

Estremi vincolati. Vincoli di uguaglianza

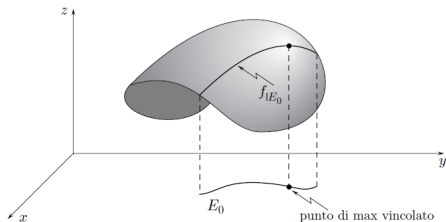
Siano $f, g \in C^1(X)$, con X aperto di $\mathbb{R}^2$, due funzioni in due variabili.

Obiettivo: vogliamo determinare gli estremi di f (**funzione obiettivo**) ristretta all'insieme (**vincolo**):

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Esempi:

- 1 Qual è il rettangolo di area massima tra quelli che hanno perimetro assegnato p ?
- 2 Avendo a disposizione 12 m^2 di cartone, qual è il volume massimo di una scatola rettangolare priva di coperchio che si può costruire?



La situazione più favorevole è quella in cui dall'equazione $g(x, y) = 0$ si può esplicitare $y = y(x)$ o $x = x(y)$, oppure più in generale quella in cui E_0 coincide con una curva γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I, \quad \text{con } I \text{ intervallo contenuto in } \mathbb{R}$$

In quest'ultimo caso il problema allora è ricondotto alla ricerca degli estremi della funzione reale di variabile reale:

$$\phi(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in I$$

Esempio:

Vogliamo determinare gli estremi di $f(x, y) = x^2 + 3y$ con il vincolo $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

Il vincolo rappresenta un'ellisse che ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in I, \quad [0, 2\pi] = \mathbb{I}$$

Il problema equivale a determinare gli estremi di:

$$\phi(t) = 4(\cos t)^2 + 9 \sin t \quad \text{in } [0, 2\pi]$$

Abbiamo che:

$$\phi'(t) = \cos t(-8 \sin t + 9) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$$

Poiché $\phi''(t) = -\sin t(-8 \sin t + 9) - 8(\cos t)^2$, abbiamo che $\phi''(\frac{\pi}{2}) = -1$ e $\phi''(t)(\frac{3\pi}{2}) = 17$. Quindi $t = \frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo locale, $t = \frac{3\pi}{2}$ è un punto di minimo locale.

Dato che $\phi(0) = \phi(2\pi) = 4$ e $\phi(\frac{\pi}{2}) = 9$, $\phi(\frac{3\pi}{2}) = -9$, deduciamo che 9 e -9 sono massimo e minimo globali rispettivamente.

In generale non sarà possibile ridurre a una dimensione il problema. Come estendere la teoria sviluppata nel caso degli estremi liberi?

Definizione

Un punto (x_0, y_0) è **regolare** per il vincolo $g(x, y) = 0$ se:

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$$

Esempio:

Sia $g(x, y) = y - x$, con $x \in [0, 1]$. Il vincolo rappresenta i punti della bisettrice $y = x$ con $x \in [0, 1]$. Poiché $\nabla g(x, y) = (-1, 1)$, tutti i punti del vincolo sono regolari.

Esempio:

Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Il vincolo rappresenta i punti del cerchio centrato nell'origine e di raggio 1. Poiché $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tutti i punti del vincolo sono regolari (osserviamo che $g(0, 0) = -1$ e quindi $(0, 0)$ non fa parte del vincolo).

Sia (x_0, y_0) un punto regolare. Supponiamo che E_0 coincida con una curva γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Possiamo scegliere il parametro t in modo che vari in un intorno I_0 di $0=t$ e che:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Il vettore $(x'(0), y'(0))$ rappresenta un vettore tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0) .

Consideriamo la funzione $\phi(t) = f(x(t), y(t))$.

Definiamo (x_0, y_0) punto critico vincolato se $t = 0$ è punto critico per ϕ , ovvero se $\phi'(0) = 0$. f è differenziabile. Quindi:

$$\phi'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

$\phi'(0) = 0$ significherà $f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0$ e quindi che la derivata di f in direzione tangente al vincolo in (x_0, y_0) è nulla.

Definizione

Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$. Il punto $(x_0, y_0) \in X$ si dice **critico** o **stazionario condizionato al vincolo** $g(x, y) = 0$ se:

- 1 (x_0, y_0) è un punto regolare per il vincolo;
- 2 la derivata di f in direzione tangente al vincolo si annulla in (x_0, y_0)

Teorema (caratterizzazione di un punto critico vincolato)

Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto regolare per $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. Allora (x_0, y_0) è un punto critico vincolato a E_0 se e solo se esiste un numero reale λ_0 tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Dimostrazione:

$\Rightarrow$: Siano $(x(t), y(t))$, $t \in I_0$ le equazioni parametriche di E_0 in un intorno di (x_0, y_0) con $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Sia $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$.

