

ESERCIZI DI ANALISI 2 - Serie 1

Esercizio 1. Studiare il carattere delle seguenti serie, e ove possibile calcolarne la somma.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$ (diverge)
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n+3}}$ (somma: $2/75$)
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^5+3}}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^4+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{4n^3+3} \right)^n$ (converge)
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \frac{1}{n(n+1)} + 3^{-n} \right)$ (somma: $5/2$)
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{n^4+n^2+3}$ (converge)
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$ (converge)
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n^2 \log n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3}$

Esercizio 2. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di x :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ (diverge per $x \geq 5$, converge assolutamente per $1 < x < 5$, indeterminata per $x \leq 1$).

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ (converge assolutamente per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, diverge per $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, converge per $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Esercizio 3. Dire se le seguenti serie convergono:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + n^{-3})$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Esercizio 4. Discutere, al variare di x , la convergenza delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{n!}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Esercizio 5. Dire se le seguenti serie convergono:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+9}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n}^{-1}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\sin n)]^n$.

Esercizio 6. Discutere, al variare di x , la convergenza delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{nx}$.

Esercizio 7. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$