meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 1.0
Scrittura equazioni del moto

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Lo studio di un sistema dinamico può essere fatto in molti modi differenti, in funzione dell'utilizzo, della sua rappresentazione matematica o degli scopi richiesti.
Ad esempio, si può:

- studiare l'evoluzione delle grandezze nel dominio del tempo…
(delle grandezze caratteristiche, degli stati…)

- studiare la risposta del sistema in funzione della forzante applicata
(impulsiva, armonica, random, operativa..)

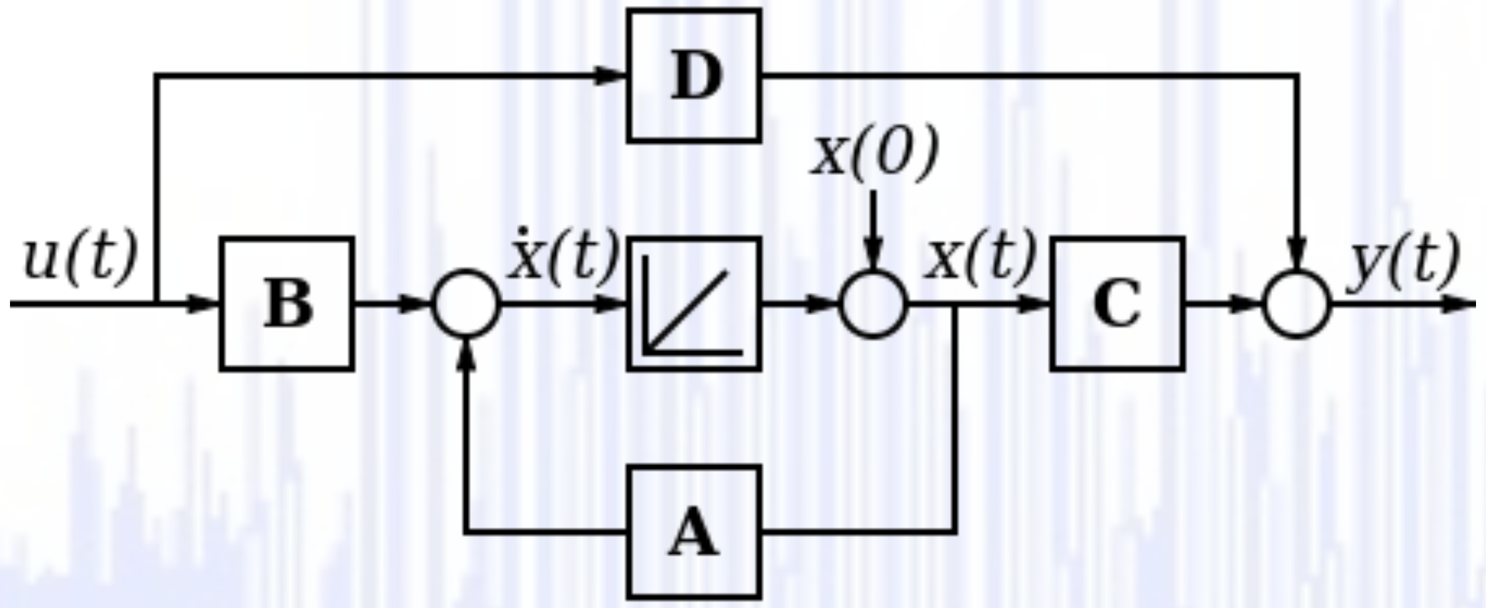
- controllare la risposta variando le caratteristiche del sistema e della forzante applicata per ottenere specifici risultati..
(controllo velocità, vibrazione residua..)

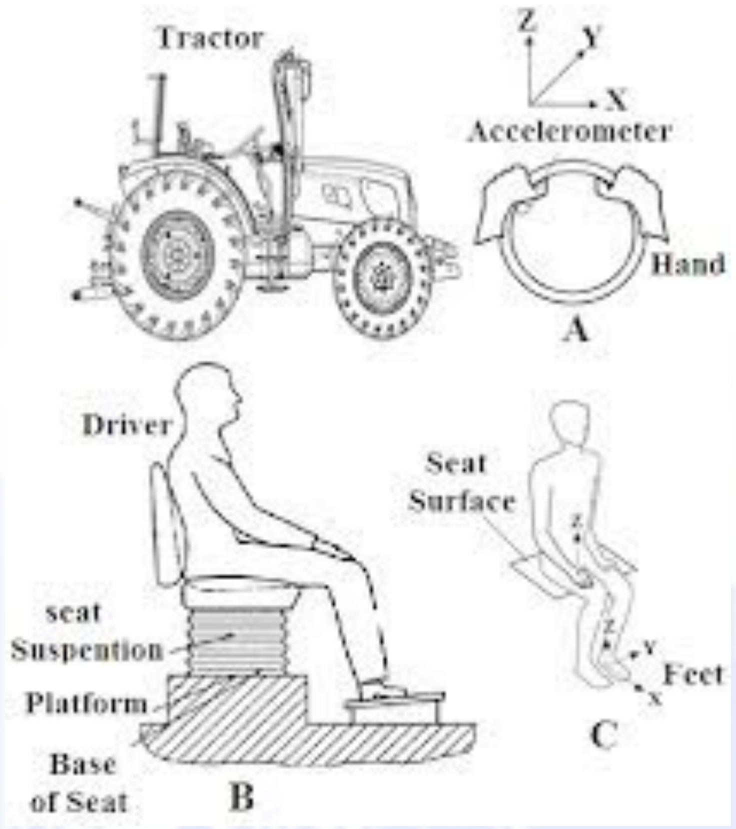
- …

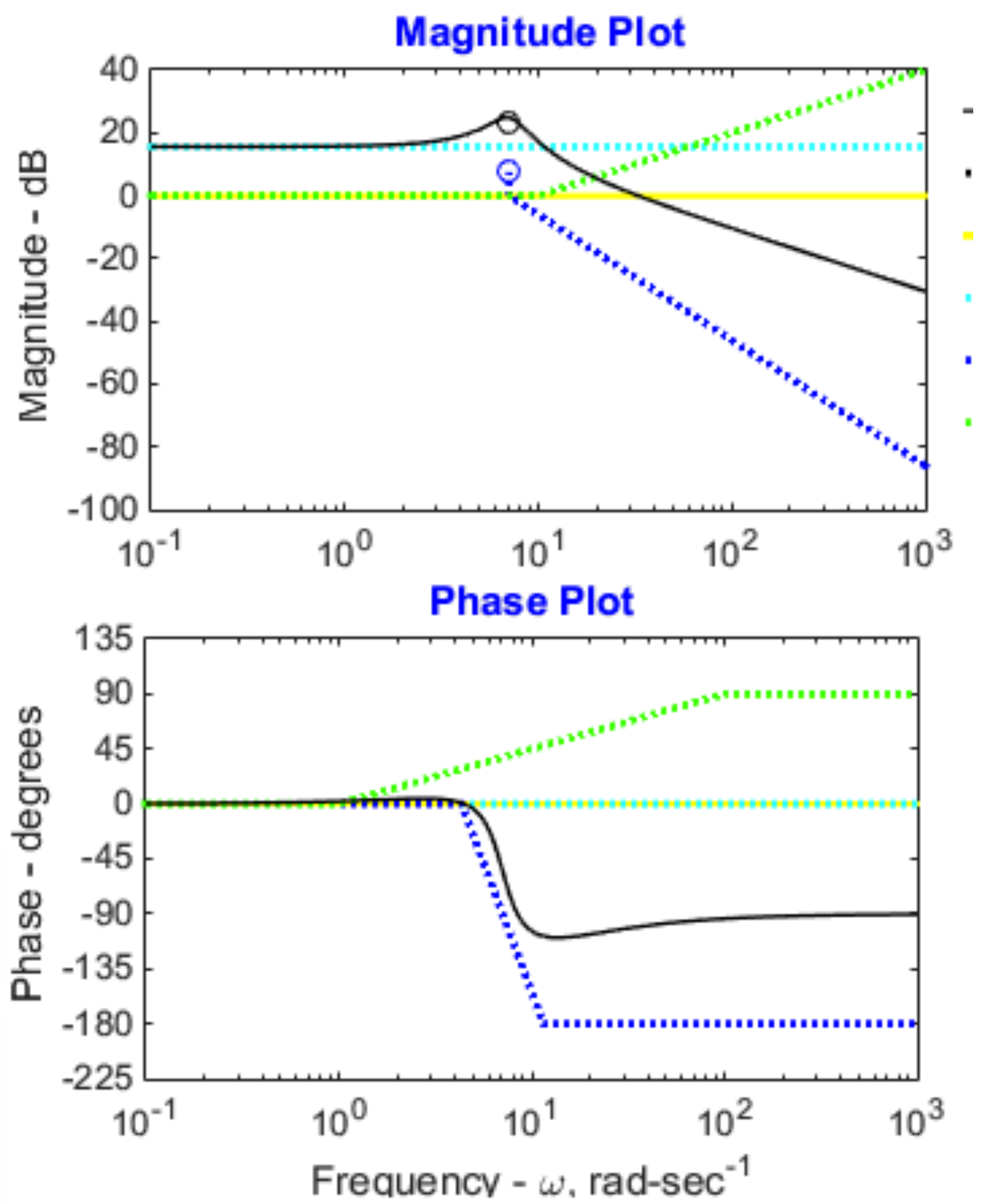
amplezza di vibrazione
nel tempo
variazione freq. naturale
vs presenza di danno

risposta sospensioni
vs eccitazione strada

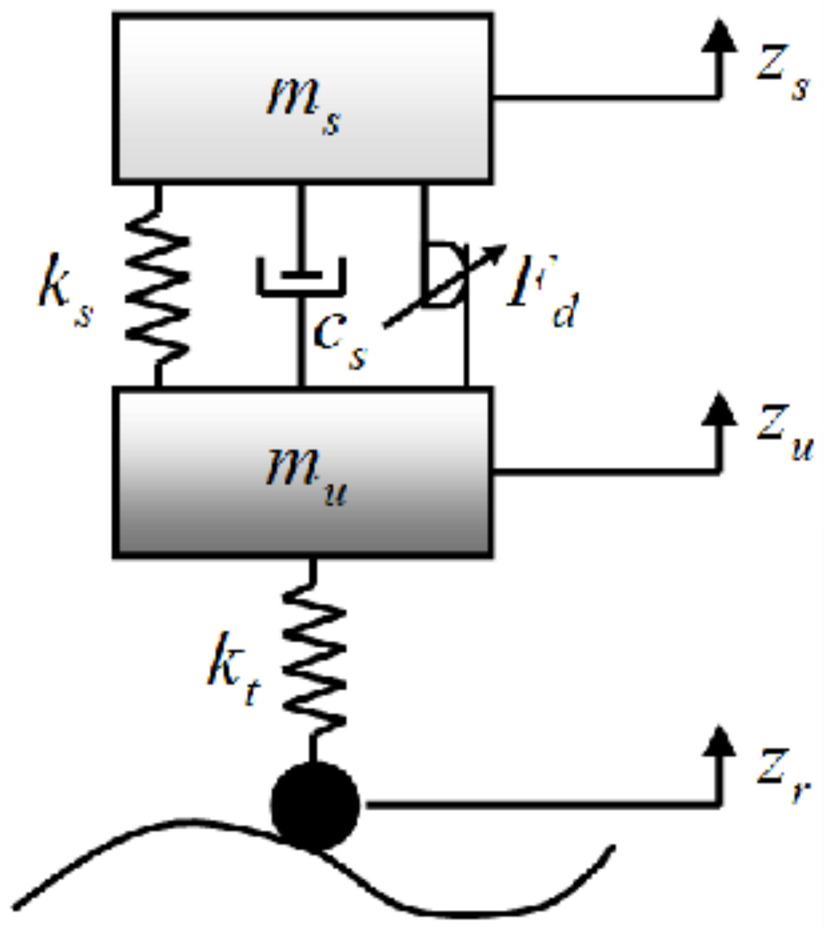
controllo attivo gimbal
macchina fotografica







Per fare tutto ciò risulta fondamentale avere una formulazione "algebrico-matematica" del problema!



