\pi f_0 t)$$

Se il processo è stazionario:

$$E\{x_c(t)\} \text{ e } E\{x_s(t)\} \text{ indip. da } t$$

$$R_{x_c}(t, t+\tau) = R_{x_c}(\tau)$$

$$R_{x_s}(t, t+\tau) = R_{x_s}(\tau)$$

$$R_{x_c x_s}(t, t+\tau) = R_{x_c x_s}(\tau)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{x_c}(t, t+\tau) &= E[x_c(t)x_c(t+\tau)] = \\ R_{x_s}(t, t+\tau) &= E[x_s(t)x_s(t+\tau)] = \end{aligned}\right\} R_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{x_c x_s}(\tau) = R_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau) - \hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = \begin{cases} S_x(f - f_0) + S_x(f + f_0) & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$S_{x_c x_s}(f) = F\{R_{x_c x_s}(\tau)\} = \begin{cases} -j[S_x(f + f_0) - S_x(f - f_0)] & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio

Si consideri un rumore bianco di densità spettrale di potenza pari a $\eta/2=10^{-6}$ W/Hz.

Si filtri il rumore con un filtro LTI con risposta impulsiva $h(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

Determinare la potenza del rumore in uscita al filtro (suggerimento: si consiglia di operare nel dominio del tempo).

Soluzione

Si determini l'autocorrelazione d'insieme

$$R_y(\tau)=\frac{\eta}{2}\delta(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{\eta}{2}h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

La correlazione produce un triangolo di altezza unitaria che si estende tra τ=-1 e τ=1 .

Pertanto la potenza di rumore in uscita è $P_y=R_y(0)=\frac{\eta}{2}=10^{-6}W$

Esercizio

Si consideri un processo aleatorio, $\{x(t)\}$, avente spettro di potenza:

$$S_x(f)=\begin{cases}10^{-11}\left(1-\dfrac{|f|}{10^8}\right) & 48\cdot10^6\le|f|\le52\cdot10^6\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Si ipotizzi che la funzione di densità di probabilità (PDF), p_x, della variabile aleatoria $x(t)$, che si ottiene fissando l'istante t, sia di tipo gaussiano. Determinare l'espressione della p_x.

$$\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(f)\,\mathrm{d}f=10^{-11}\left(1-0.48+1-0.52\right)4\cdot10^6=4\cdot10^{-5}\ \ \mathrm{W}$$

$$p_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$