Se (x_0, y_0) è punto critico vincolato, vale

$f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0$. Quindi $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale al vettore tangente.

Sappiamo anche che $\nabla g(x_0, y_0)$ è normale a E_0 in (x_0, y_0) . Quindi $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono paralleli, cioè esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

$\Leftarrow$: Se vale $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$, $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale a E_0 in (x_0, y_0) e quindi vale $f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0$. $\square$

Segue immediatamente:

Teorema (condizione necessaria per gli estremi condizionati)

Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto regolare per $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. Se (x_0, y_0) è un punto di estremo condizionato al vincolo $g(x, y) = 0$, allora è punto critico condizionato. In particolare esiste λ_0 tale che valga $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

Dimostrazione:

(x_0, y_0) è di estremo condizionato se e solo se $t = 0$ è di estremo per $\phi(t) = f(x(t), y(t))$. Quindi $\phi'(0) = 0$. $\square$

Definizione

Il numero λ_0 prende il nome di **Moltiplicatore di Lagrange**.
La funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$ si chiama **Lagrangiana** ed è definita come:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Come possiamo tradurre:

Teorema (caratterizzazione di un punto critico vincolato)

Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto regolare per $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$. Allora (x_0, y_0) è un punto critico vincolato a E_0 se e solo se esiste un numero reale λ_0 tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

(x_0, y_0) è un punto critico condizionato se e solo se esiste λ_0 tale che il punto (x_0, y_0, λ_0) sia punto critico libero per $\mathcal{L}$.

Infatti i punti critici di $\mathcal{L}$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -g = 0 \end{cases}$$

dove le prime due equazioni coincidono con l'equazione

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$, mentre l'ultima esprime la **condizione di vincolo**.

Metodo:

Primo caso: il vincolo è esplicitabile, cioè una variabile si può scrivere in funzione dell'altra.

In questo caso il problema si riconduce a quello di risolvere un problema di massimo/minimo di una funzione definita in un intervallo.

Secondo caso: il vincolo non è esplicitabile.

In questo caso il problema si studia mediante la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange.

- 1 Si controlla se i punti del vincolo sono regolari. Quelli non regolari vanno esaminati a parte.
- 2 Si cercano i punti critici condizionati di f o equivalentemente quelli liberi della lagrangiana risolvendo il sistema.
- 3 Si determina la natura dei punti critici.

Esempio: si calcolino gli estremi di $f(x, y) = (x + y)^2$ col vincolo $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

Da $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$, ricaviamo che $\nabla g(x, y) = (2x, 4y)$ che si annulla soltanto in $(0, 0)$ che, però, non fa parte del vincolo. Quindi tutti i punti sono regolari.

Sia $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = (x + y)^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$.

Risolviamo:

$$\begin{cases} 2(x + y) - \lambda(2x) = 0 \\ 2(x + y) - \lambda(4y) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo che $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $P_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Possiamo vedere che $f(P_1) = 0$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = \frac{3}{2}$, $f(P_4) = \frac{3}{2}$.

Segue quindi che P_1 e P_2 sono minimi, mentre P_3 e P_4 sono massimi.

Esempio: si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ col vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Poniamo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. Abbiamo che:

$$f|_C(x, y) = x^2 + 4y^2 = (x^2 + y^2) + 3y^2 = 1 + 3y^2$$

Poiché $y \in [-1, 1]$ (il vincolo è il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1), $f|_C(x, y)$ ha minimo in $y = 0$ e massimo in $y = \pm 1$. Segue quindi che la funzione $f|_C(x, y)$ ha minimi in $(\pm 1, 0)$ e massimi in $(0, \pm 1)$.

Attenzione: si poteva applicare anche il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Fare per esercizio.

Esercizi

1. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = xy - y^2 + 3$ ristretta al vincolo $g(x, y) = x + y^2 - 1$.
2. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ ristretta al vincolo $g(x, y) = x + y + 2$.
3. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$ ristretta al vincolo $g(x, y) = 9x^2 + 4y - 3$.
4. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = 4 - x$ ristretta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
5. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3$ ristretta al vincolo $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4$.
6. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = x - y$ ristretta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
7. Si calcolino gli estremi della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ ristretta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.