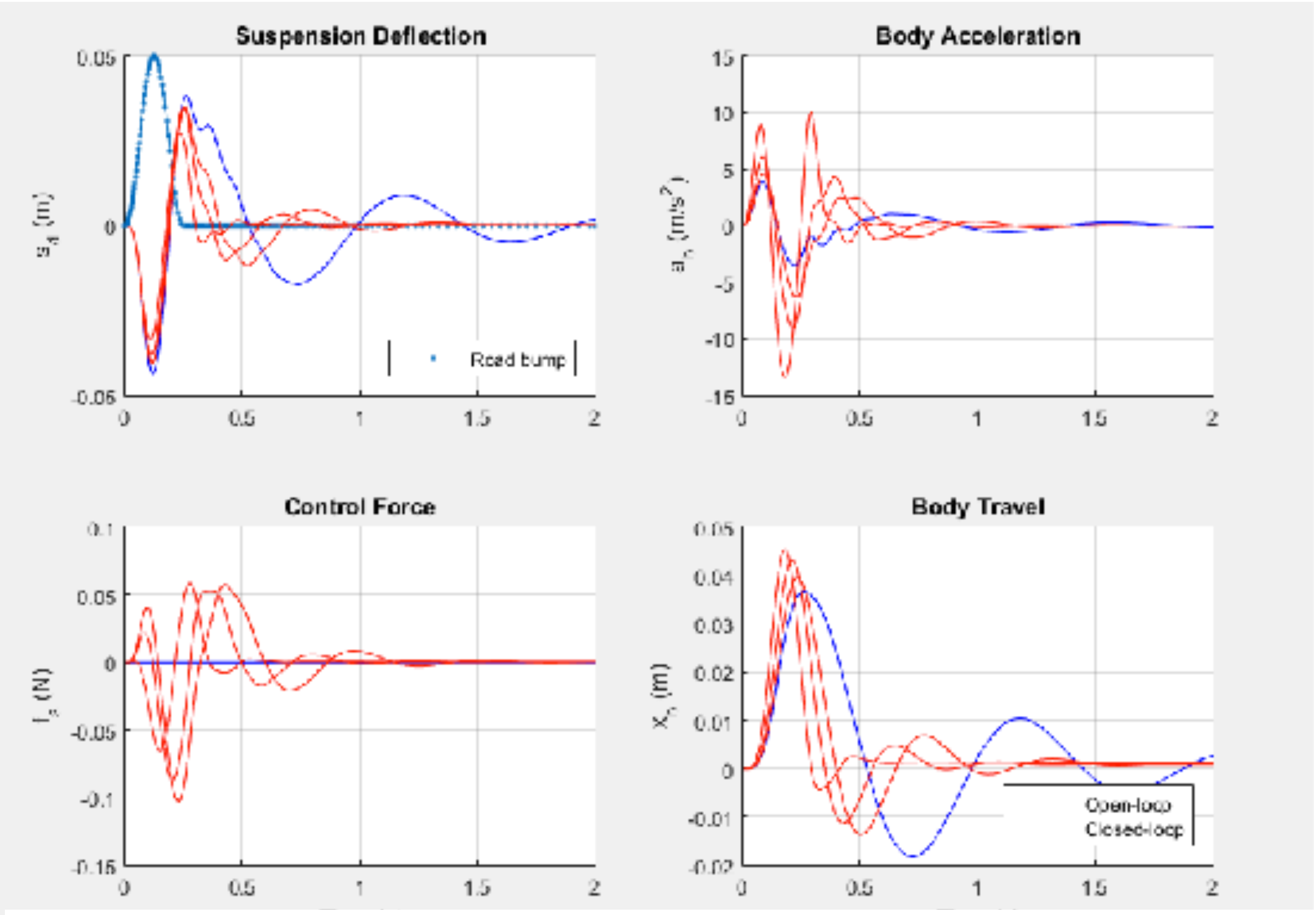
© izmocars

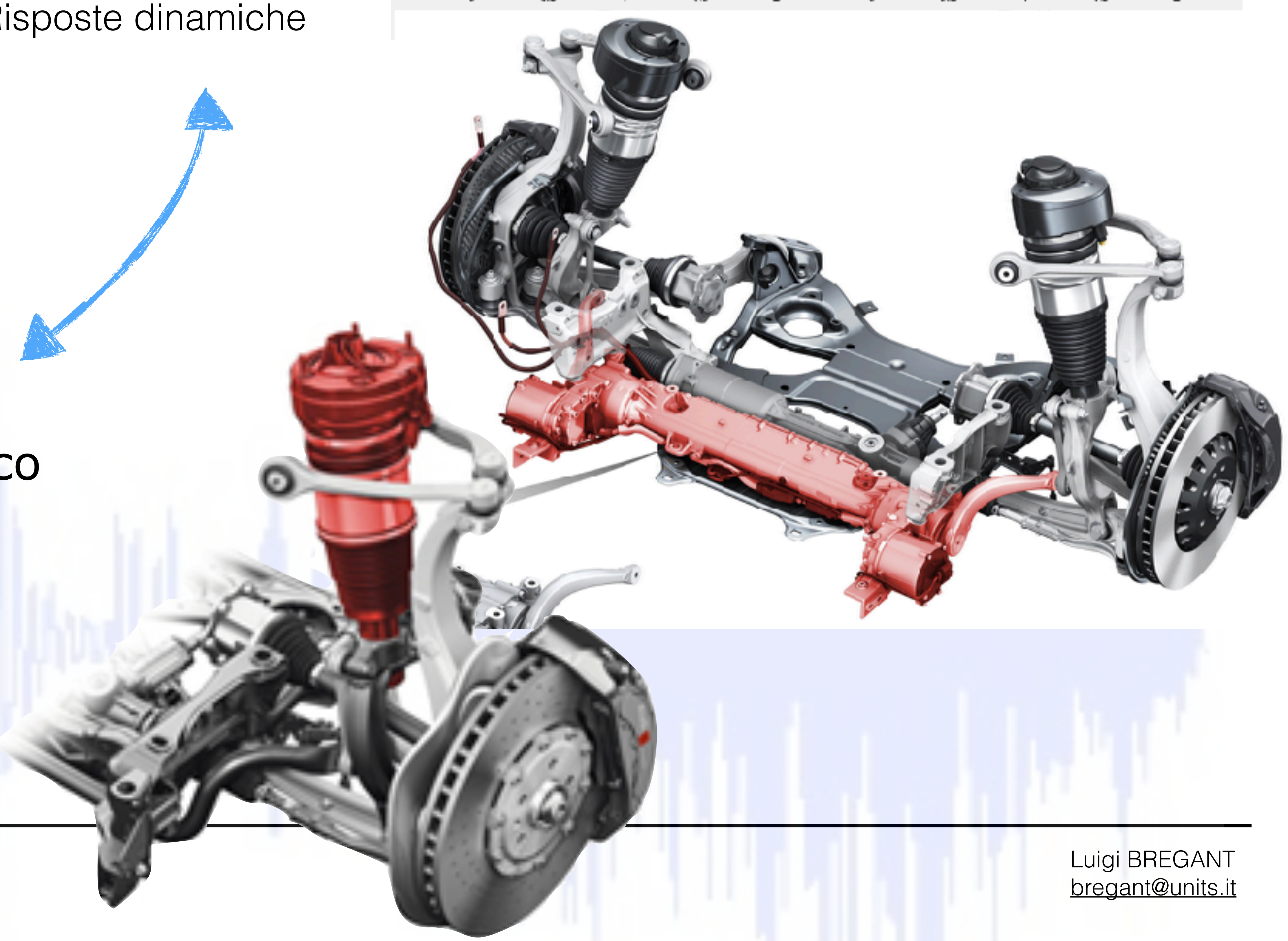
Sistema fisico

Modello numerico

Risposte dinamiche

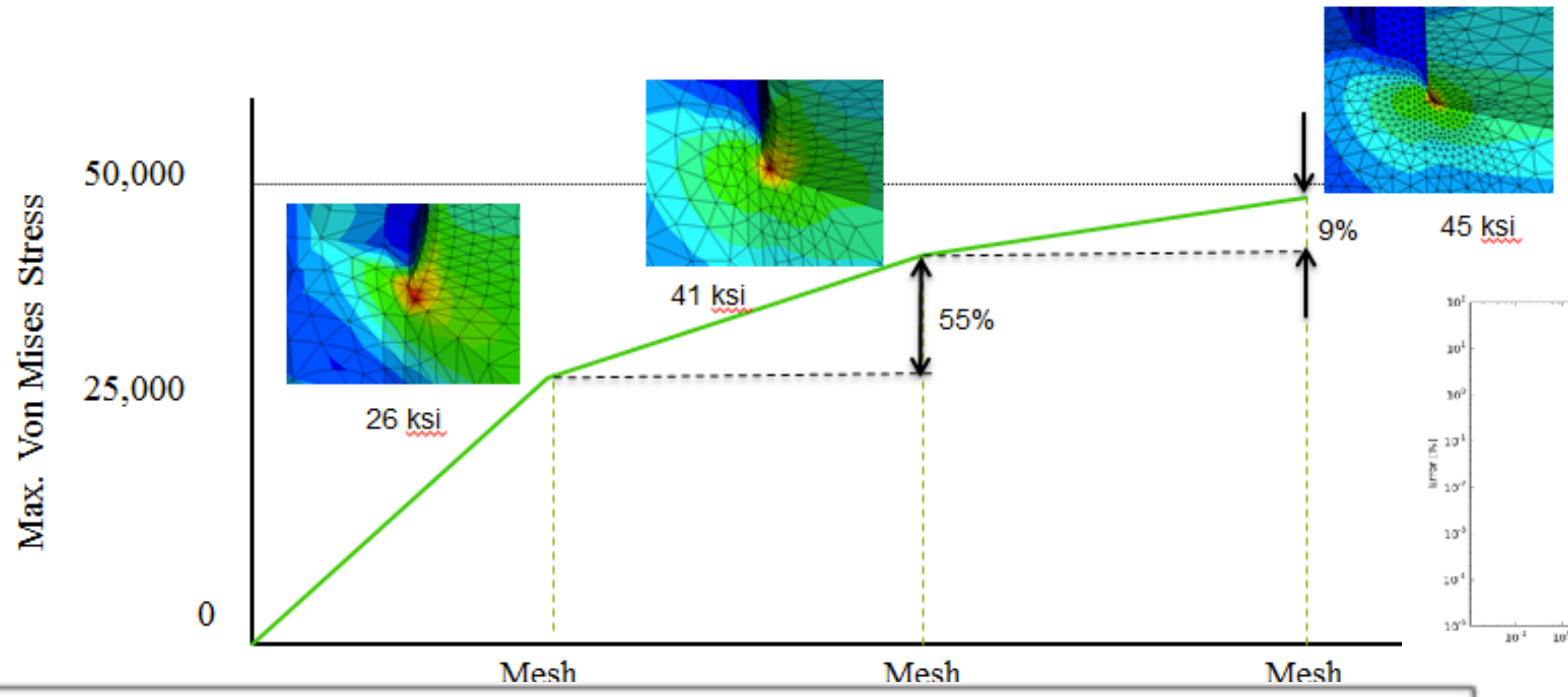
Sottosistemi

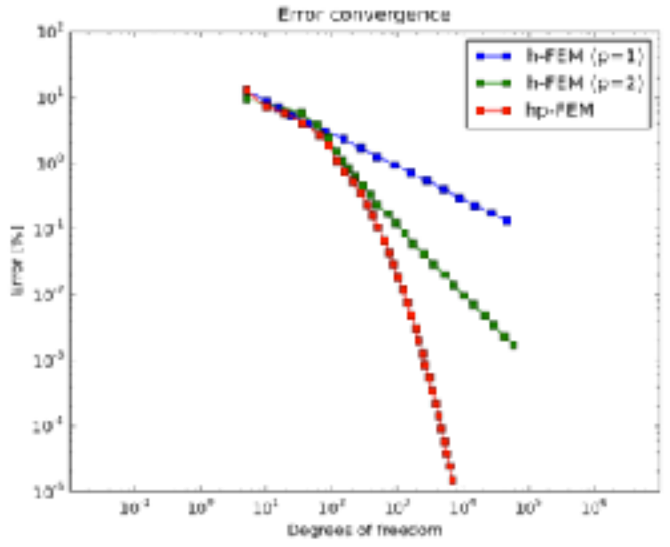


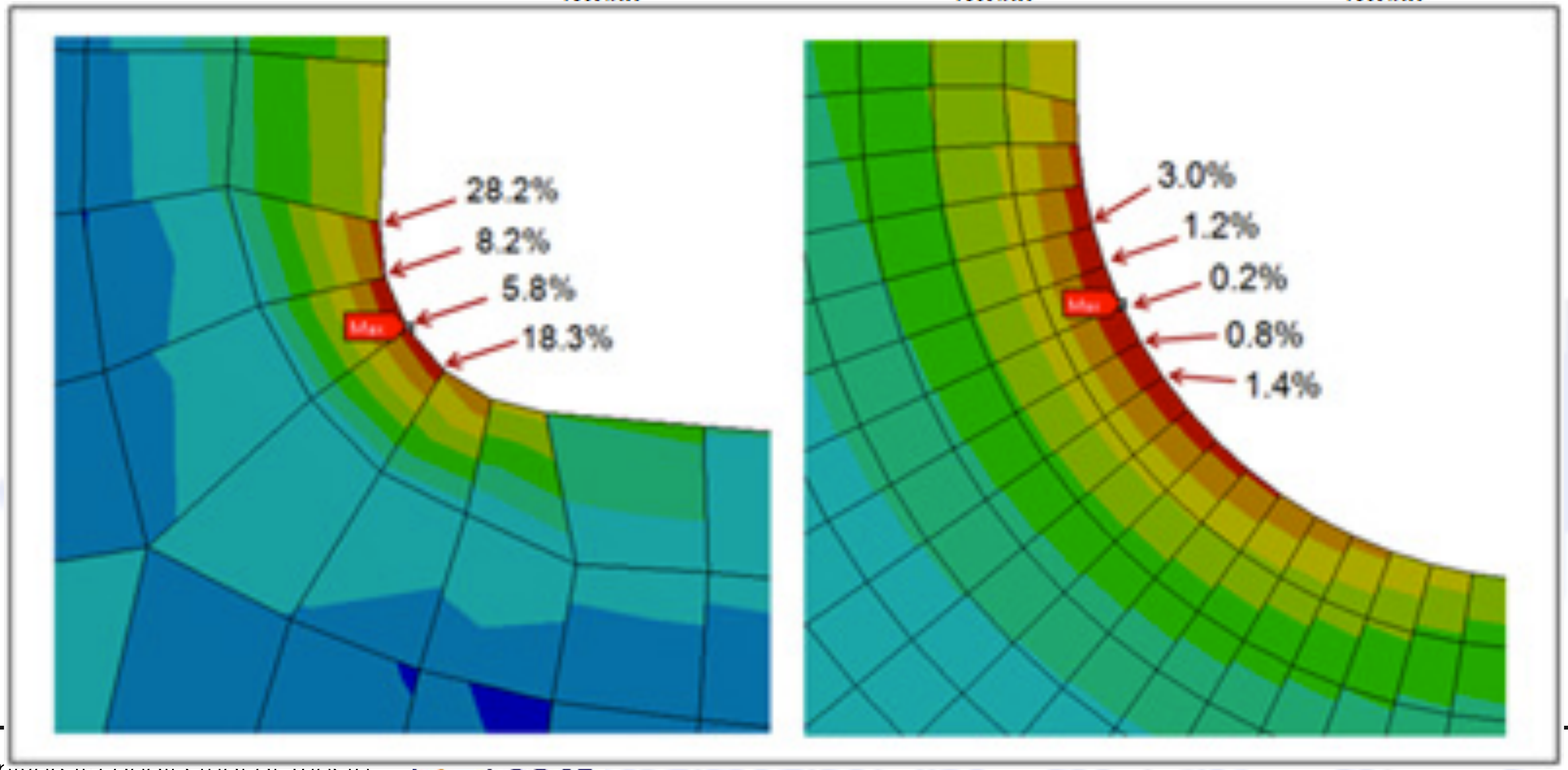


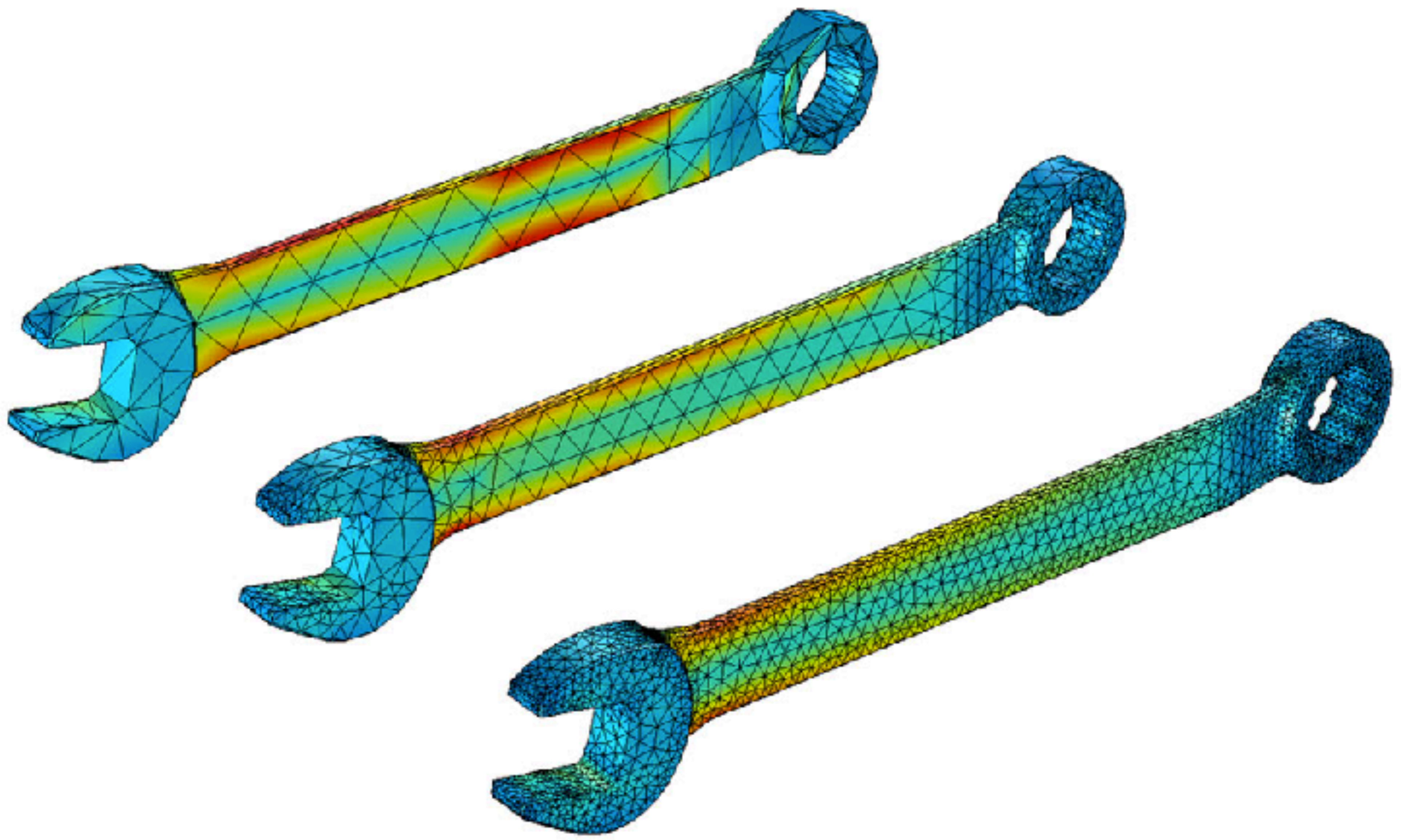
Queste attività si inseriscono nel processo ingegneristico che prevede di
..semplificare,
..modellare,
..ottimizzare i parametri,
..rimettere assieme tutto,
..reiterare!

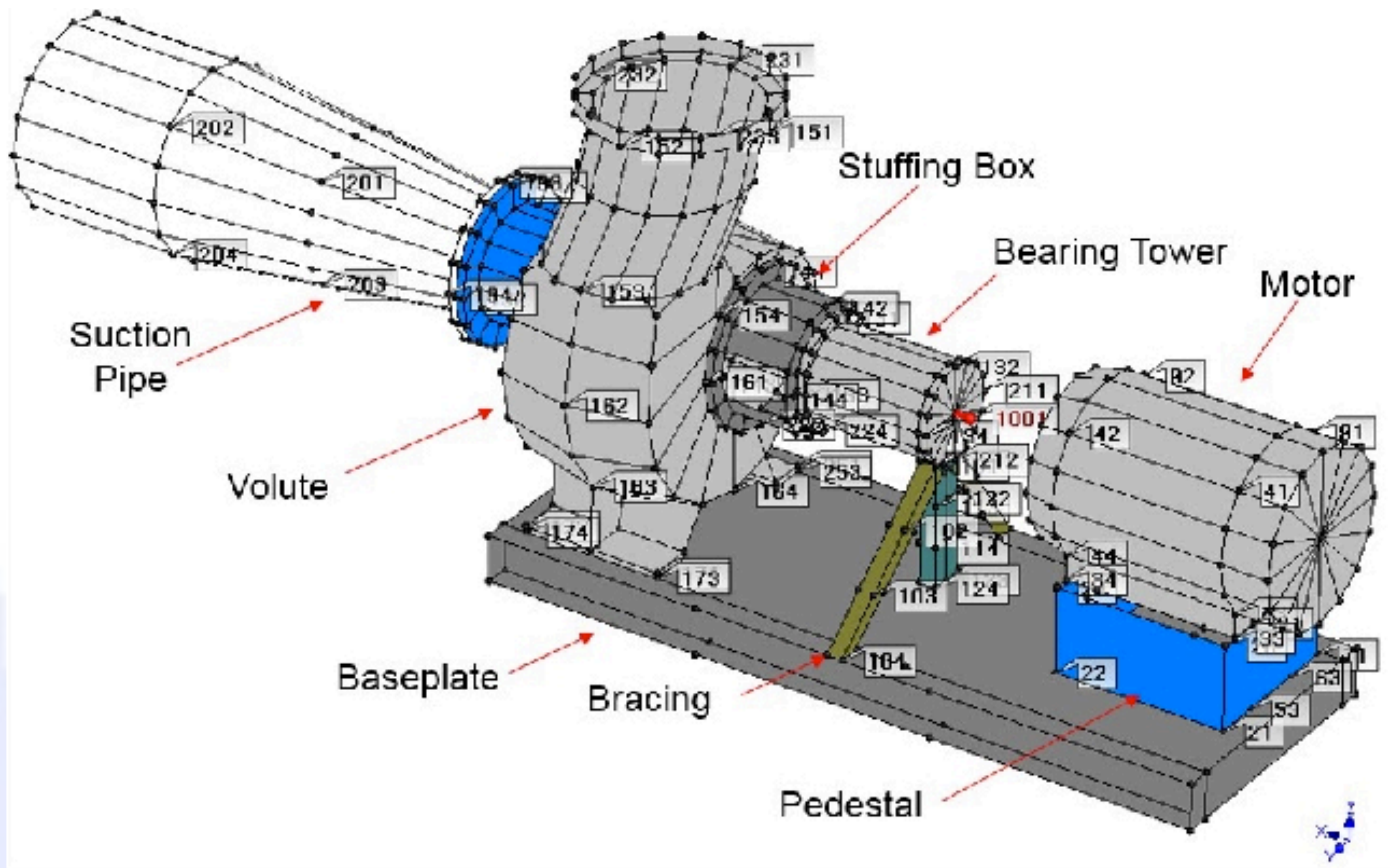
L’accuratezza dei risultati del modello “matematico”
dipende dal livello dettaglio adottato, dall’”ordine” del modello,
dall’algoritmo risolutivo scelto..
(e definiti dall’utilizzo che se ne vuole fare!)











NB La realtà non è una simulazione!!

Una rappresentazione “algebrico-matematica” di partenza* per lo studio dei sistemi dinamici è:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

(eq. differenziale del secondo ordine…
a termini costanti…lineare… non omogenea…)

in cui ci sono i 4 termini fondamentali,
determinano le caratteristiche / tipologie di sistema che si può analizzare.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

per semplicità di rappresentazione tralasciamo la dipendenza dal tempo (t)

Forze Inerziali

Forze Dissipative

Forze Elastiche

Forzanti Esterne

(***NB** ben nota dai corsi precedenti!)

In funzioni dei termino presenti, è possibile rappresentare e studiare sistemi differenti.
Ad esempio un sistema…

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

…non forzato

$$[m]\{\ddot{x}\}+[0]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

…non smorzato

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x^3\}=\{0\}$$

…non lineare

$$[I]\{\ddot{\theta}\}+[c_\theta]\{\dot{\theta}\}+[k_\theta]\{\theta\}=\{M\}$$

…torsionale

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

…accoppiato

Riguardando gli elementi presenti nella formula (equilibrio di forze - vettoriale)

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + \left[k\right]\{x\} = \left\{f\right\}$$

**nel caso specifico dello smorzatore viscoso*

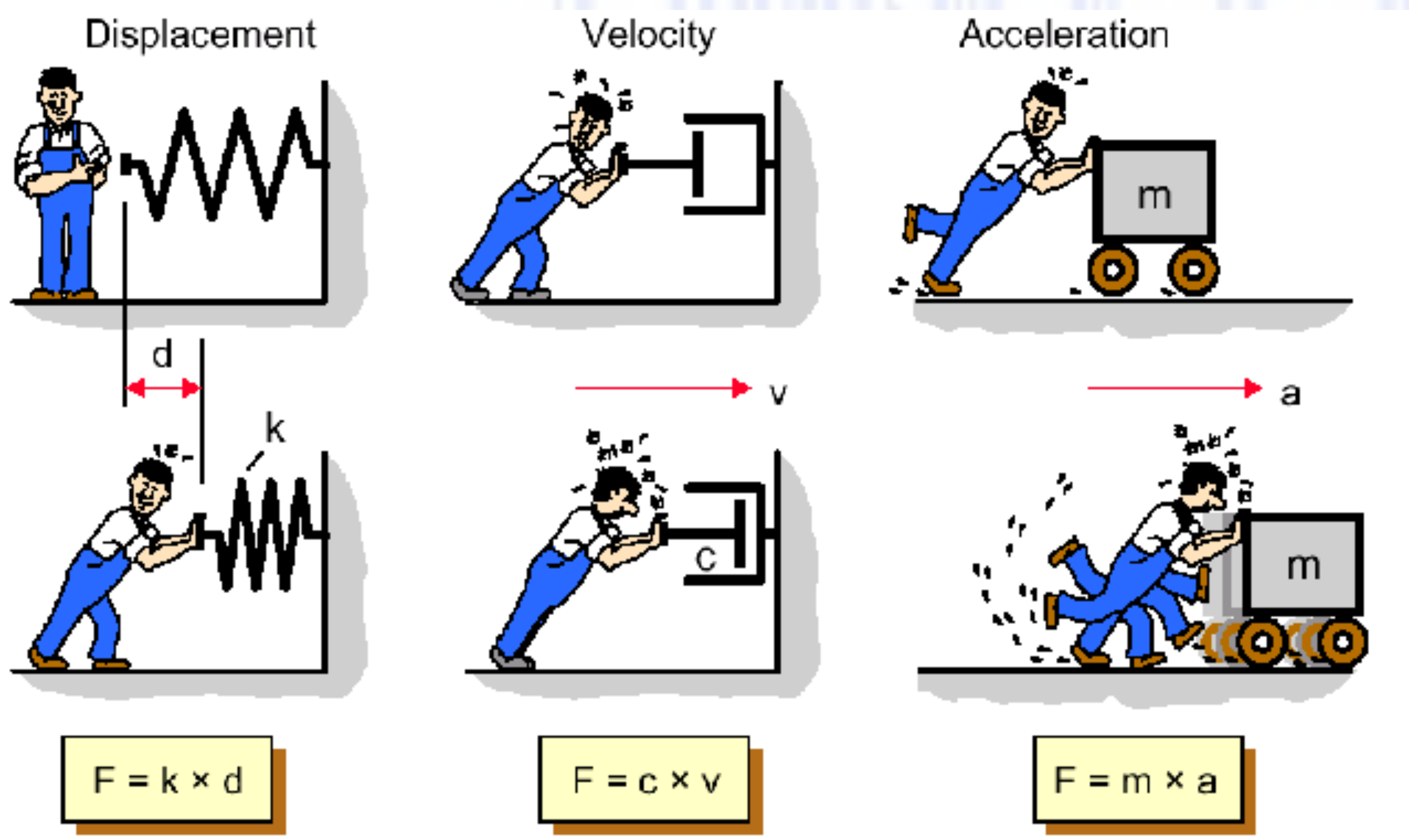
riconosciamo:

$[m]\{\ddot{x}\}$ ..forze inerziali, dipendenti da accelerazione.. nella “massa” si immagazzina l’energia cinetica

$[c]\{\dot{x}\}$ ..forze dissipative, dipendenti dalla velocità*.. nello “smorzatore” si dissipa l’energia trasformandola in calore

$\left[k\right]\{x\}$ ..forze elastiche, dipendenti dallo spostamento.. nella “molla” si immagazzina l’energia elastica

$\left\{f\right\}$ ..forzanti .. definiscono il tipo di moto

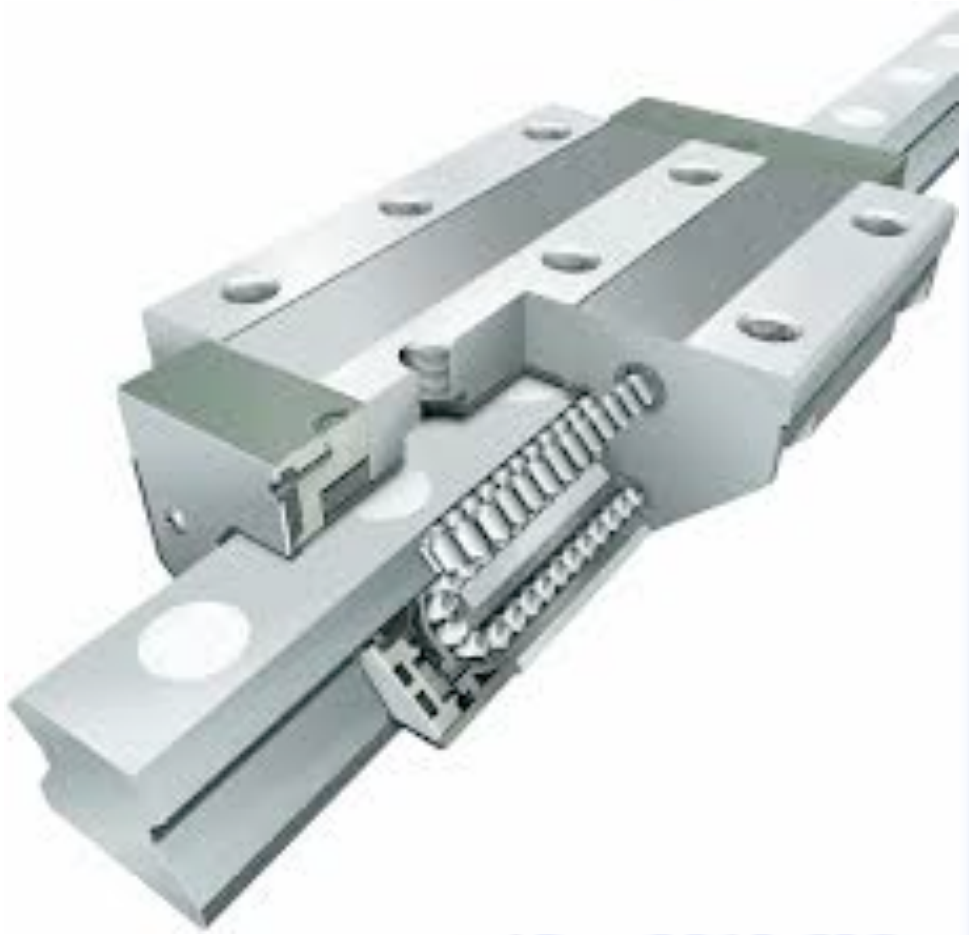


Nell’equazione del moto tutte queste forze sono in equilibrio!

NB solitamente si considerano elementi IDEALI con una sola “proprietà” alla volta!
MOLLA> pura rigidezza, no massa, no smorzamento

Elemento Inerziale - massa [kg], momento d'inerzia [kgm²]

$$\left[kg * \frac{m}{s^2}\right] = [N]$$



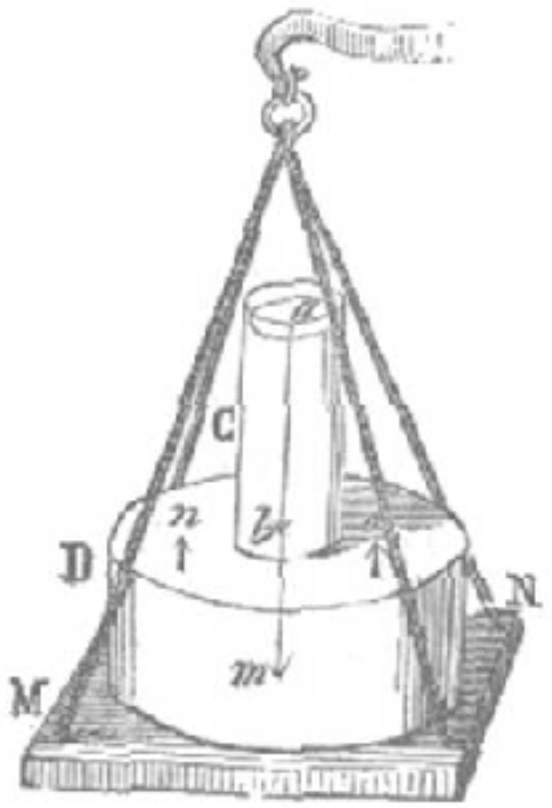
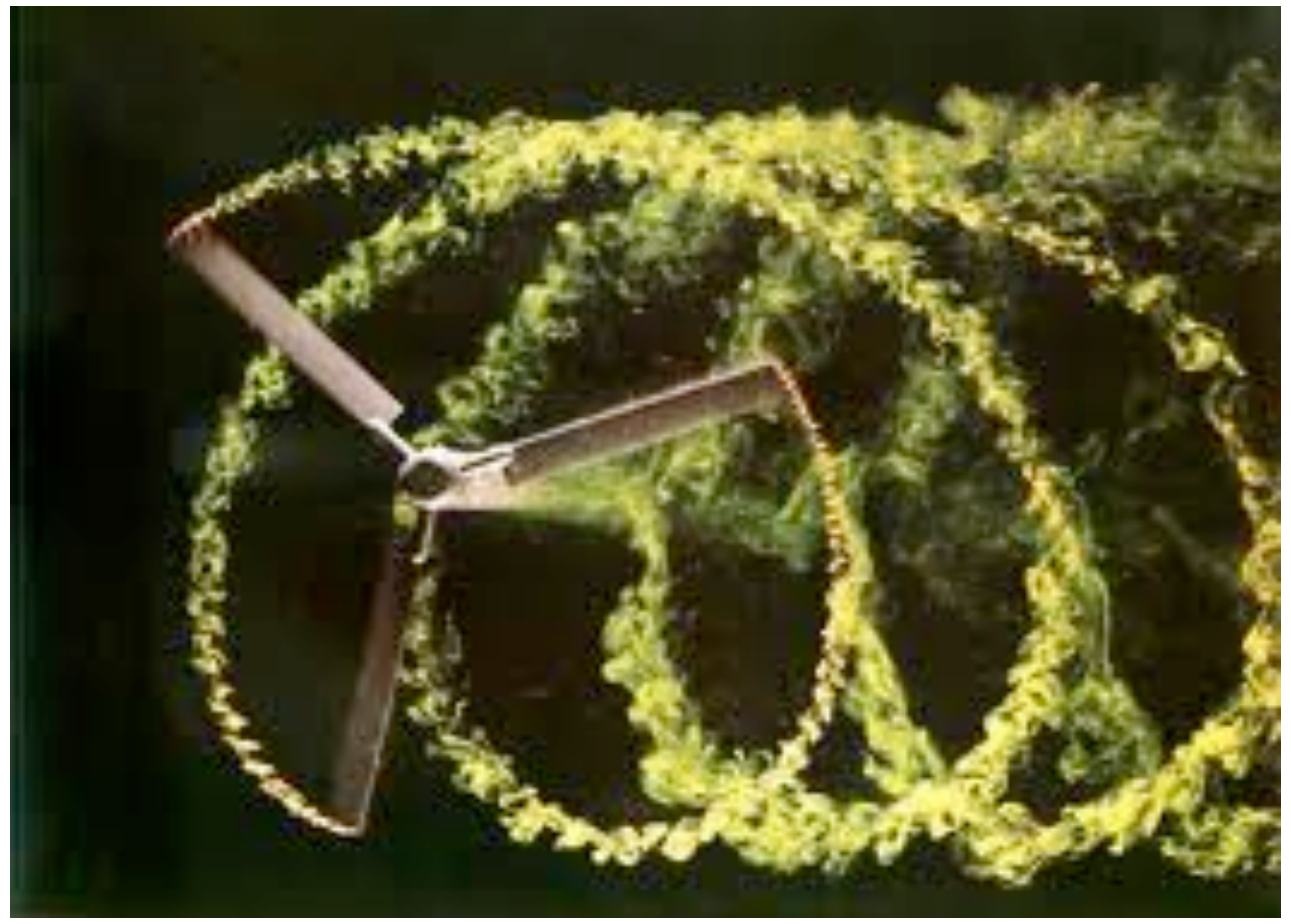


Fig. 49.



Ricordarsi di considerare tutti i gradi di libertà della "massa" :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

moto lineare 1D, 1 coordinata

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$

moto piano 2D, tre coordinate

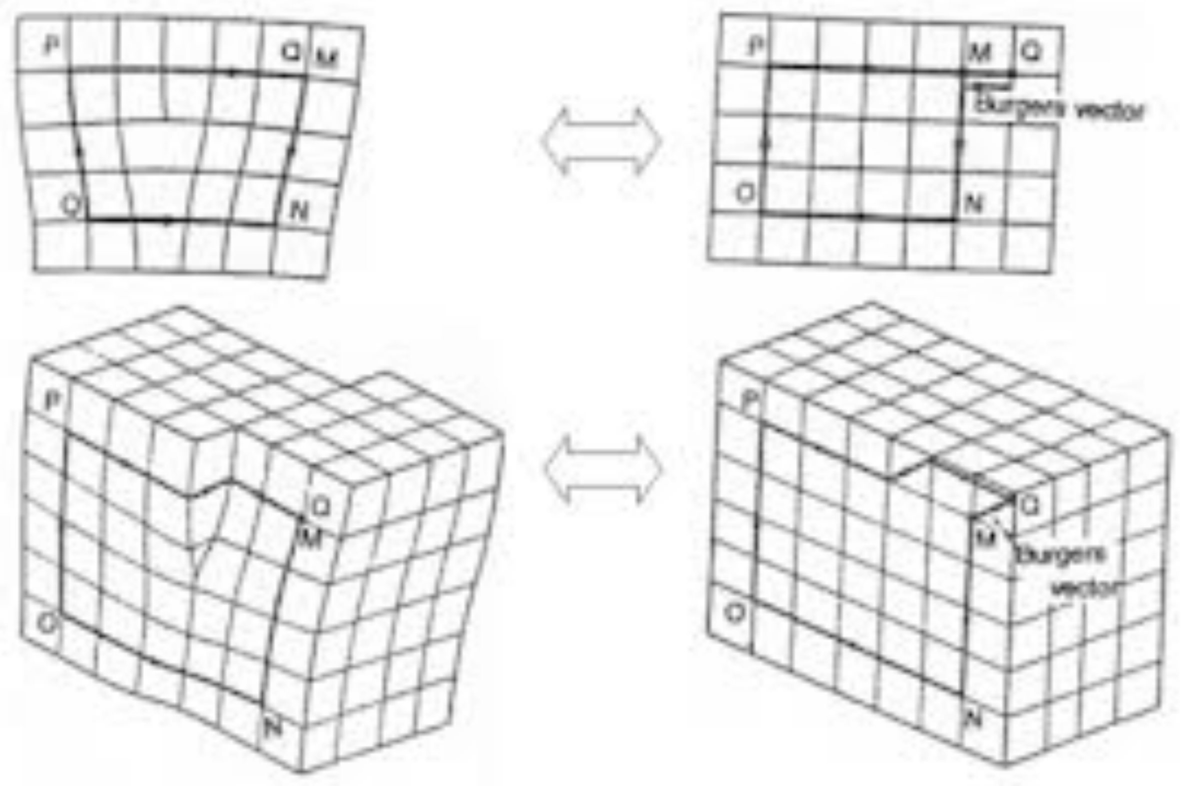
Bisogna essere in grado di risolvere problemi con movimenti Traslazionali e Rotazionali!

Luigi BREGANT
bregant@units.it

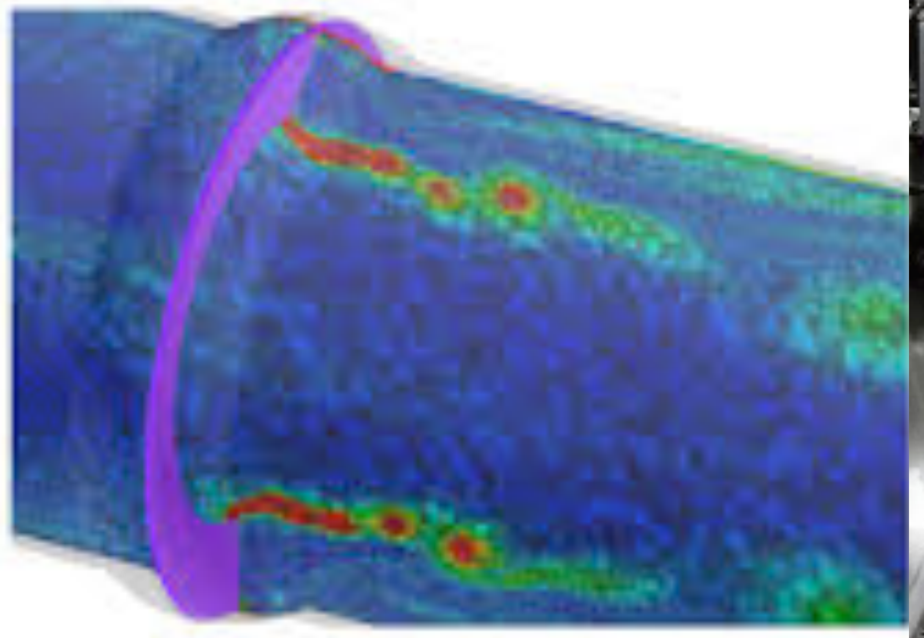
Elemento Dissipativo - smorzatore lineare [Ns/m], torsionale [Ns/rad]

$$\left[\frac{Ns}{m} * \frac{m}{s}\right] = [N]$$

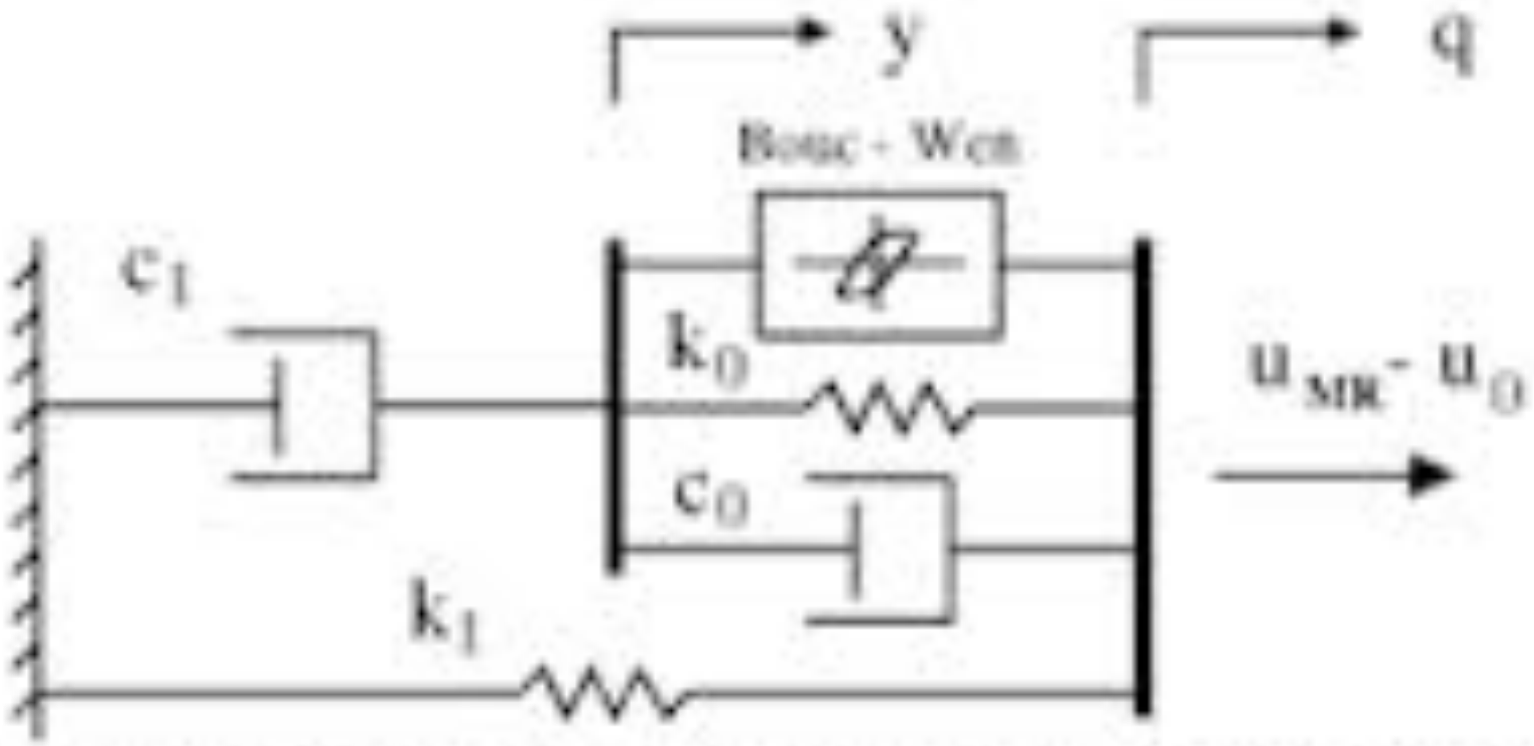


Esistono molti meccanismi “dissipativi”, ciascuno caratterizzato dalla propria equazione.
Possono essere costanti e non, lineari e non, indipendenti e dipendenti dalla frequenza, dal tempo..







bregant@units.it

I modelli di smorzamento più utilizzati sono:

Viscoso (es. ammortizzatori veicoli)	$f_d = c\dot{x}$	forza in fase con velocità
Coulombiano (es. smorzatori lavatrici)	$f_d = -\mu mg sign(\dot{x})$	forza in opposizione fase con segno della velocità
Strutturale / Isteretico (es. cricche)	$f_d = jhx$	forza in fase con spostamento
Fluidodinamico (es. moto corpo in fluido)	$f_d = d\dot{x}^2$	forza in fase con quadrato velocità
Frazionale (es. feltro)	$f_d = ja\frac{\delta^r x}{\delta t}$	
Combinato (es. magnetoreologici - modello Bouc-Wen)	$f_d = \ldots$	

..la stima dello smorzamento non è facile!
in più, molto spesso, diversi meccanismi dissipativi agiscono simultaneamente!

Un esempio.. quali sono i meccanismi dissipativi che intervengono quando un righello di materiale plastico è fatto vibrare sul bordo del tavolo?

Almeno tre!
Quali??

1 > ..

2 > ..

3 > ..

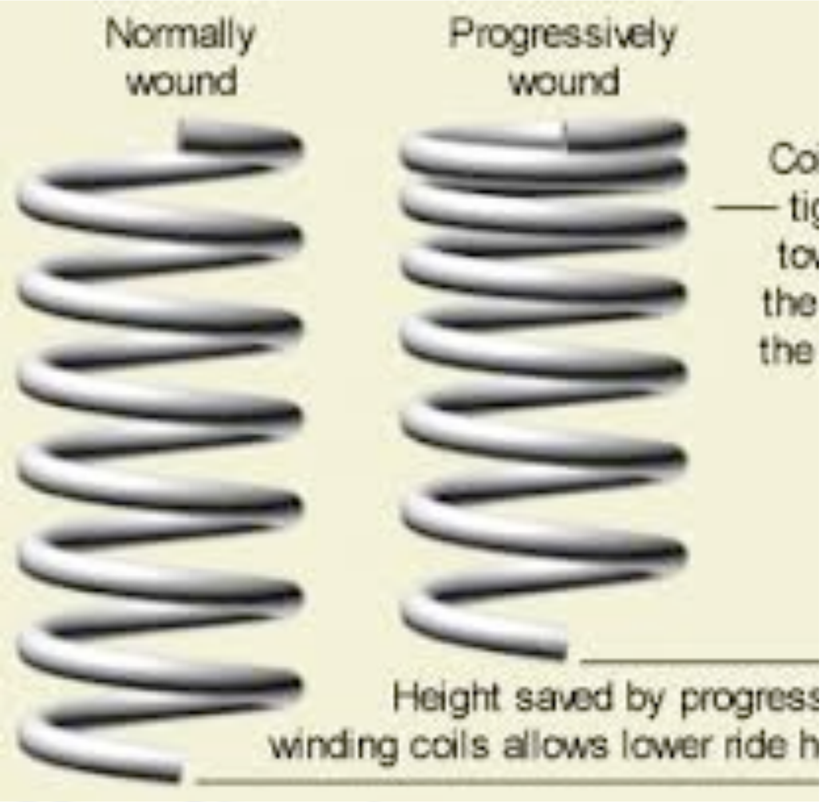
Quale il più importante?

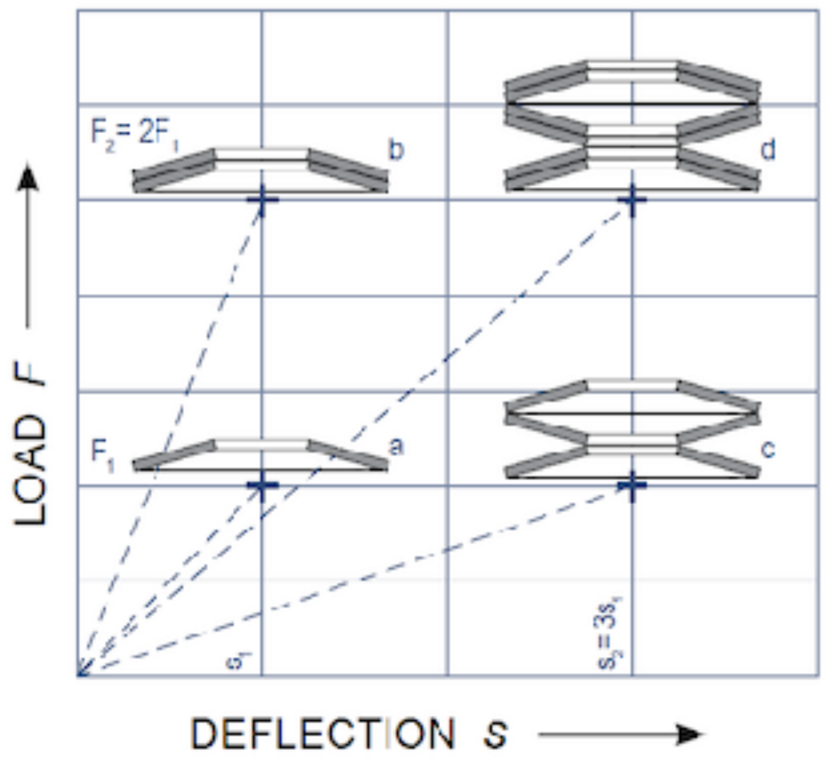
Esercitazione pratica laboratorio
freq naturale lama, decremento logaritmico, …

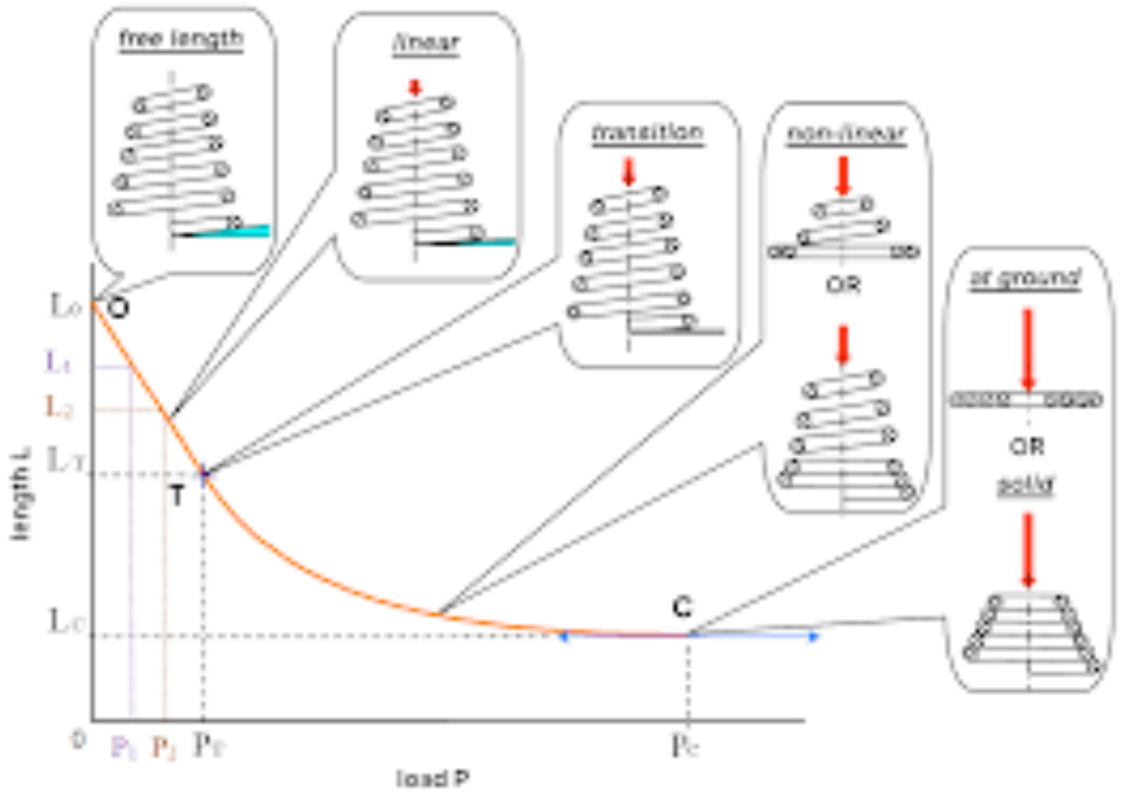
Bisogna essere in grado di risolvere problemi con movimenti Traslazionali e Rotazionali!

Elemento Elastico - rigidezza lineare [N/m], torsionale [N/rad]

$$\left[\frac{N}{m} * m\right] = [N]$$



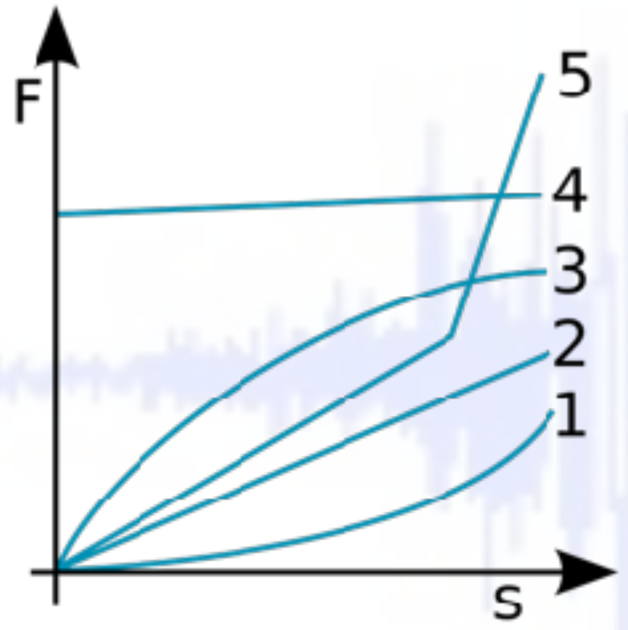


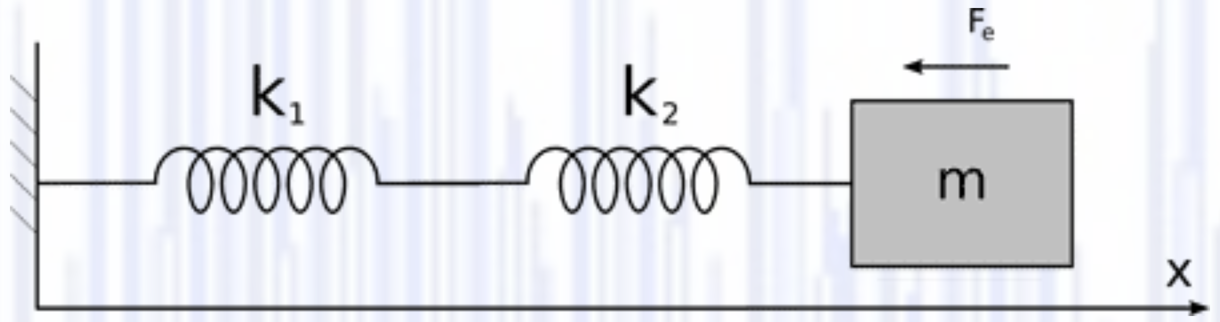


Le molle possono essere lineari, non lineari, traslazionali, torsionali, …
essere combinate in serie o in parallelo ..

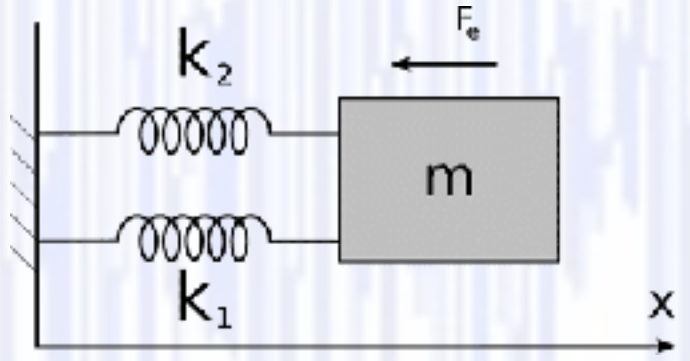
$$f_s = kx \qquad f_s = k_\theta \theta$$

$$f_s = kx^3$$



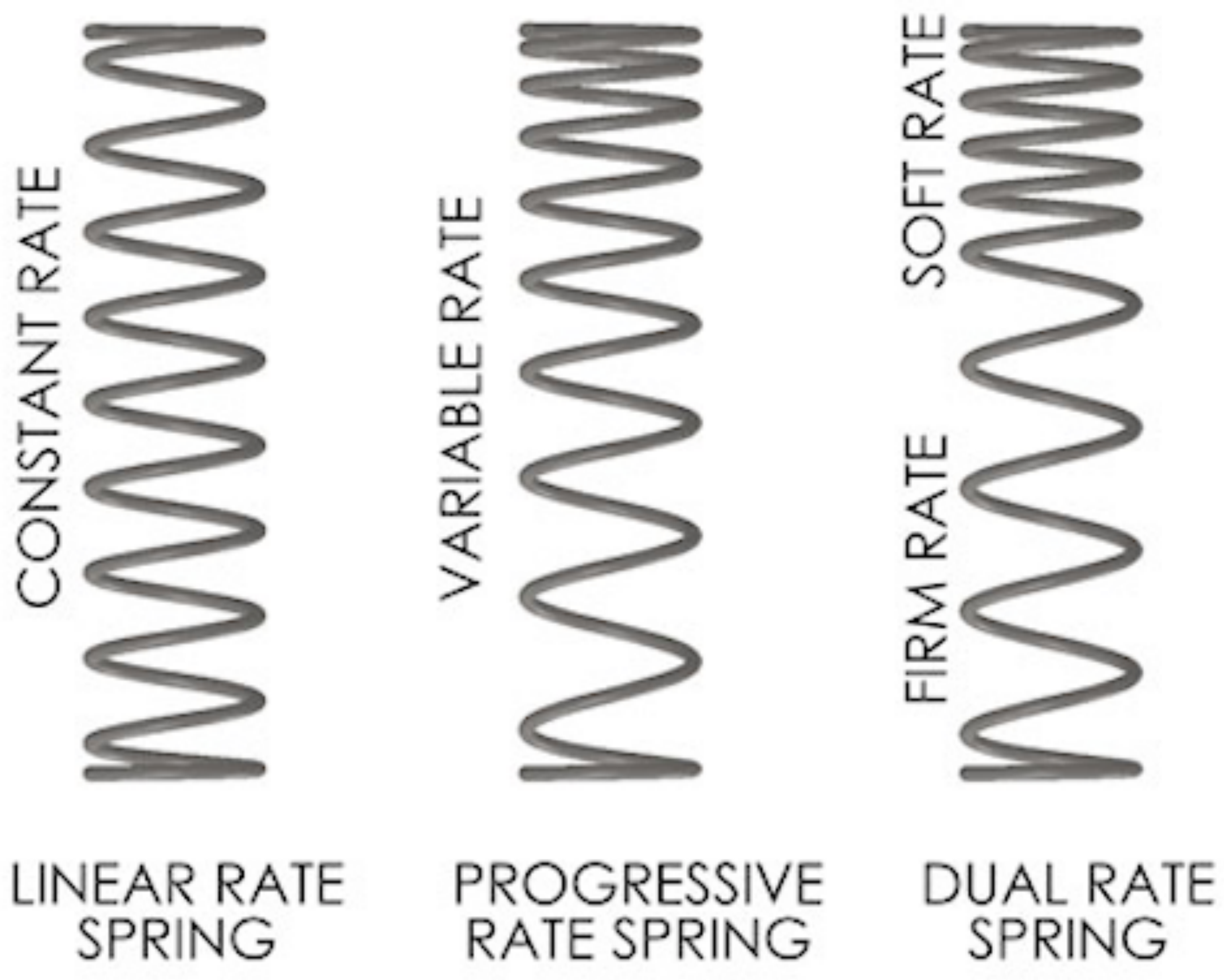


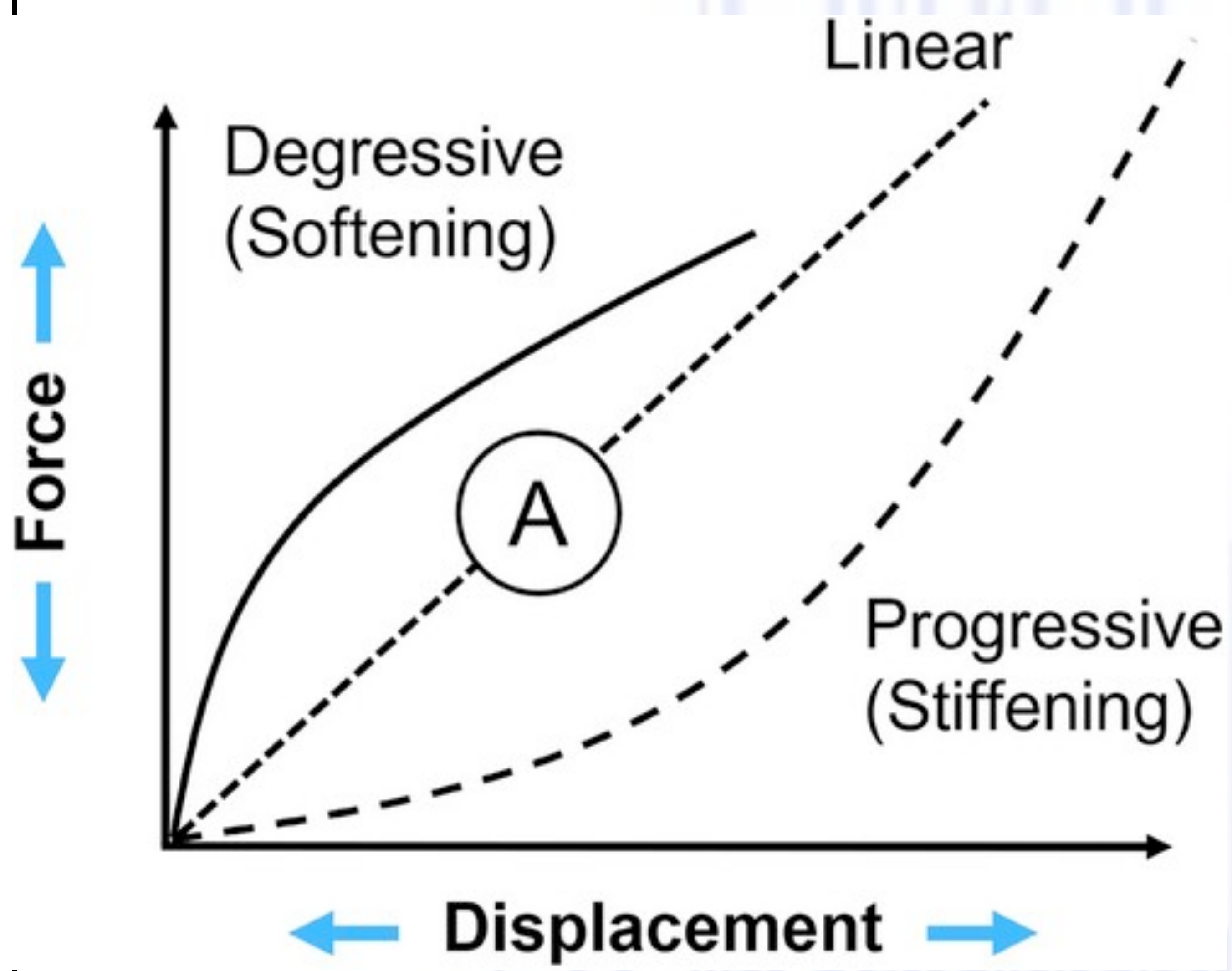
$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

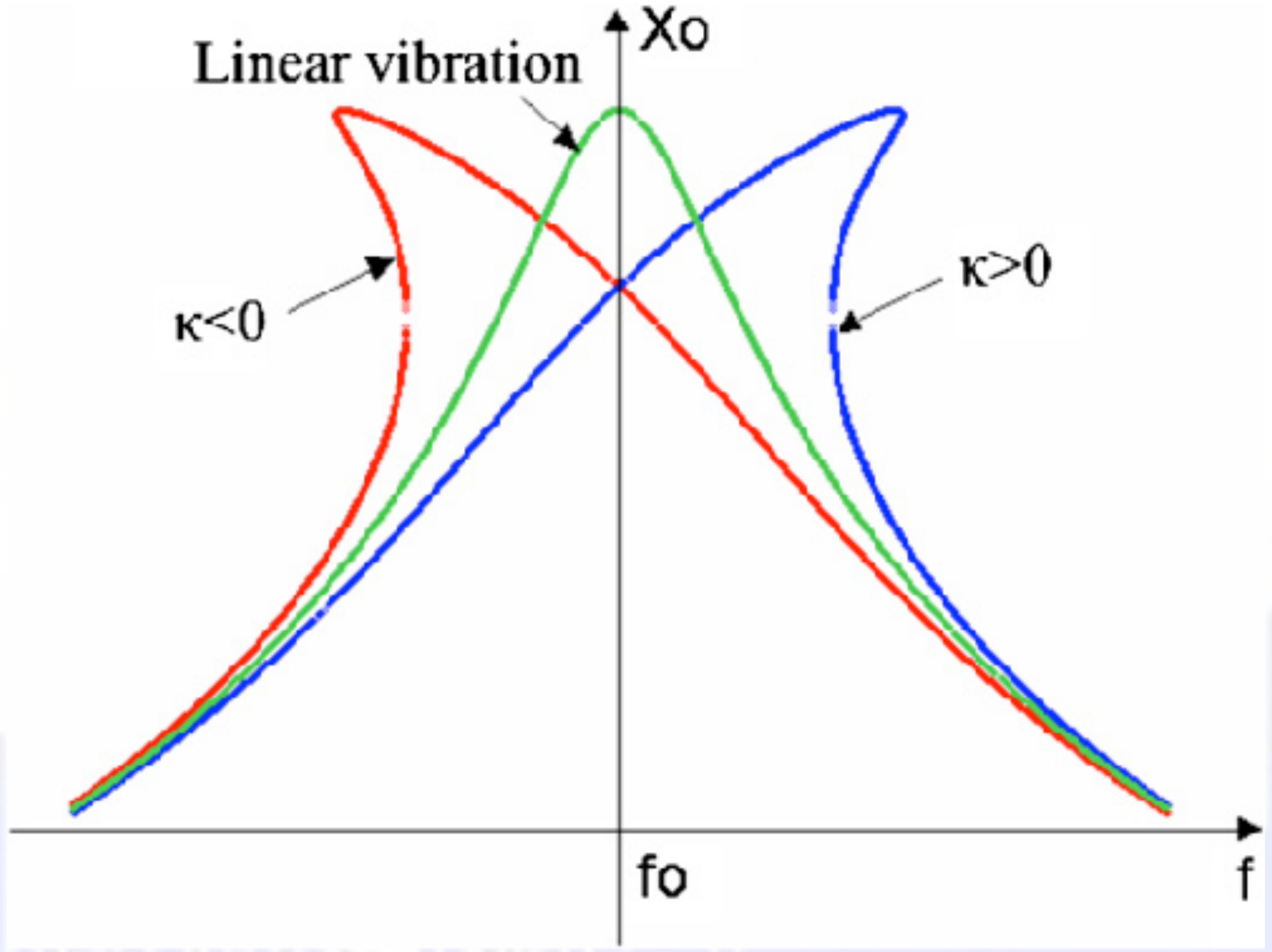


$$k_e = k_1 + k_2$$

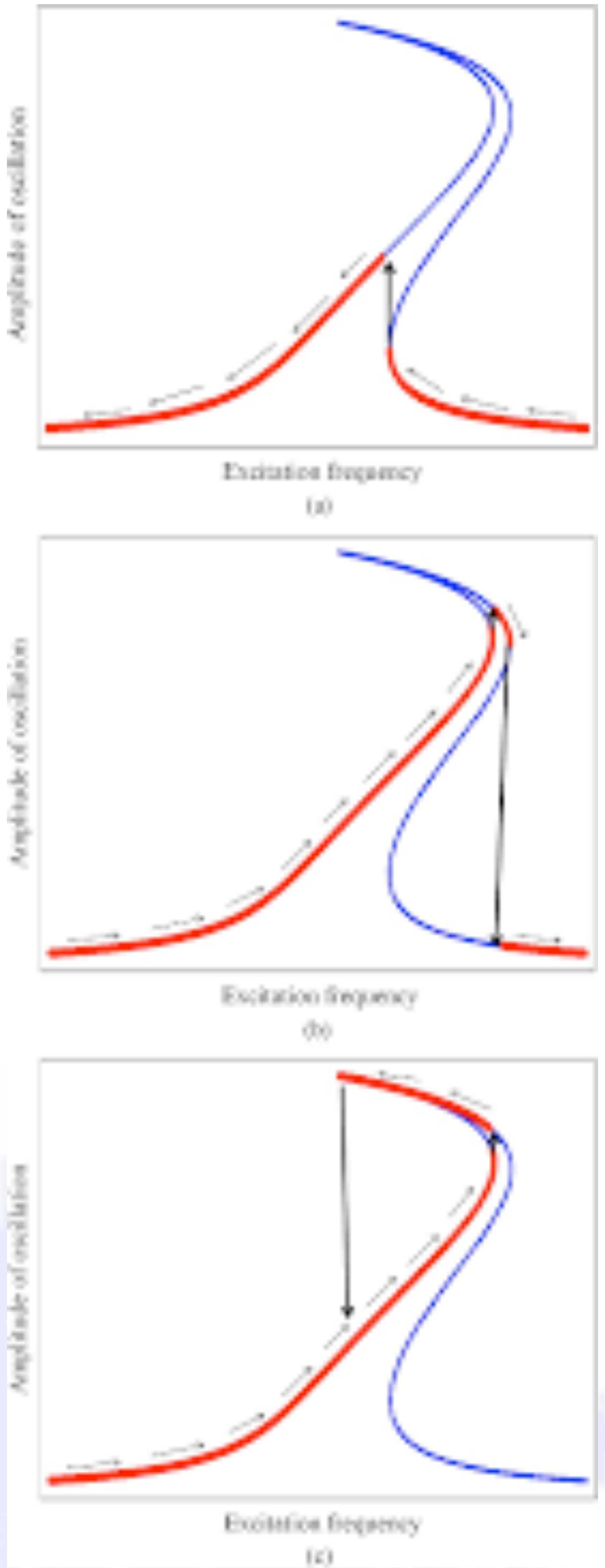
Bisogna essere in grado di risolvere problemi con movimenti Traslazionali e Rotazionali!





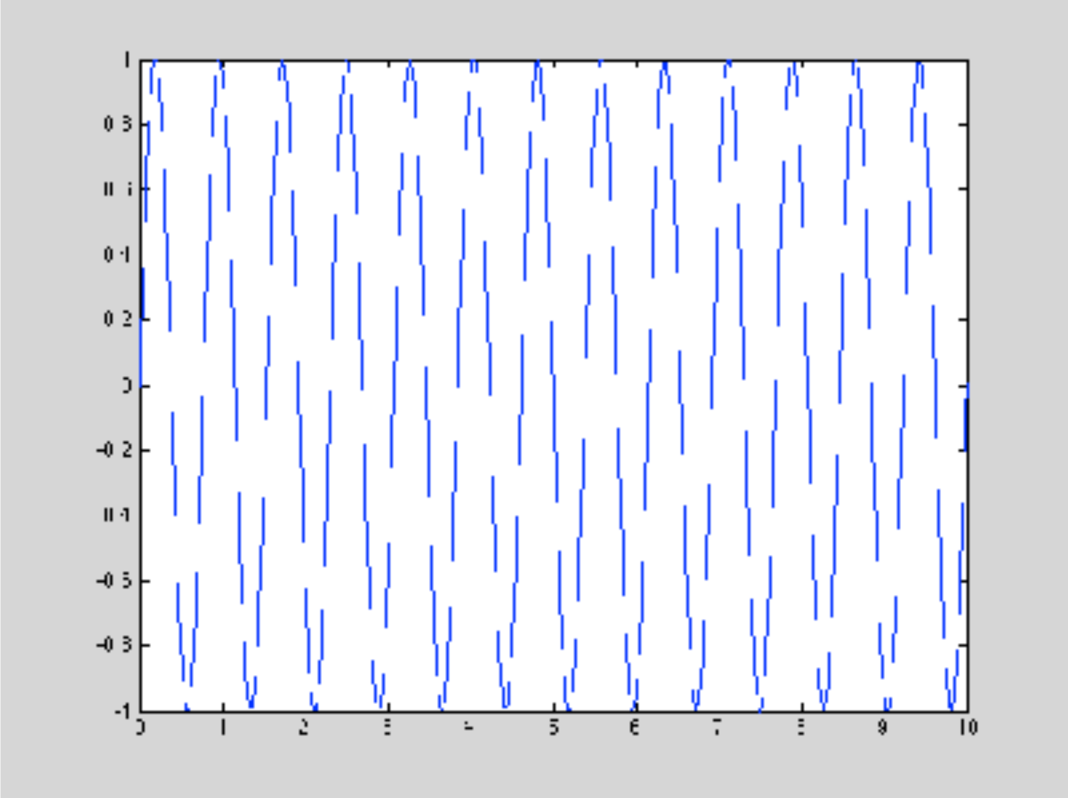


Quando compaiono non linearità
gli effetti sono "spettacolari"

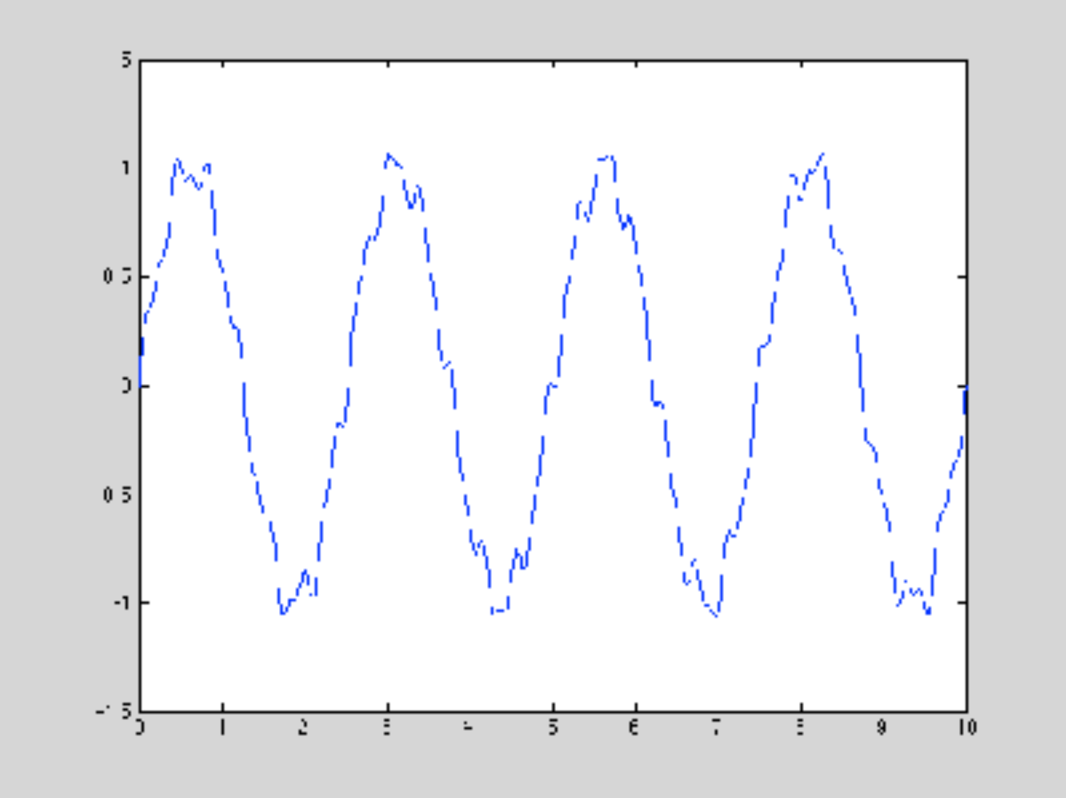


Forzanti - forze [N], momenti [Nm]

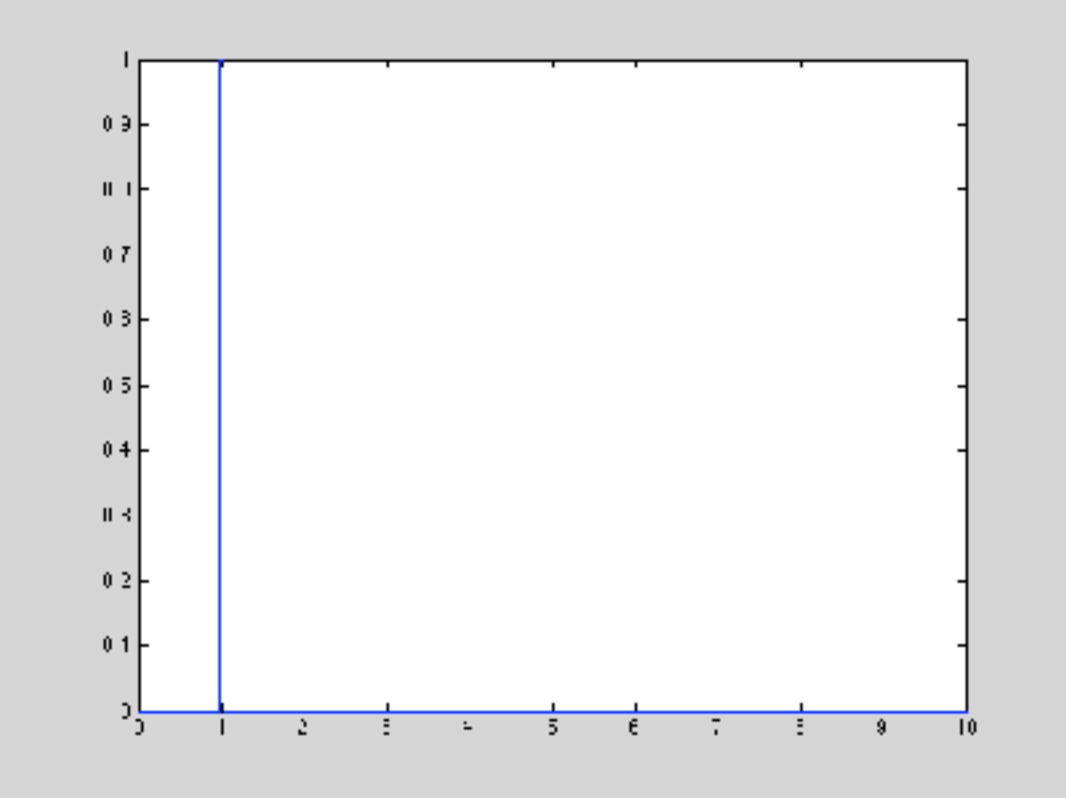
a=sin(2*pi*1.3*t);



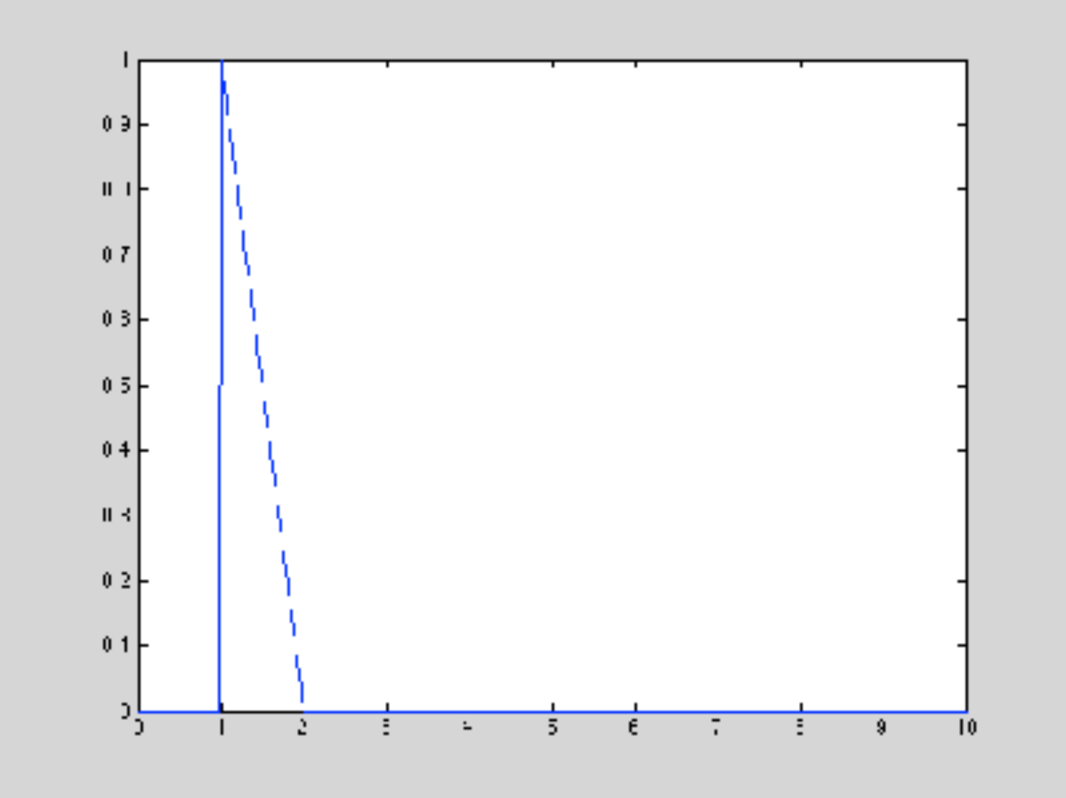
a=sin(2*pi*0.4*t)+0.09*sin(2*pi*2.7*t)+0.05*sin(2*pi*5.1*t);



a=[zeros(1,100) ones(1,3) zeros(1,898)];

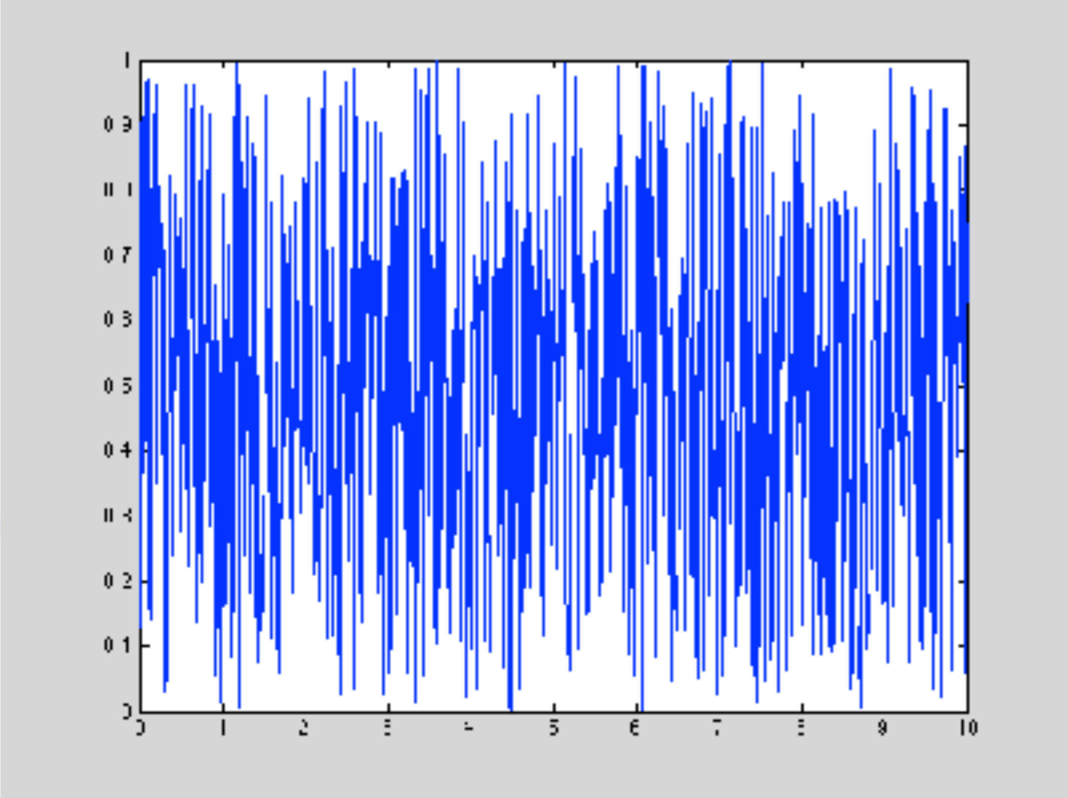


a=[zeros(1,100) 1-t(1:100) zeros(1,801)];

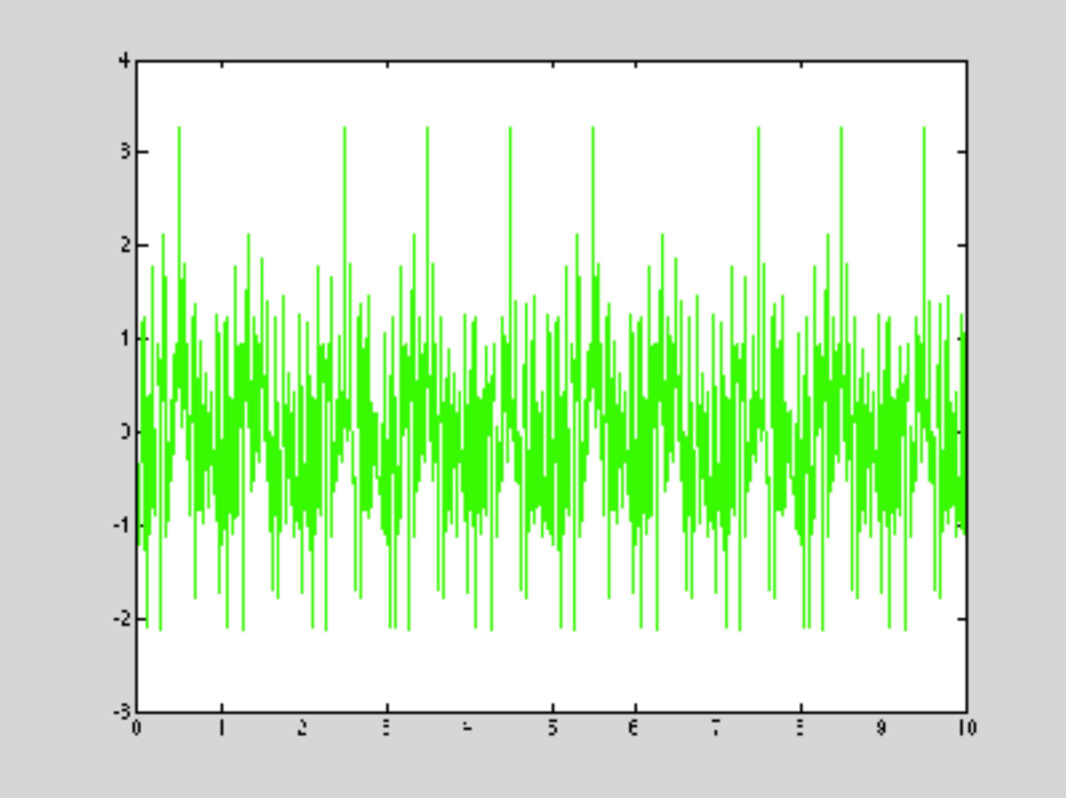


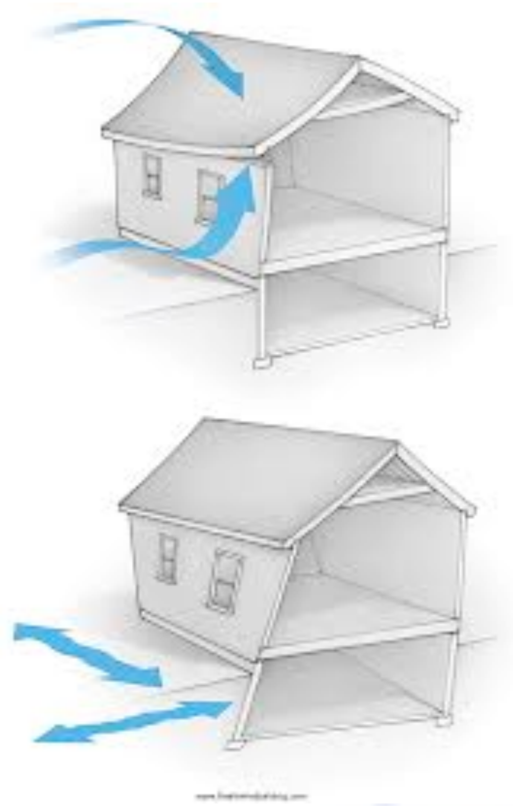
Possono essere deterministiche, transitorie, random, pseudorandom, operative ..

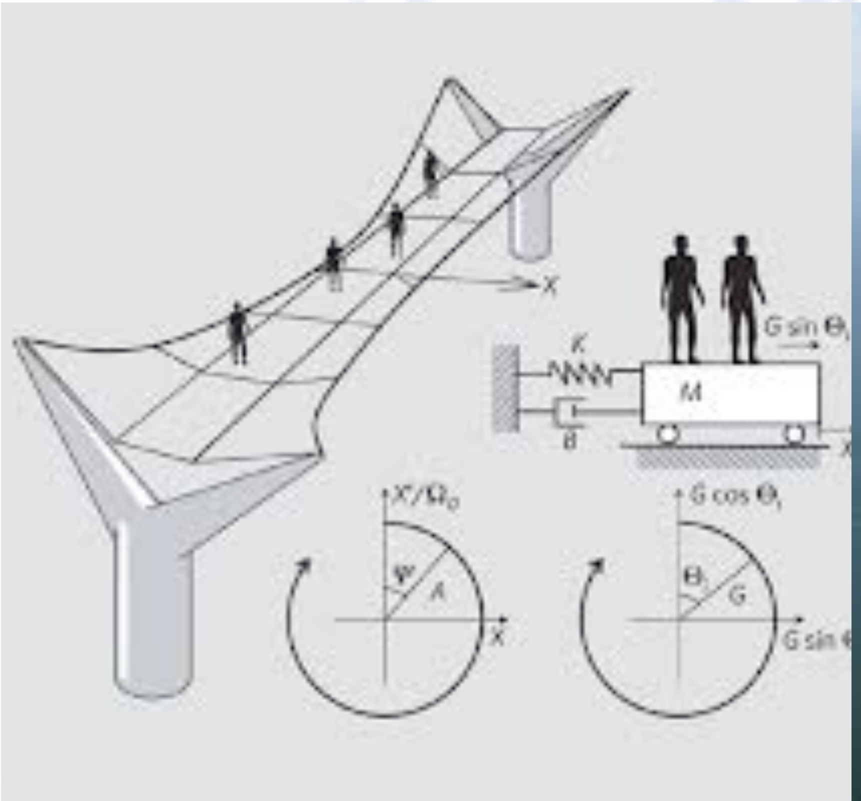
a=rand(1,size(t,2));



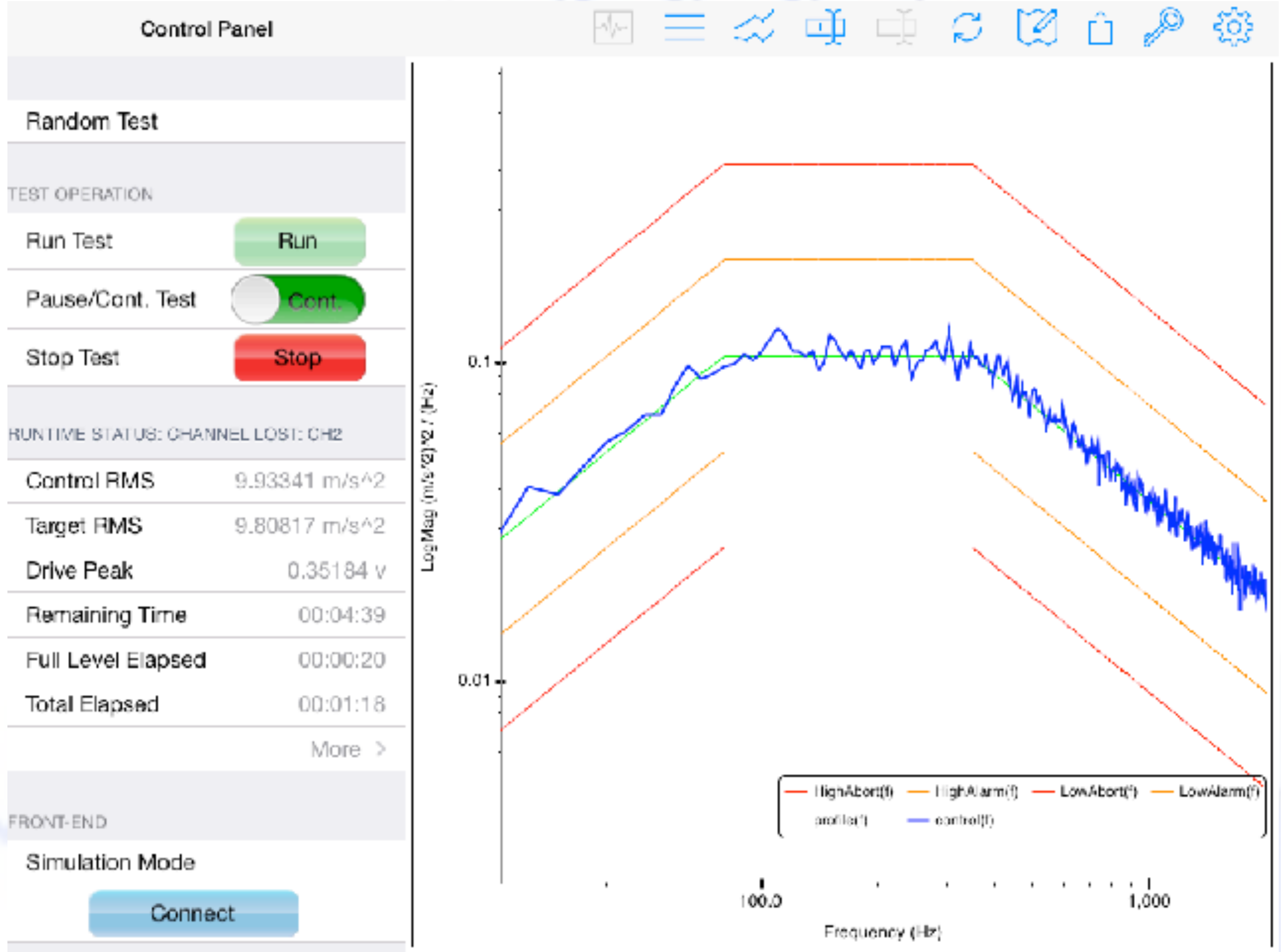
a=randn(1,100);
a=[a a a a a a a a a a];

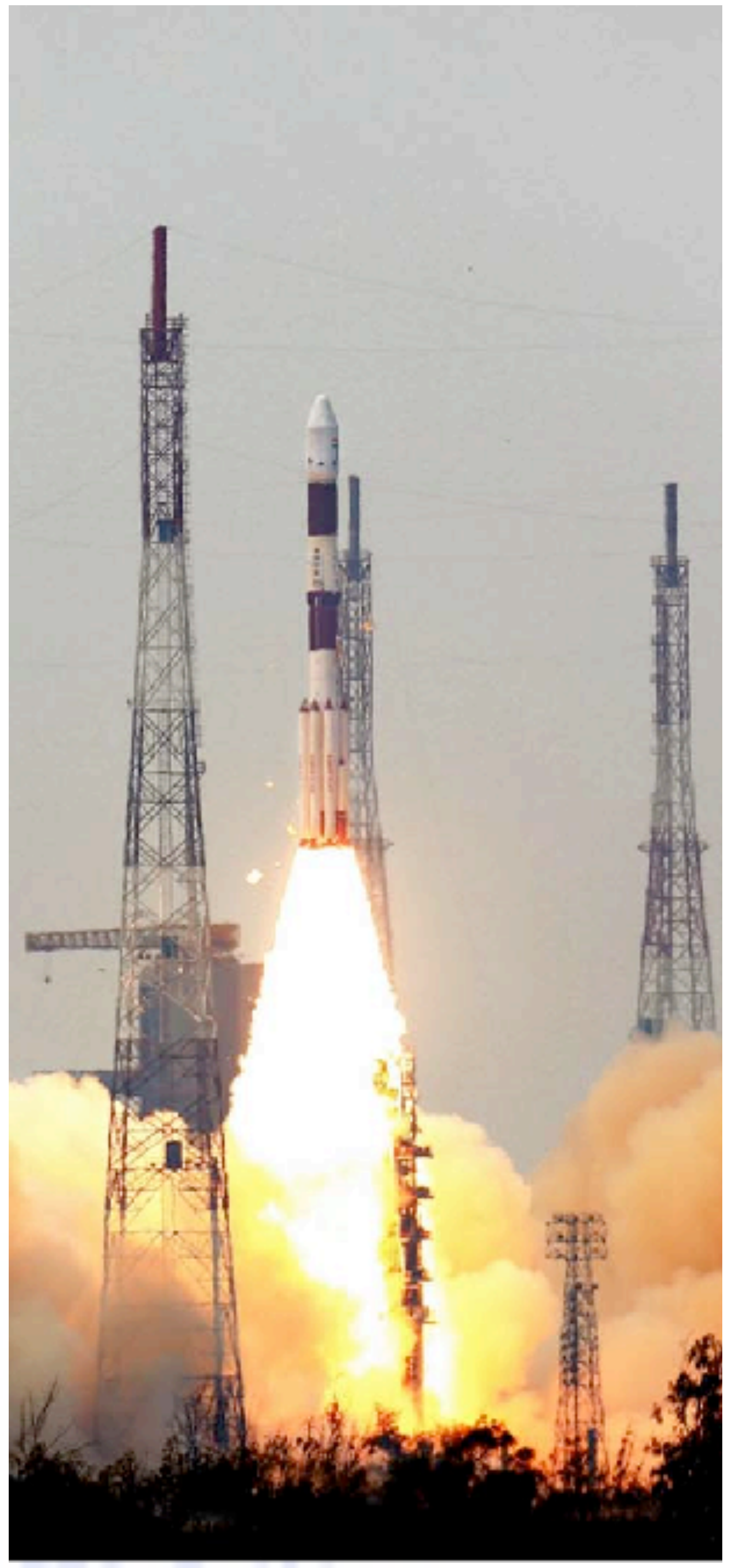






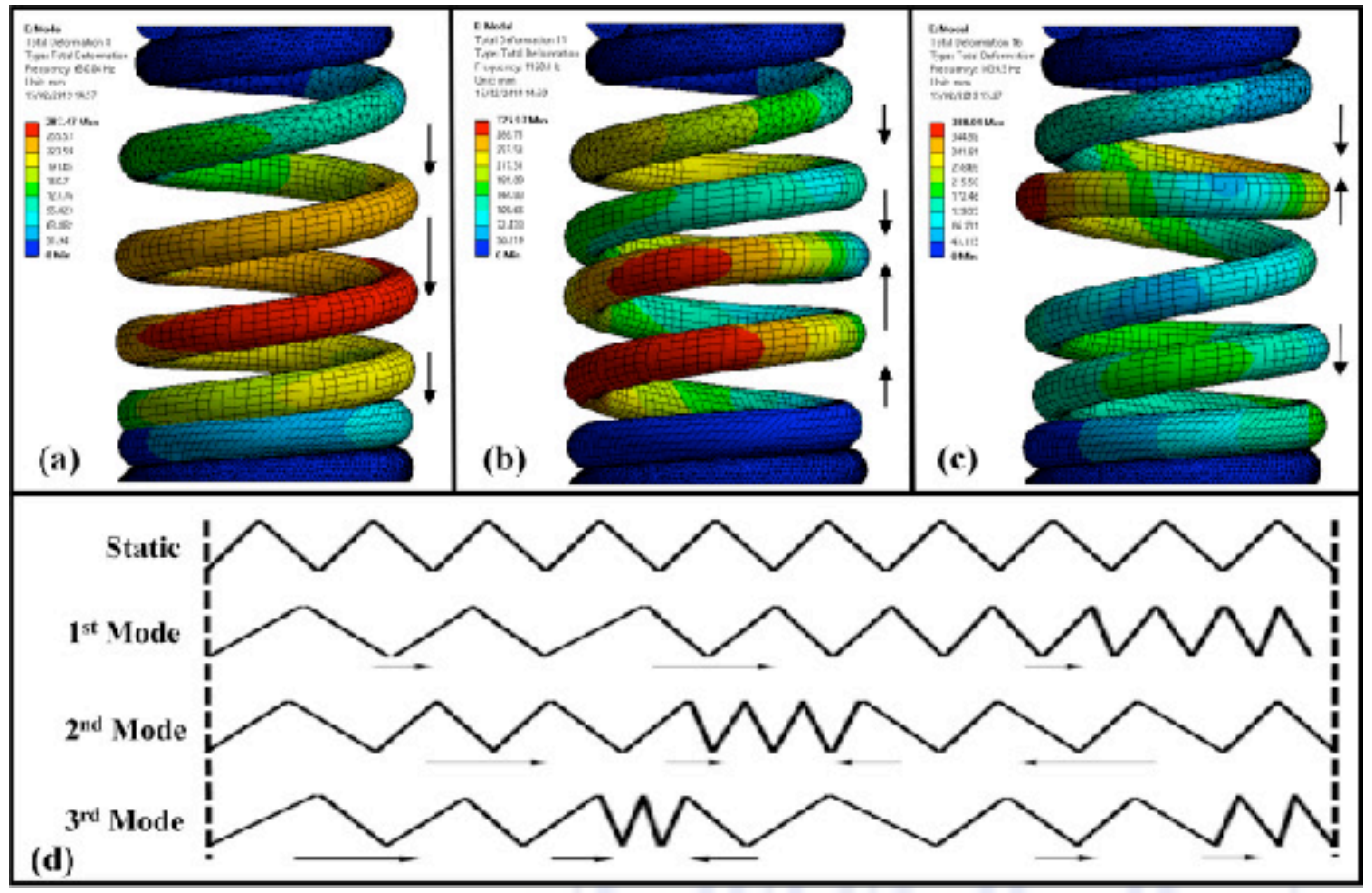
..ad esempio, il lancio di un satellite genera di carichi vibrazionali importanti.
..bisogna verificare prima del lancio che meccanica ed elettronica resistono alle sollecitazioni imposte





es come si
calcolano le forze nel foiling?

Se l'elemento non è più ideale … può esibire una dinamica interna!

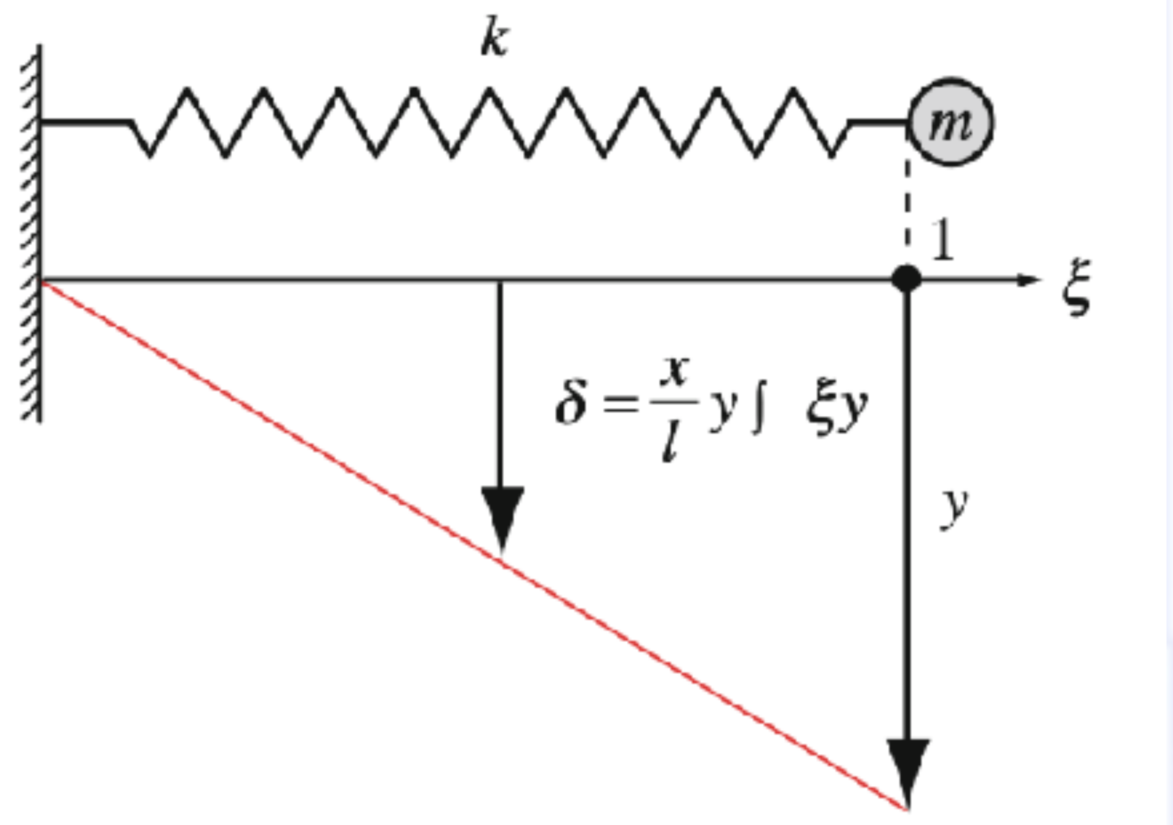


Ad esempio se si considera la massa della molla, come cambia l'equazione del moto di un sistema SDOF?

Sia m_s la massa della molla l la sua lunghezza, ρ la sua densità; si supponga che l'elongazione varii linearmente in modo da poter scrivere :

$$\delta = \frac{x}{l} y = \zeta y$$

$$\dot{\delta} = \zeta \dot{y}$$



L'energia cinetica del sistema si potrà scriver come:

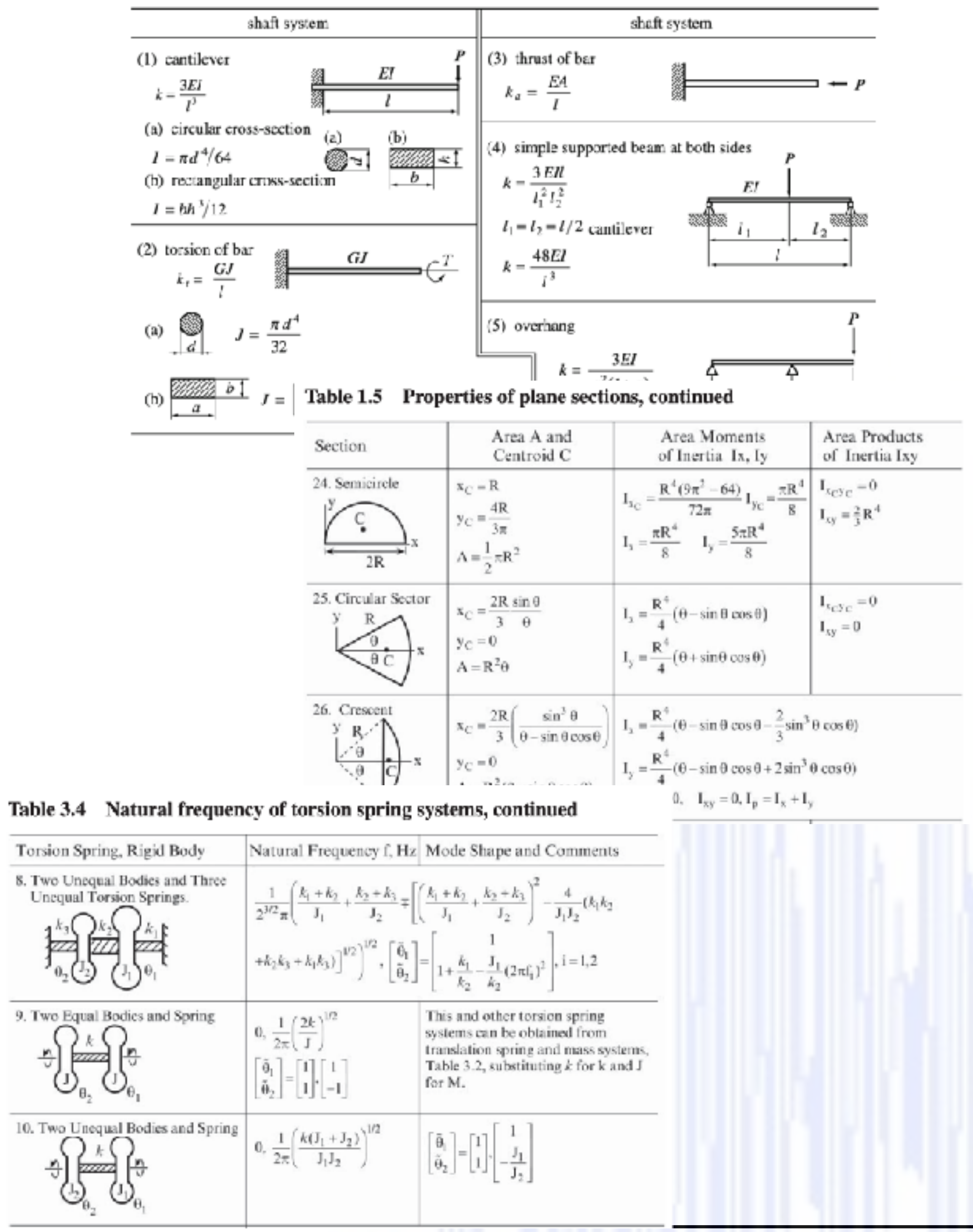
$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\delta}^2 dx = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + (\frac{1}{2} \int_0^l \rho \zeta^2 dx) \dot{y}^2 = \frac{1}{2} (m + \frac{m_s}{3}) \dot{y}^2$$

da cui*: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m + \dfrac{m_s}{3}}}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ caso ideale

* come si arriva a questa formula?

..in rete si trovano prontuari, raccolte di formule, calcolatori per valutare le caratteristiche di molte elementi utili per scrivere le equazioni del moto..



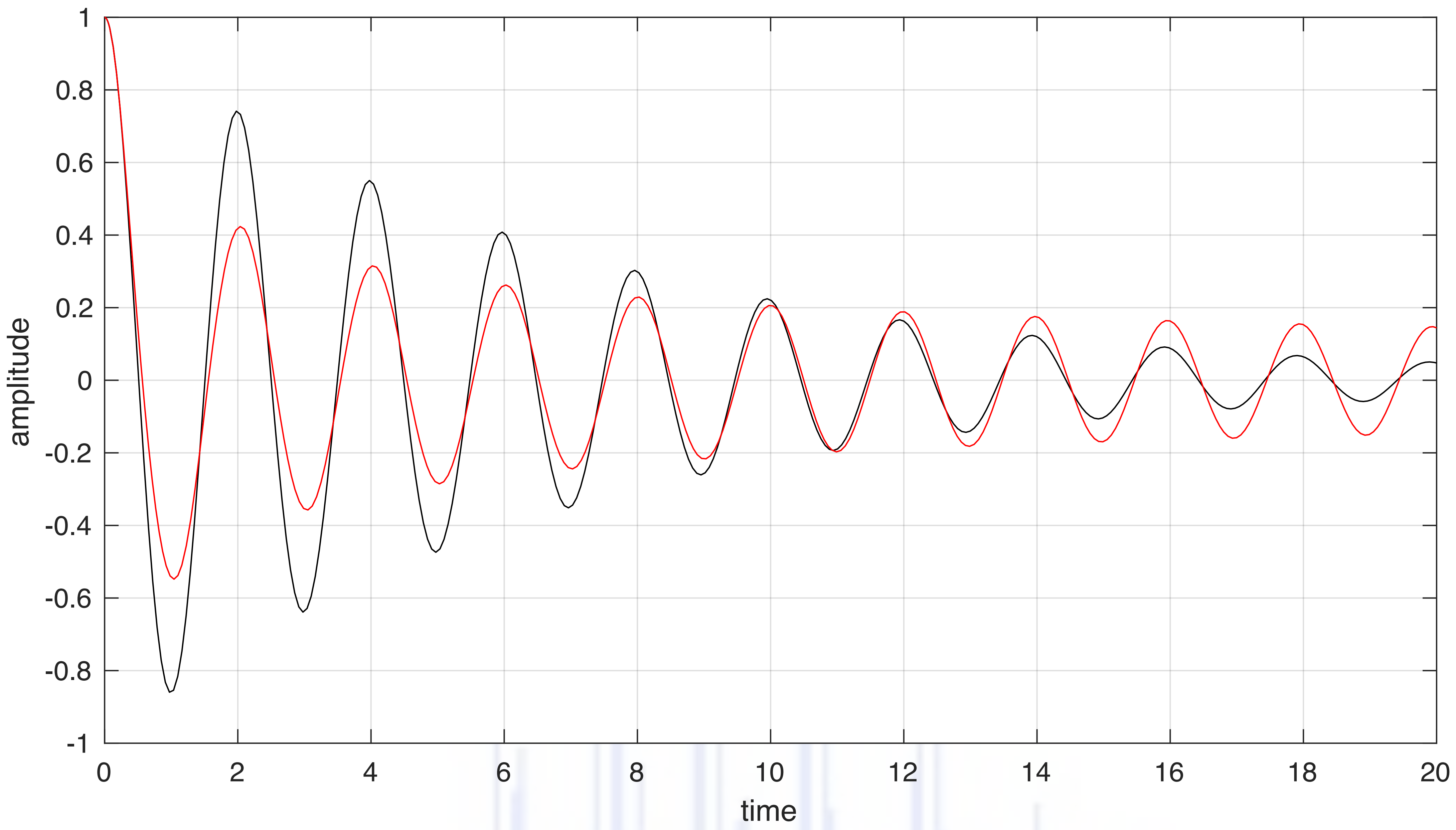
https://www.tribology-abc.com/calculators/damping_1.htm

https://www.calqlata.com/productpages/00076-help.html

https://www.acxesspring.com/spring-stiffness-calculator.html

https://www.newcombspring.com/springulator/

https://www.modalshop.com/vibration-calculator?ID=1036

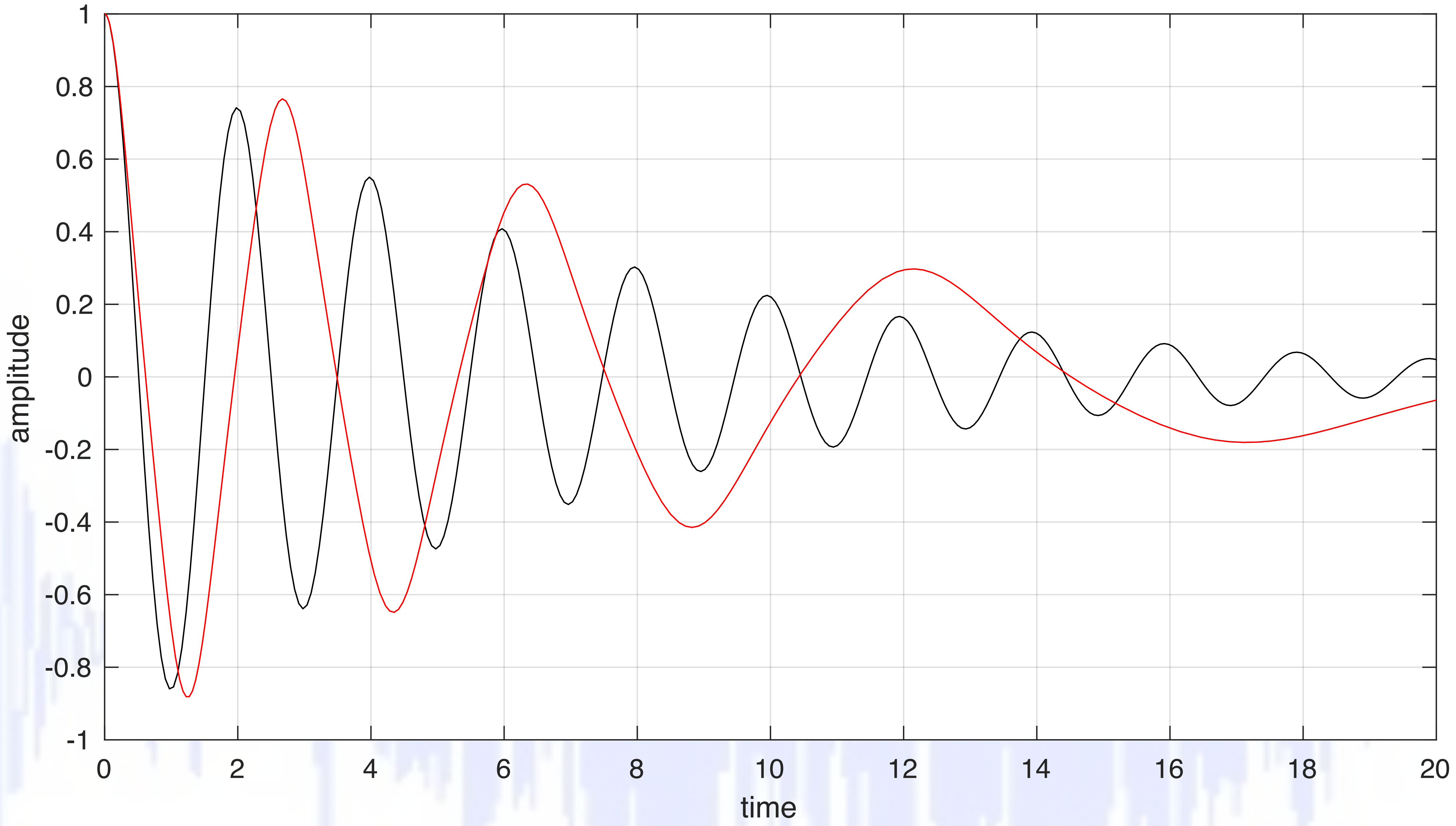


Esempio

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x}^3 + kx = 0$$

sistema SDOF massa / molla / smorzatore / non forzato
valori numerici di m,c,k uguali in tutti i casi
condizioni iniziali [1,0] - [spostamento, velocità]



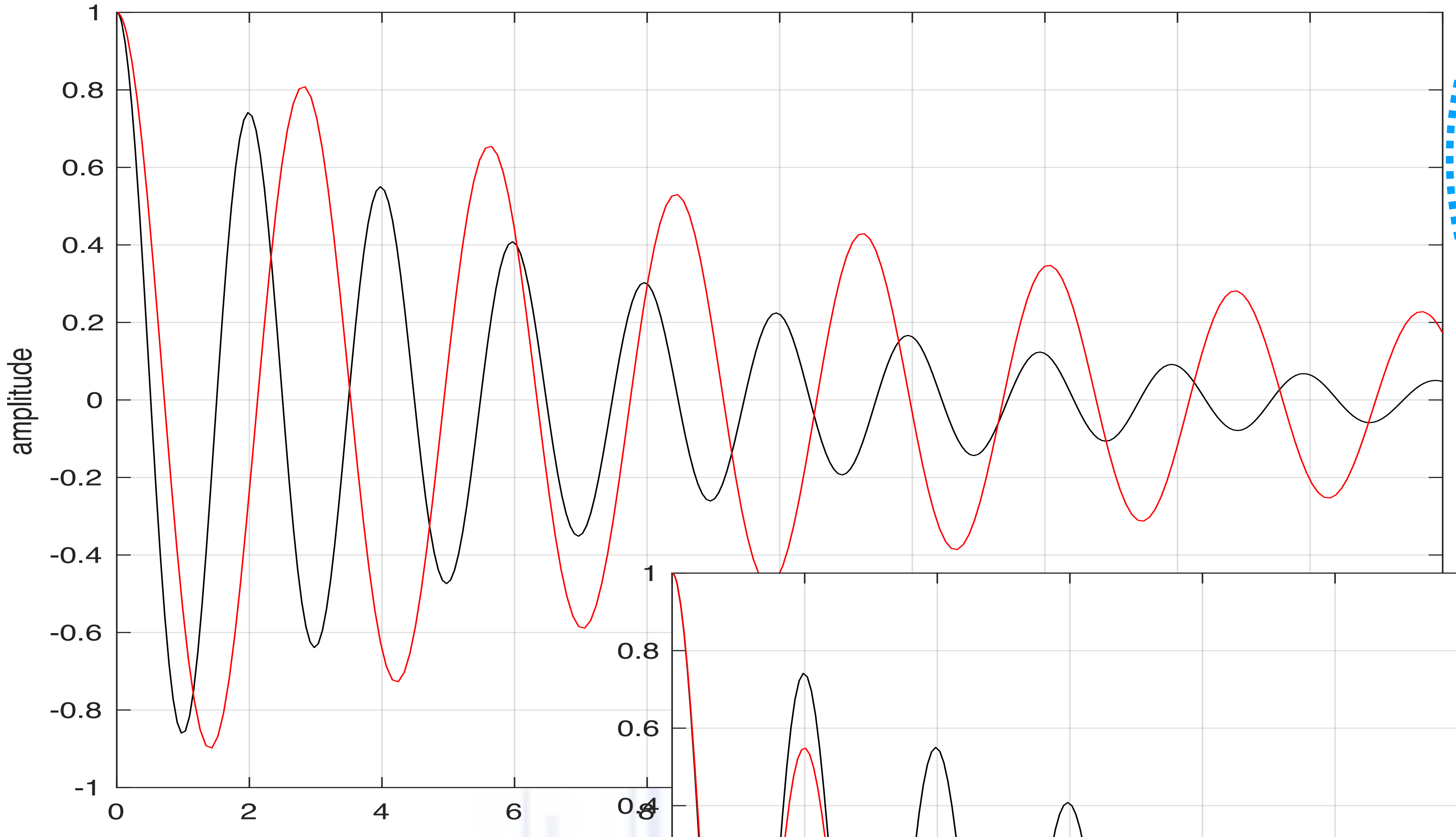
Come cambia la risposta??
Perchè?

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx^3 = 0$$

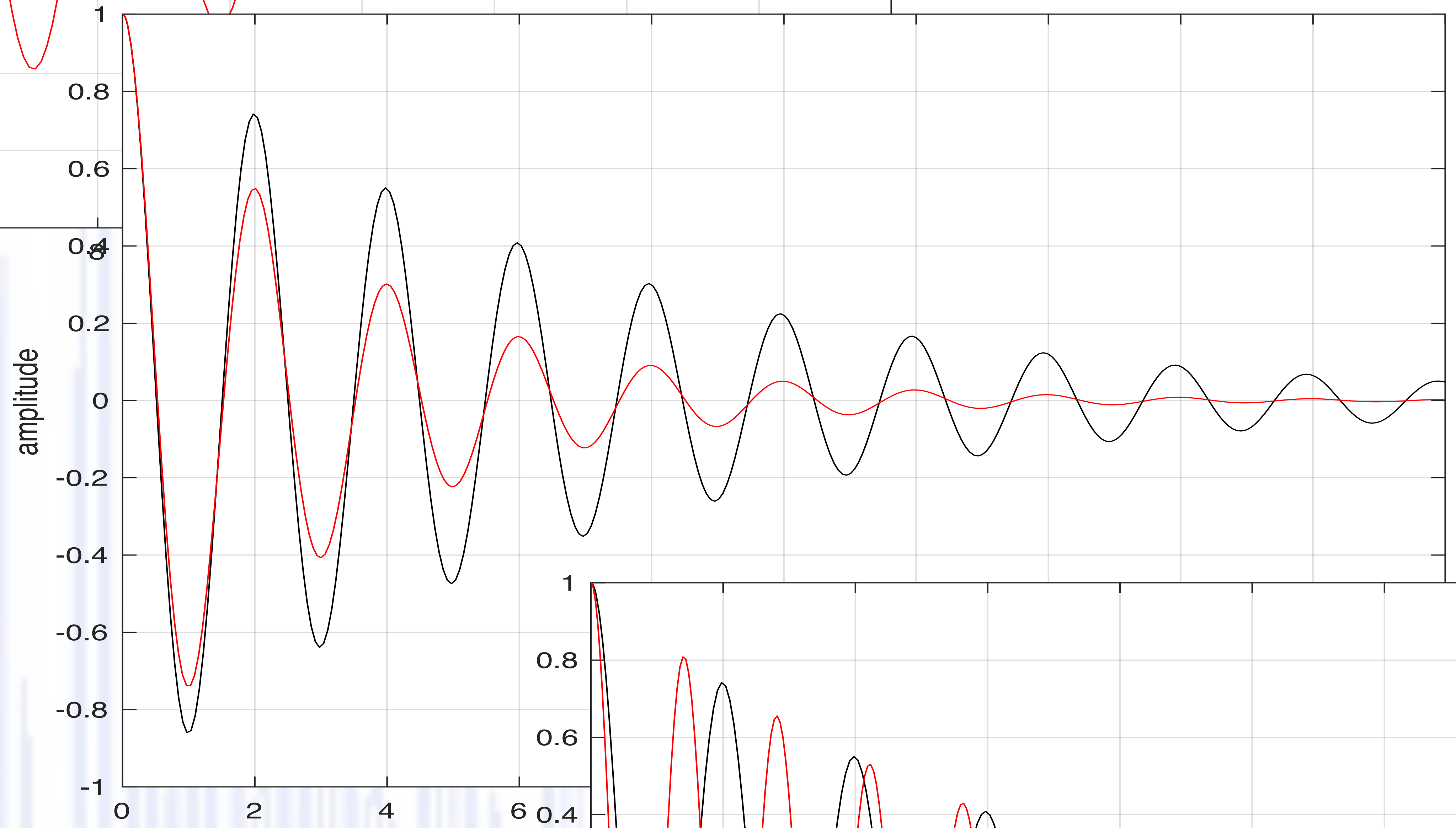
Esempio

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$2m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

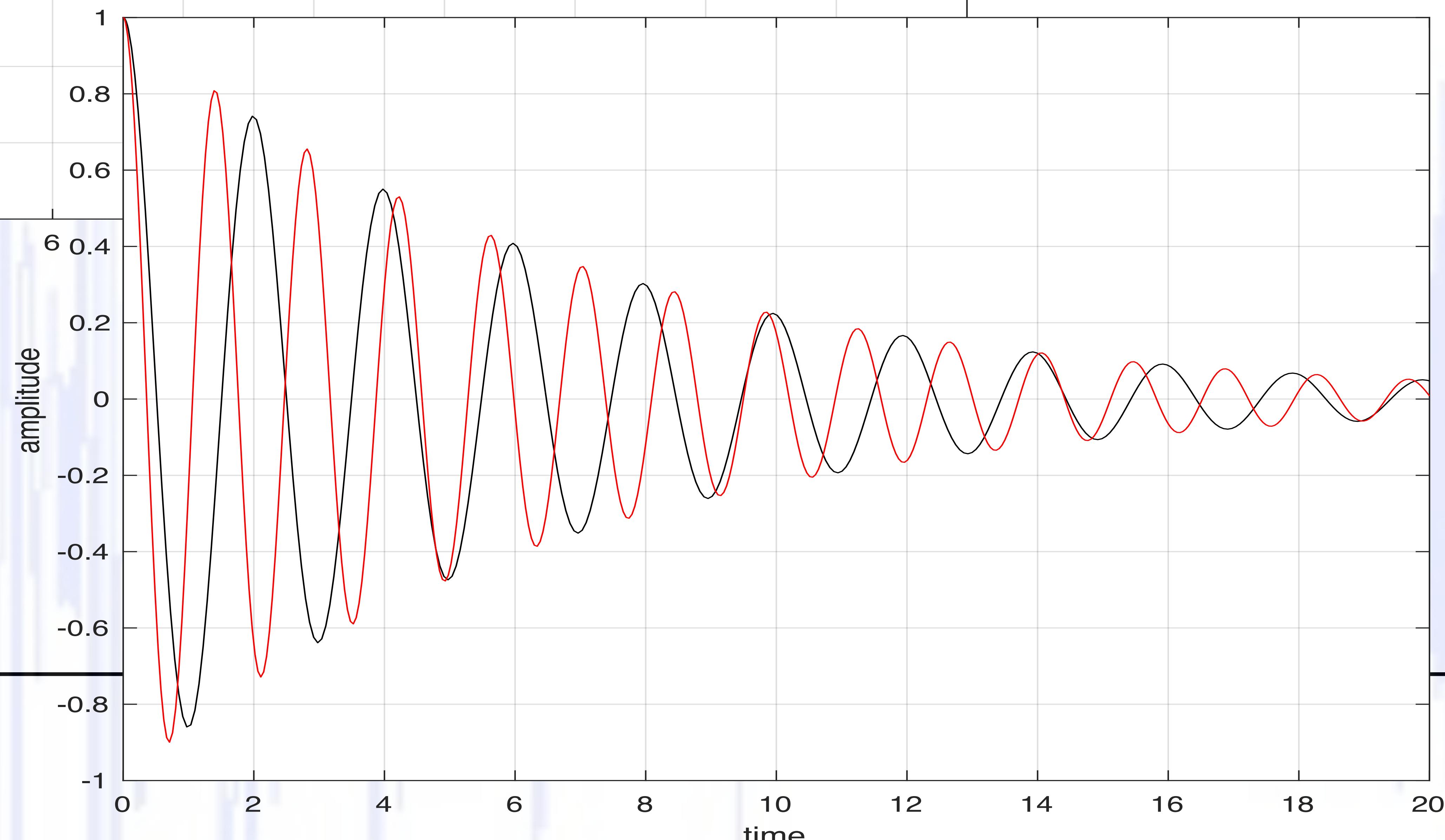


sistema SDOF massa / molla / smorzatore / non forzato condizioni iniziali [1,0] - [spostamento, velocità]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = 0$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = 0$$



Come cambia la risposta?? Perchè?

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

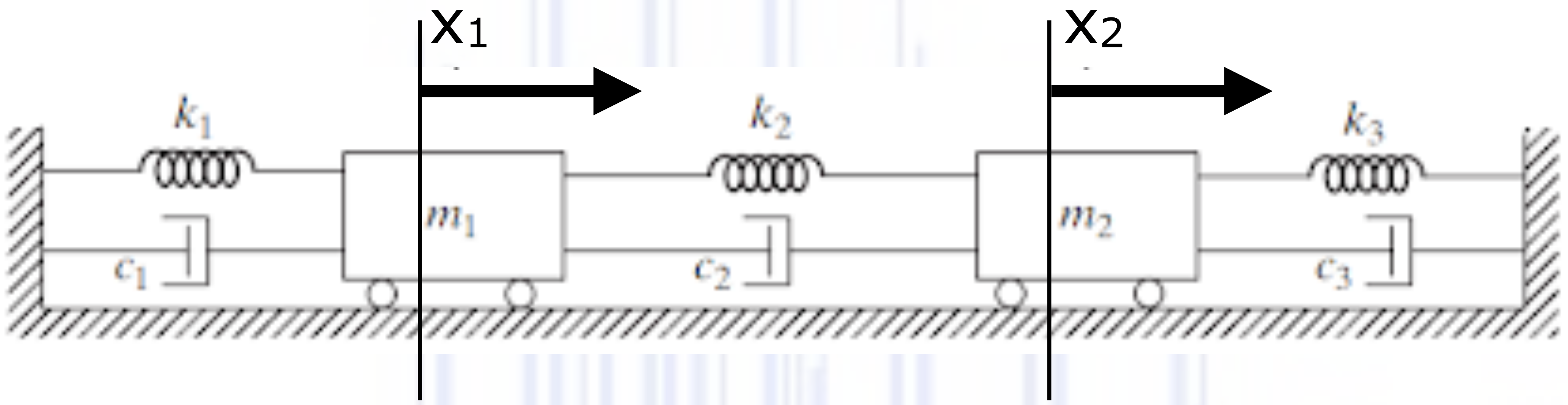
Forze Dissipative

Forzanti Esterne

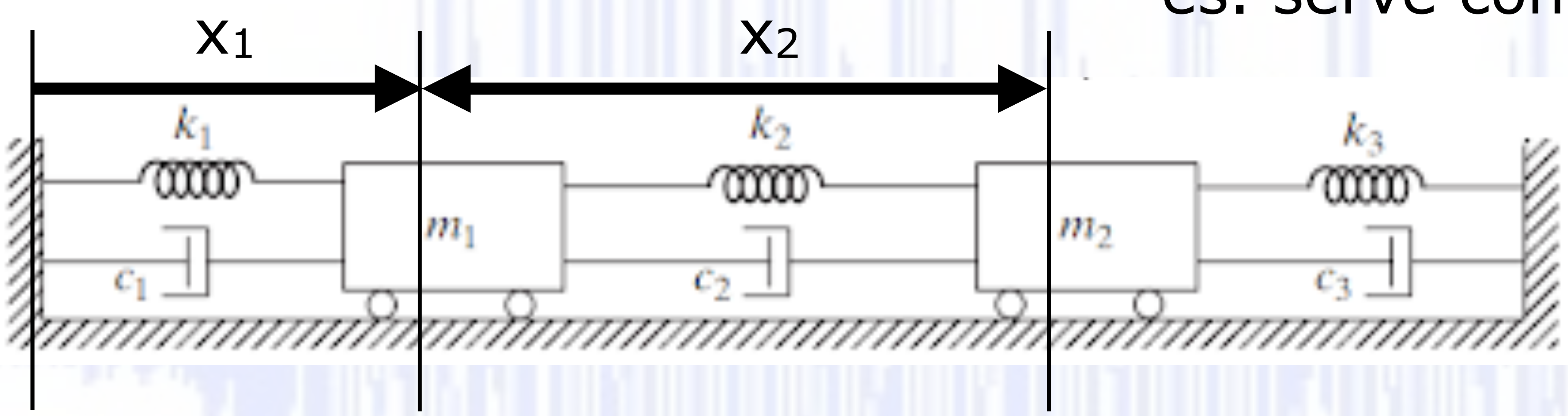
Coordinate

Le coordinate rappresentano il set di informazioni necessarie e sufficienti per descrivere, istante per istante, la configurazione del sistema.

Sono solitamente scelte per dare luogo alle equazioni del moto più semplici..
o quelle in grado di fornire immediatamente la soluzione ricercata senza ulteriori elaborazioni!

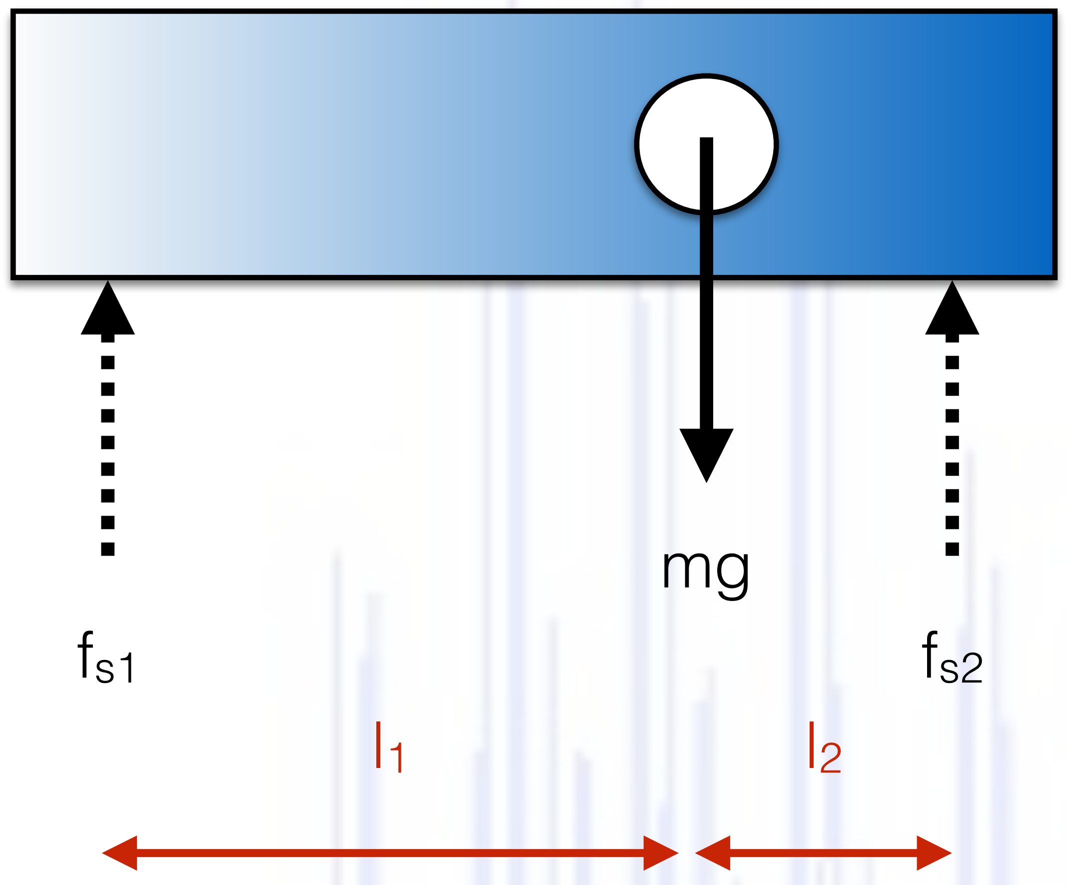


es. serve conoscere lo spostamento relativo tra m_1 e m_2



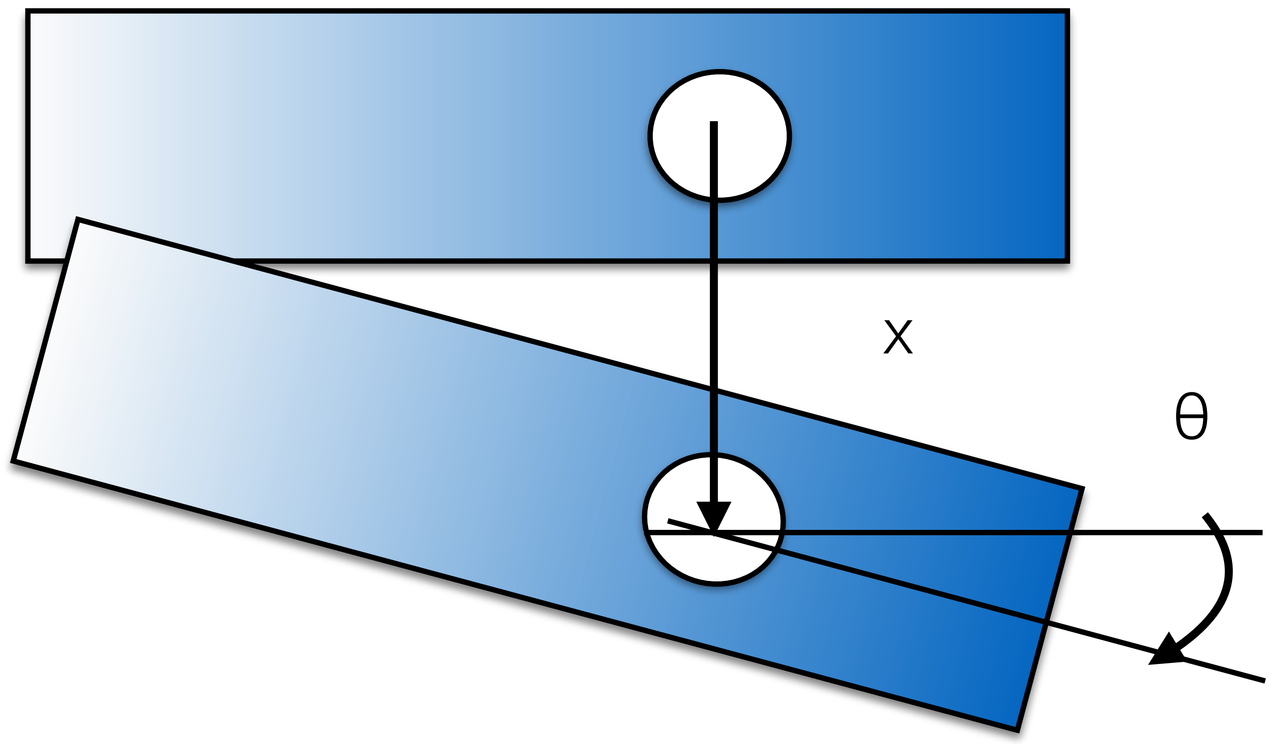
L'accoppiamento tra le equazioni, cambia in funzione della scelta della coordinate!

Si consideri un sistema che possa ruotare e traslare sul piano



Scelta Coordinate 1

x abbassamento baricentro
θ rotazione attorno al baricentro



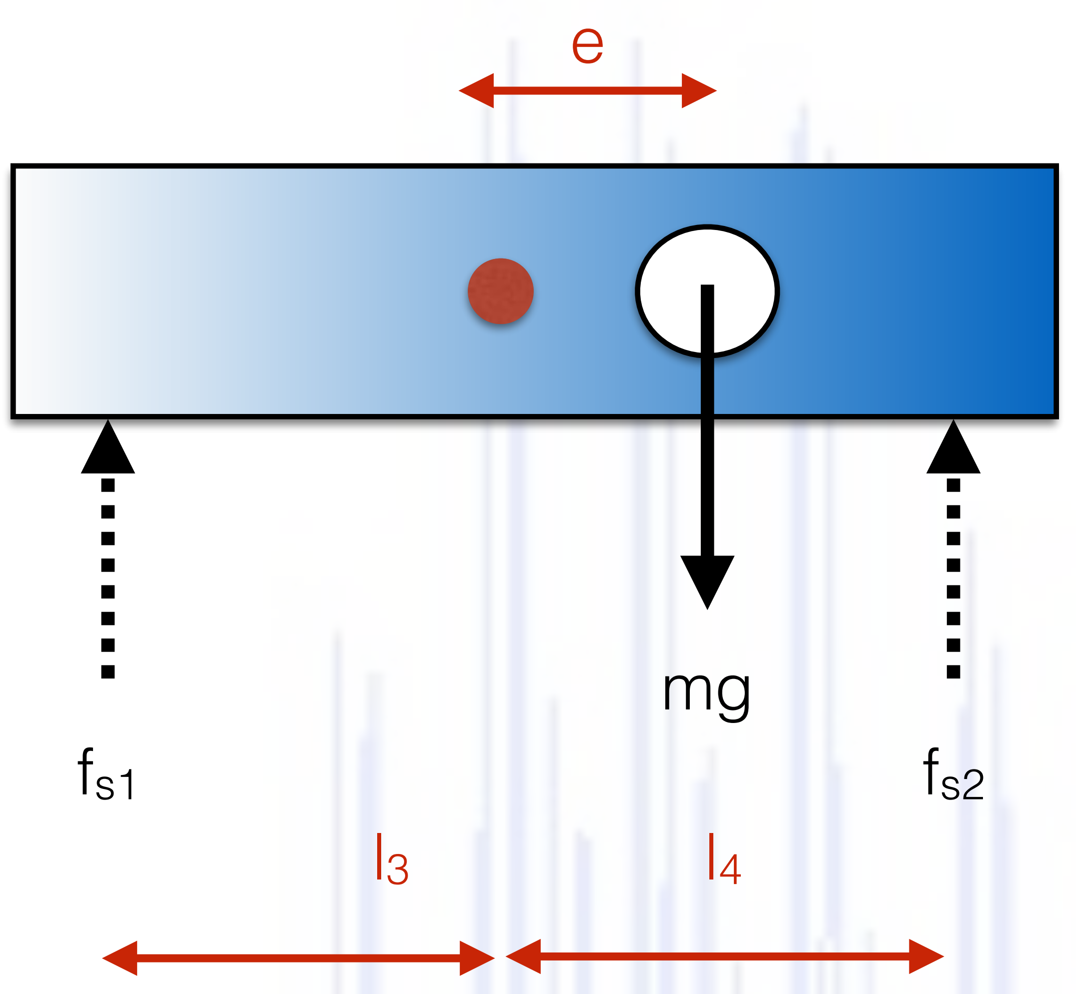
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la matrice di massa è diagonale
la matrice di rigidezza NON è diagonale

> accoppiamento STATICO

NB le matrici sono simmetriche!
principio di Maxwell

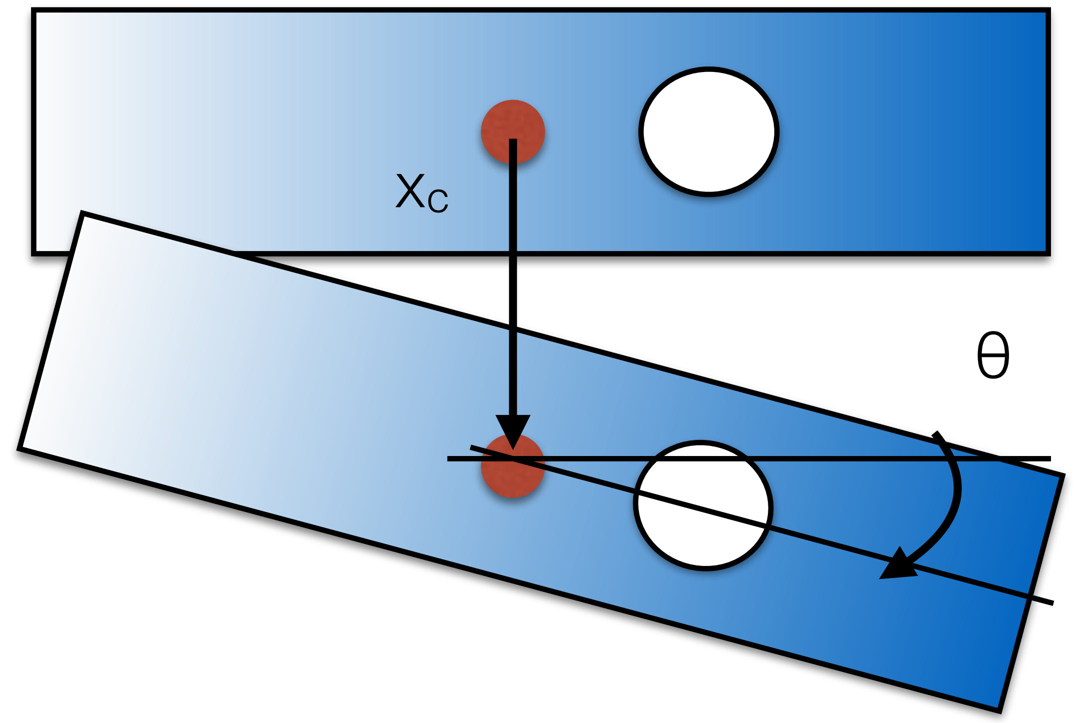
Si consideri un sistema che possa ruotare e traslare sul piano



Scelta Coordinate 2

x_e abbassamento centro elastico
θ_e rotazione attorno al centro elastico

Il centro elastico= punto di equilibrio delle forze applicate $l_3k_1=l_4k_2$



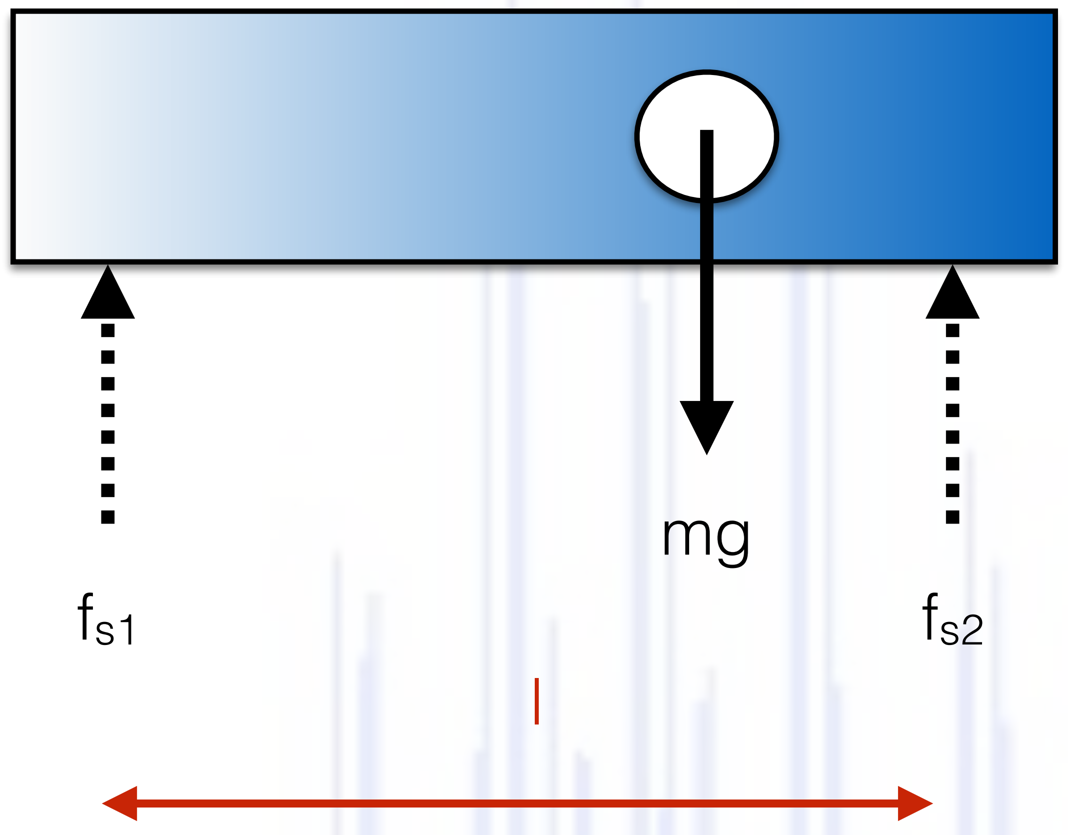
$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{ce} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{\theta}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ \theta_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la matrice di massa NON è diagonale
la matrice di rigidezza è diagonale

> accoppiamento DINAMICO

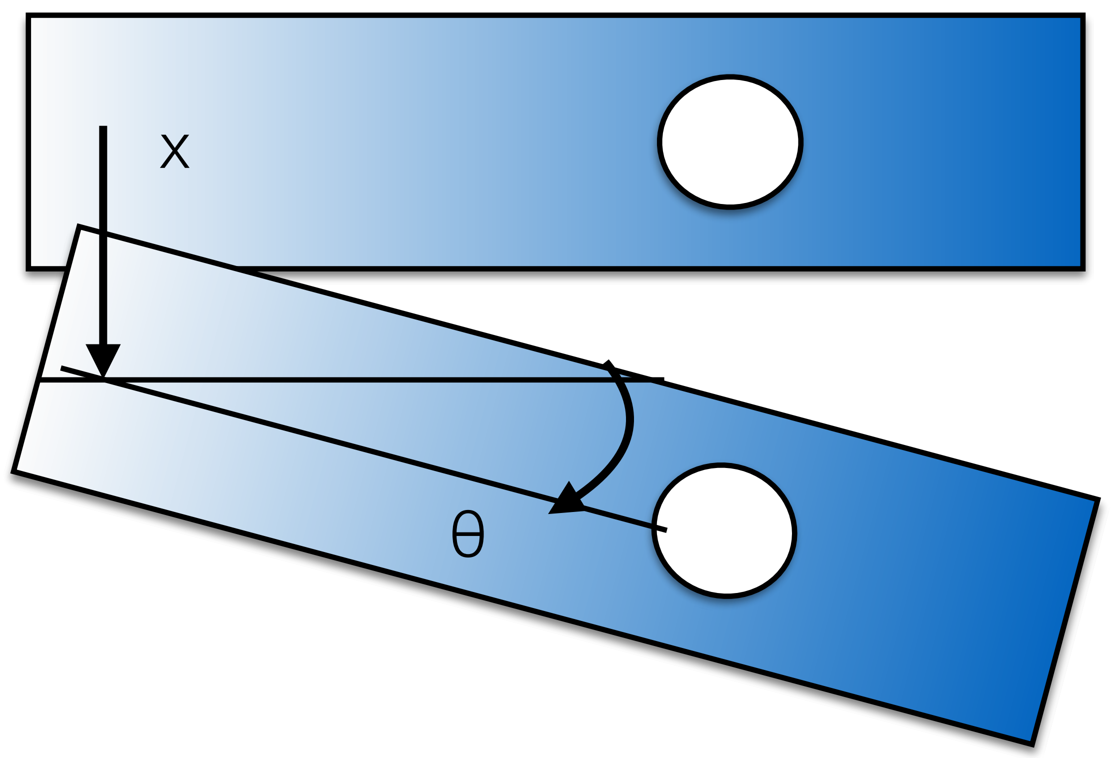
NB le matrici sono simmetriche!
principio di Maxwell

Si consideri un sistema che possa ruotare e traslare sul piano



Scelta Coordinate 3

x_1 abbassamento vincolo 1
θ_1 rotazione attorno al vincolo 1



$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

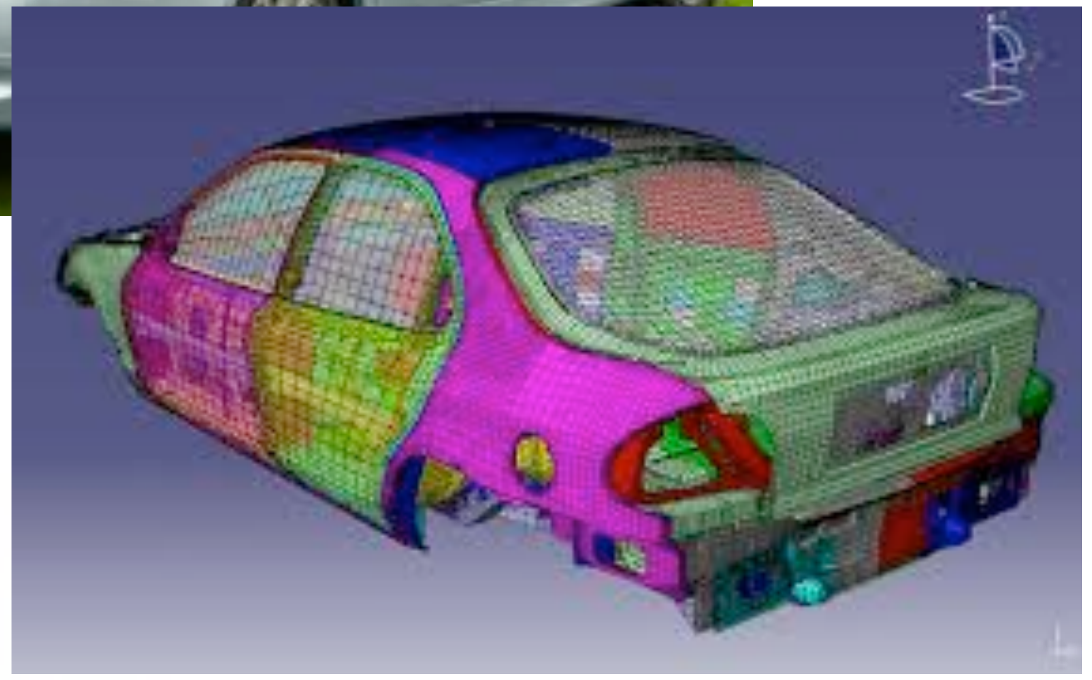
la matrice di massa NON è diagonale
la matrice di rigidezza NON è diagonale

> accoppiamento STATICO e DINAMICO

NB le matrici sono simmetriche!
principio di Maxwell

Sistemi Continui

..semplificare..

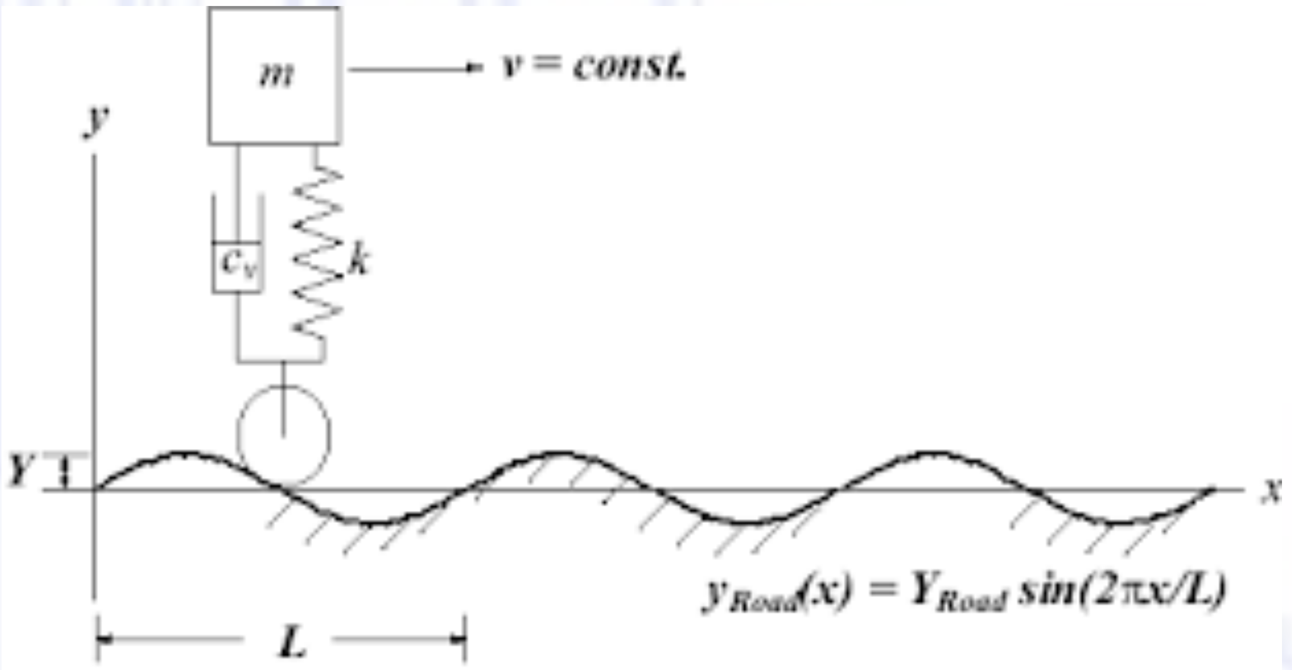


Sistemi MDOF

..semplificare..

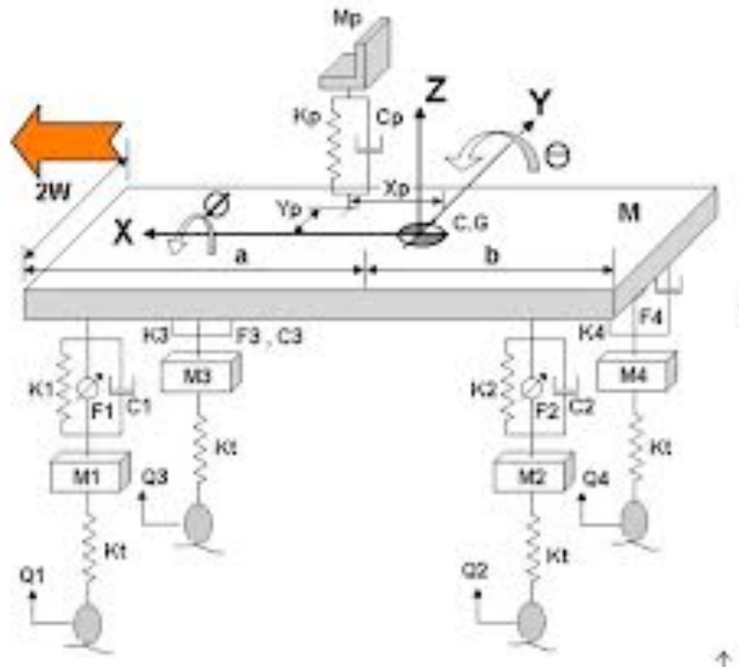
..semplificare..

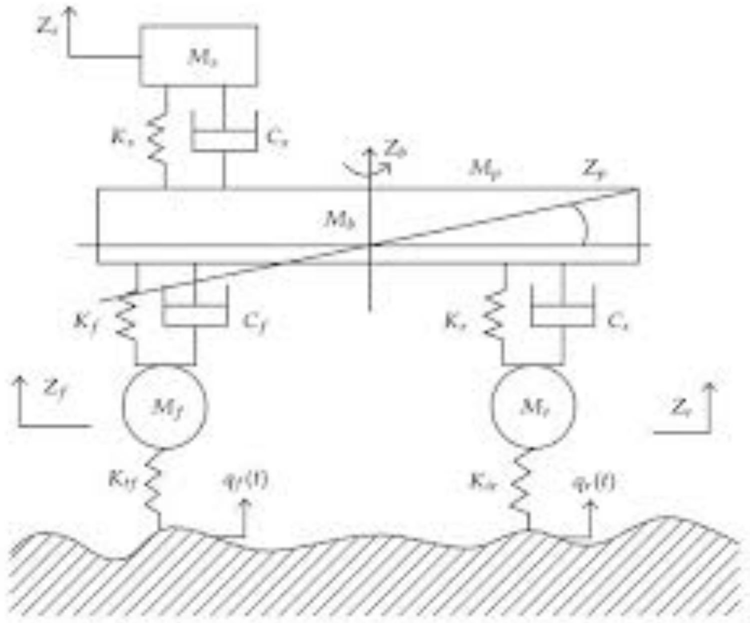
Sistemi SDOF

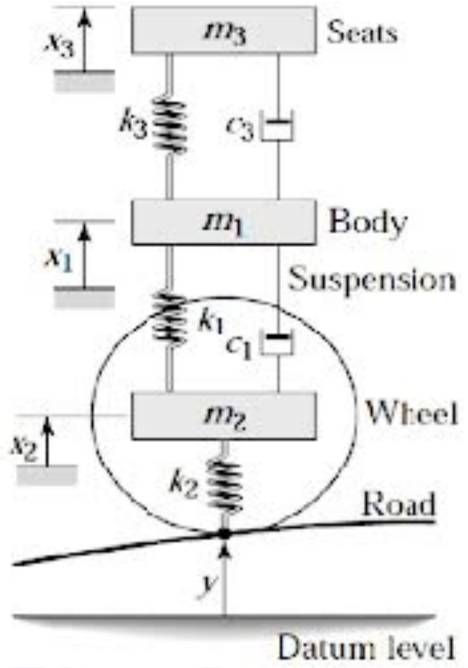


Discretizzazione

quante coordinate servono per descrivere il sistema?







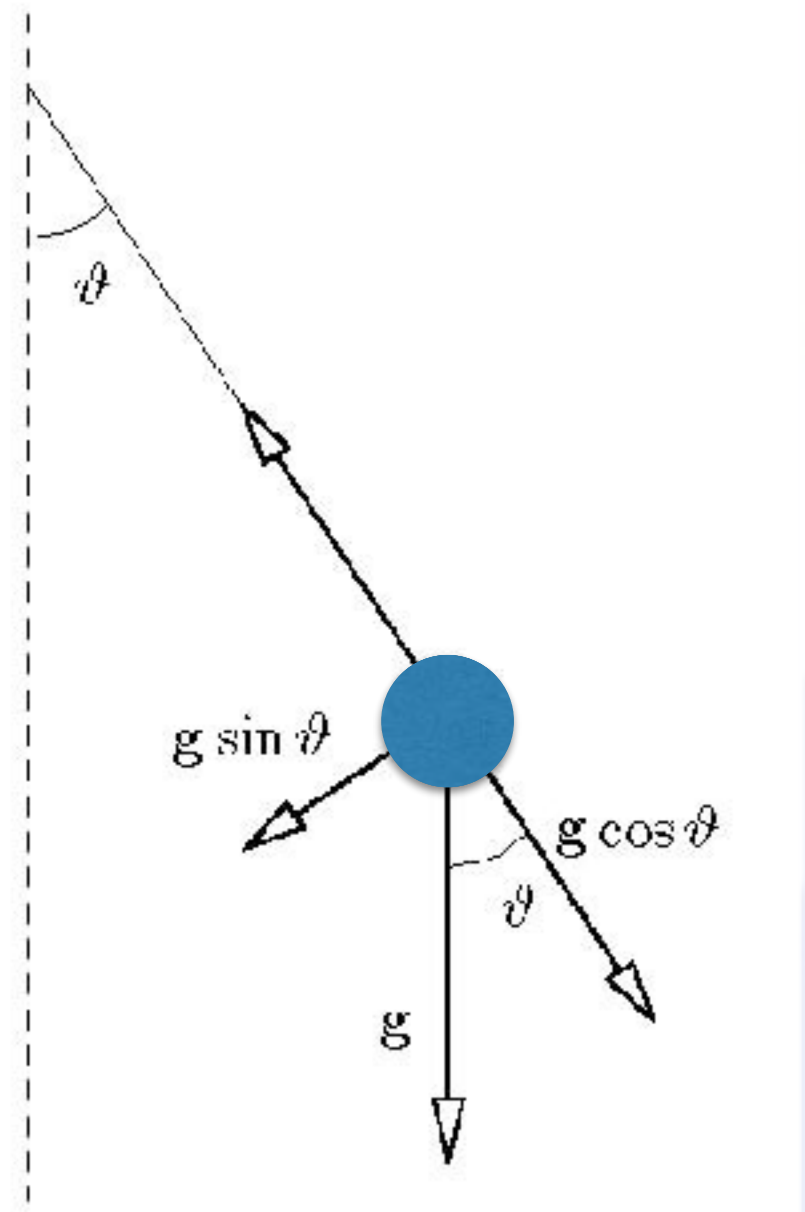
La scelta della rappresentazione determina il tipo di risultati ottenibili e viceversa!

Con quale di questi modelli si può studiare il rollio della macchina?

Linearizzazione

I sistemi reali non sono ideali (!) e raramente lineari (!)

All'aumentare degli spostamenti il legame tra le grandezze non è più di tipo proporzionale
> le equazioni non sono più lineari!
Si possono però linearizzare in un piccolo intorno della posizione di equilibrio
> ipotesi dei piccoli spostamenti!



L'equazione del pendolo:

$$\begin{cases} ma_c = T - mg\cos\theta \\ ma_t = -mg\,sen\theta \end{cases}$$

con il vincolo di moto circolare:

$$\begin{cases} a_c = L\dot{\theta}^2 \\ a_t = L\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg\,sen\theta \end{cases}$$

dividendo per mL ottengo l'equazione non lineare di moto

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) sen\theta = 0$$

non lineare

..ma nell'ipotesi
di piccoli spostamenti
(senθ circa uguale a θ)

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

lineare

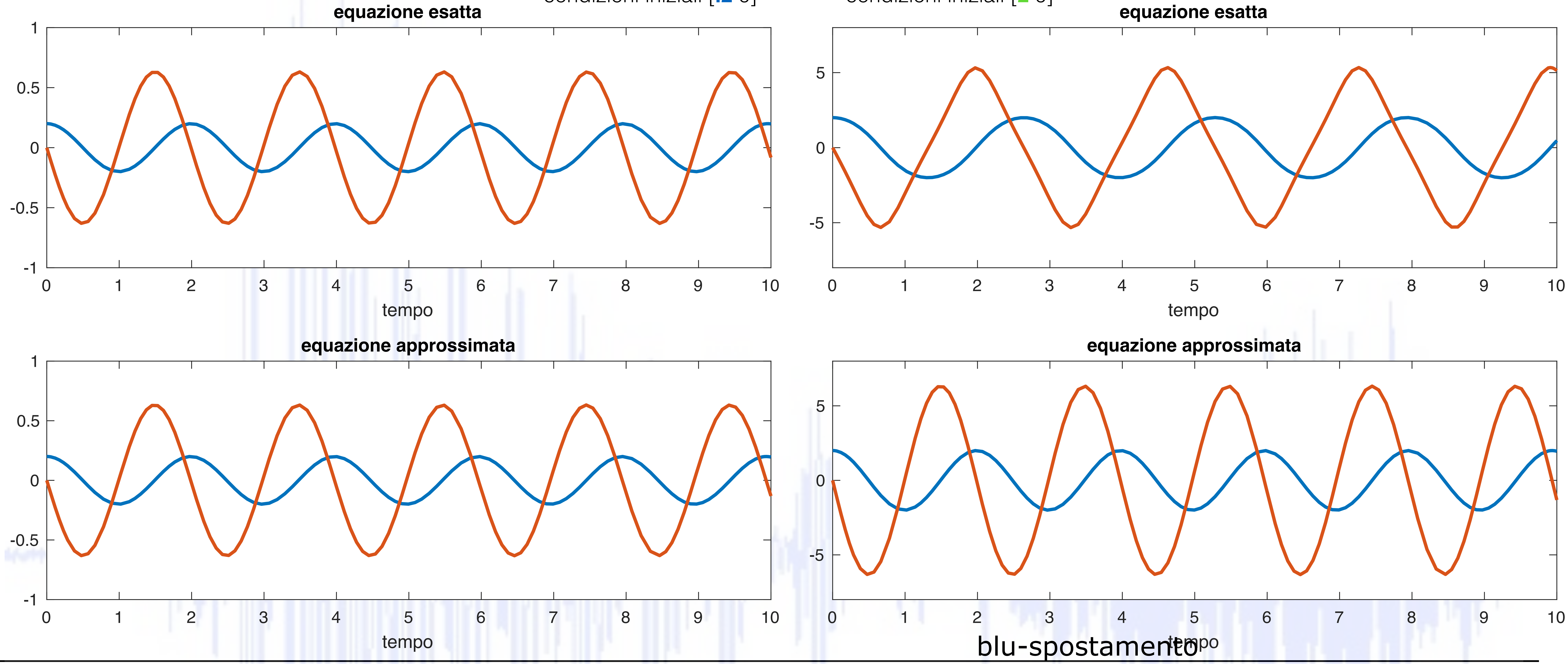
..i risultati cambiano in funzione del modello adottato

Piccoli Spostamenti

ω^2=10rad/s^2
condizioni iniziali [.2 0]

ω^2=10rad/s^2
condizioni iniziali [2 0]

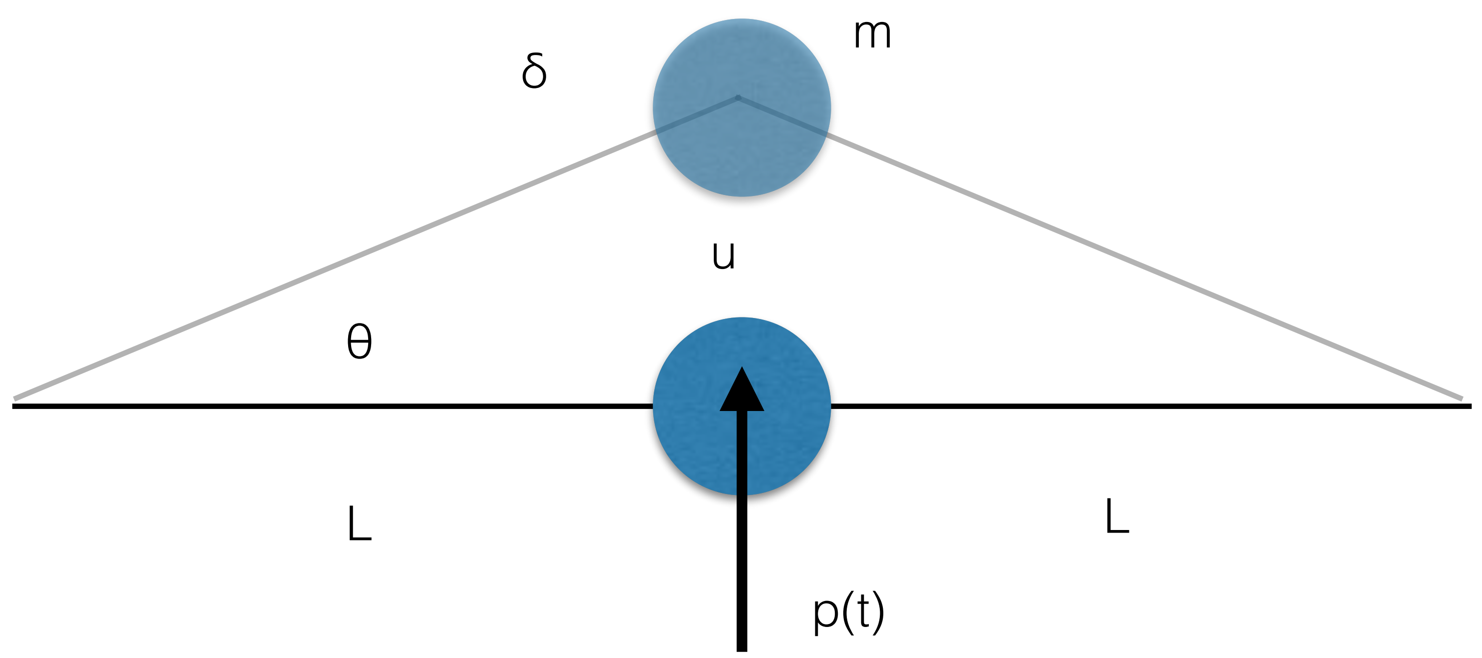
Grandi Spostamenti



blu-spostamento
arancio-velocità

Esempio: equazione fune tesa

Si consideri una fune tesa (lunghezza 2L, sezione A, modulo di Young E), con una massa m al centro,
Si sposti la massa m di una quantità u, in direzione verticale (da cui deriva un allungamento δ di ciascuna fune)



Per l'equilibrio delle forze agenti sulla massa $m\ddot{u} + 2T\sin\theta = p$ ◆

L'allungamento della fune vale: $\delta = \left(L^2 + u^2\right)^{1/2} - L$

la tensione: $T = T_o + \left(\frac{AE}{L}\right)\delta$ l'angolo: $\sin\theta = \frac{u}{\left(L^2 + u^2\right)^{1/2}}$

sostituendo tutto in ◆, si ottiene l'equazione esatta che è altamente non lineare:

$$\boxed{m\ddot{u} + 2\left[T_0 + \left(\frac{AE}{L}\right)\left[\left(L^2 + u^2\right)^{1/2} - L\right]\right]\left[\frac{u}{\left(L^2 + u^2\right)^{1/2}}\right] = p}$$

esatta

Si può stimare l'allungamento con un'espansione:

$$\delta = L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{L}\right)^2\right] - L = \left(\frac{1}{2L}\right)u^2$$

$$\boxed{m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L}\right)u + \left(\frac{AE}{L^3}\right)u^3 = p}$$

cubica

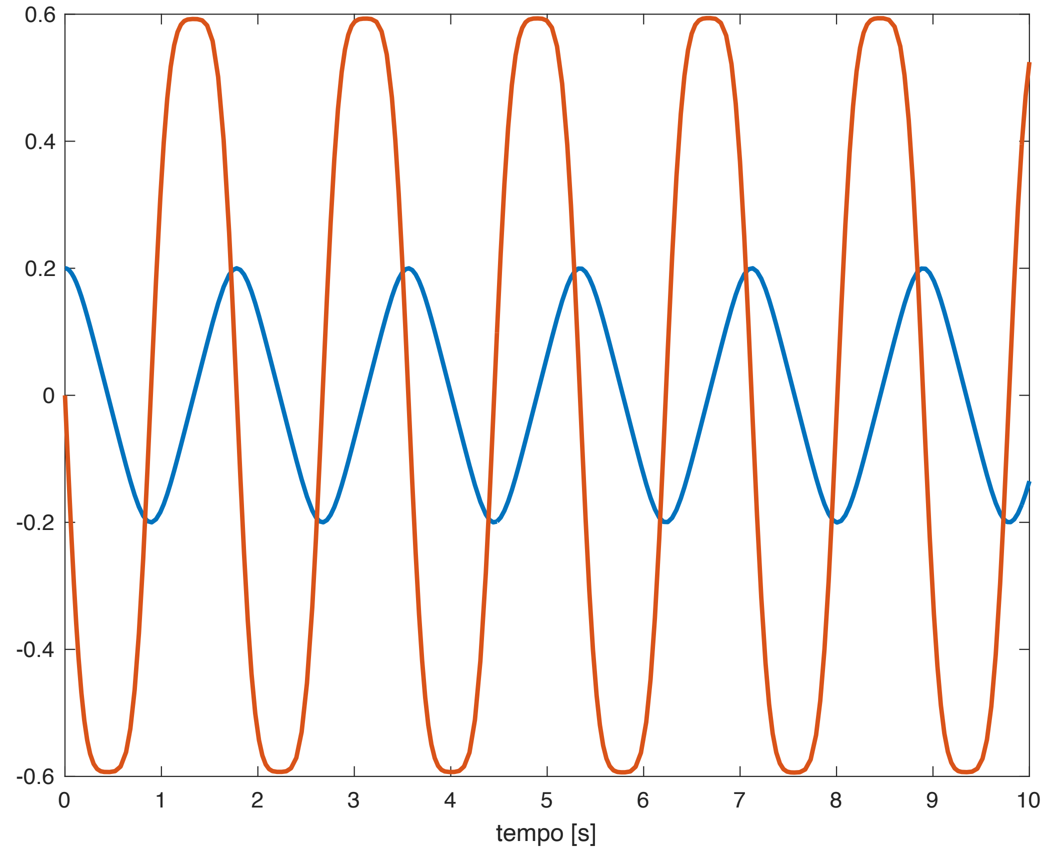
o ipotizzare una linearizzazione più brutale con u<<L

$$\boxed{m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L}\right)u = p}$$

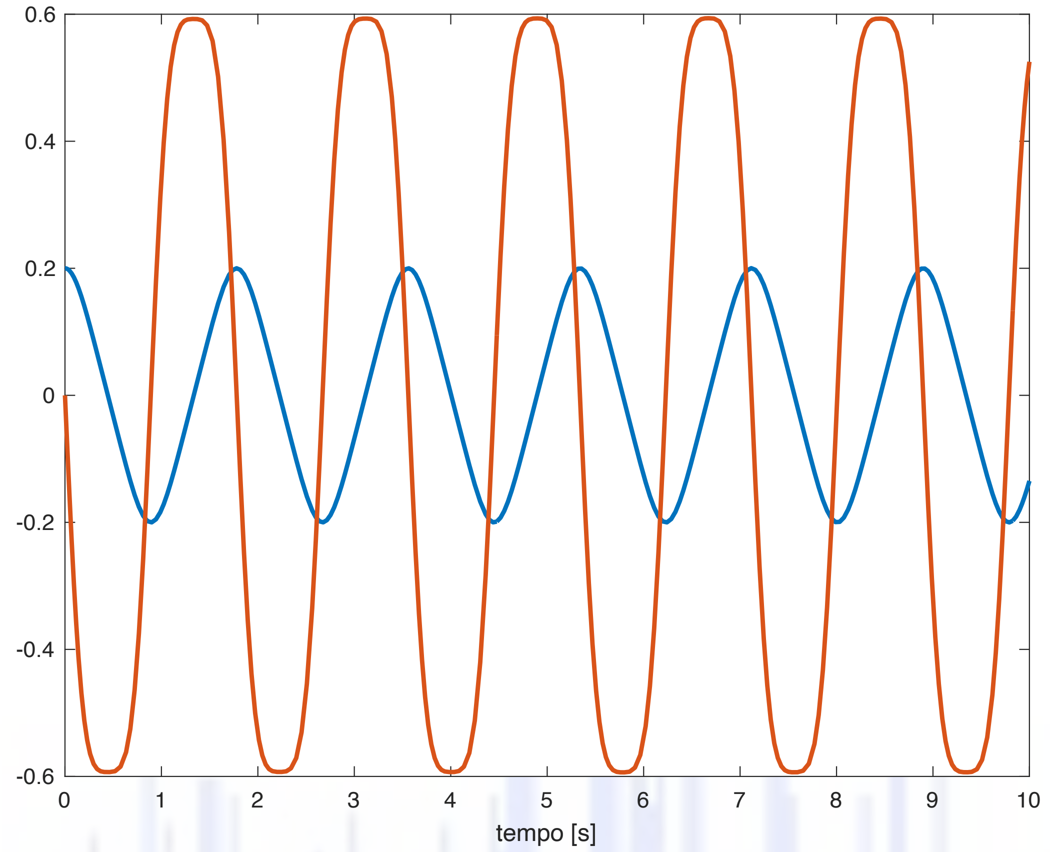
lineare

blu-spostamento
arancio-velocità

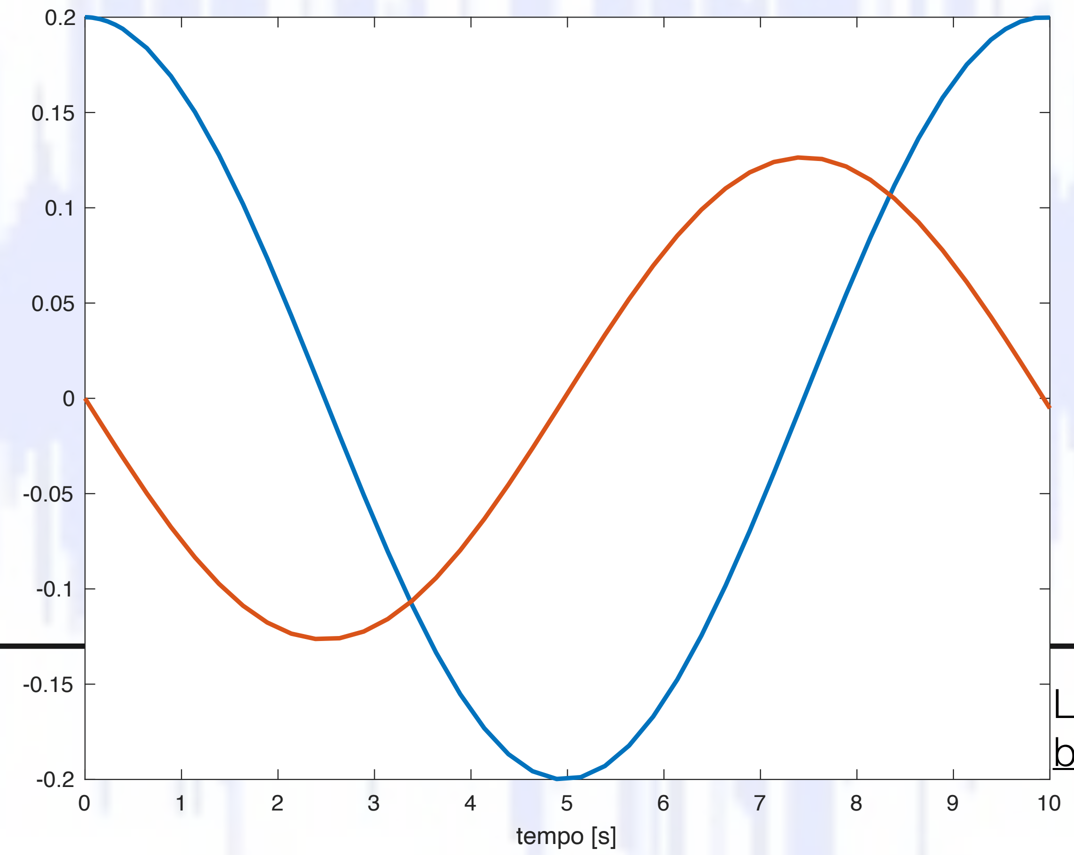
```
L=10;              % [m]
T=100;             % [N]
m=50               % [kg]
A=1.0000e-04;      % [m^2]
E=210000000000;    % [Pa]

t=[0 10]
init=[.2 0];
```



esatta



cubica



lineare

Le equazioni ed i risultati sono molto differenti!!

La linearizzazione semplifica di molto lo studio del sistema (!) ma modifica pesantemente i risultati ottenibili (!) ..è da eseguire con attenzione!

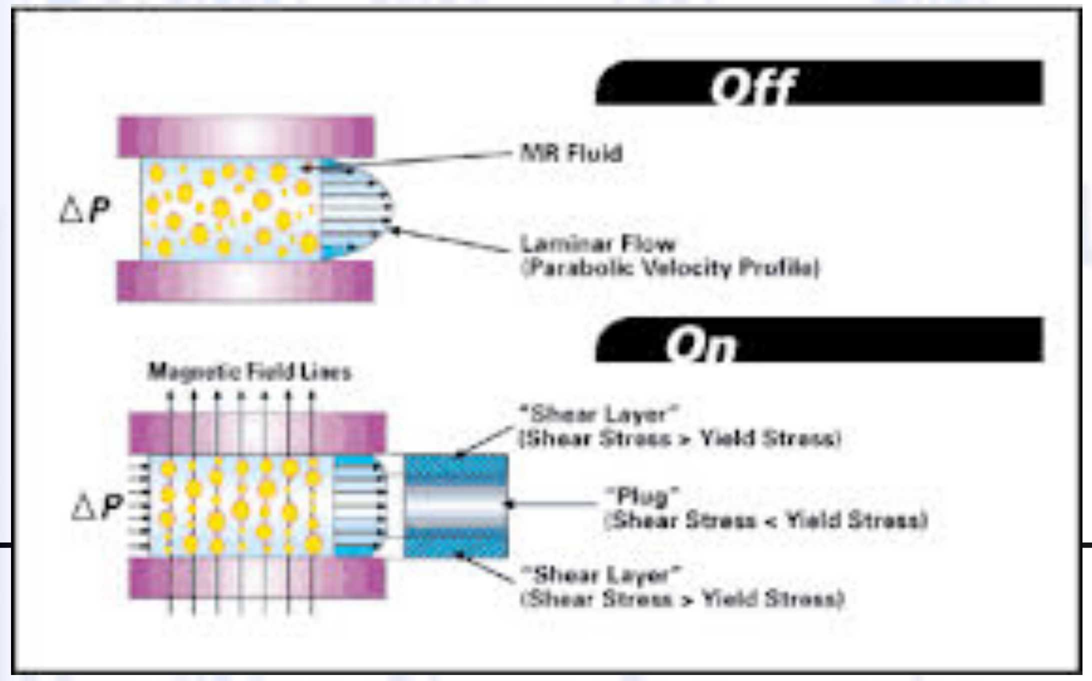
Se il sistema è "lineare" o "linearizzato" si può sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti!!

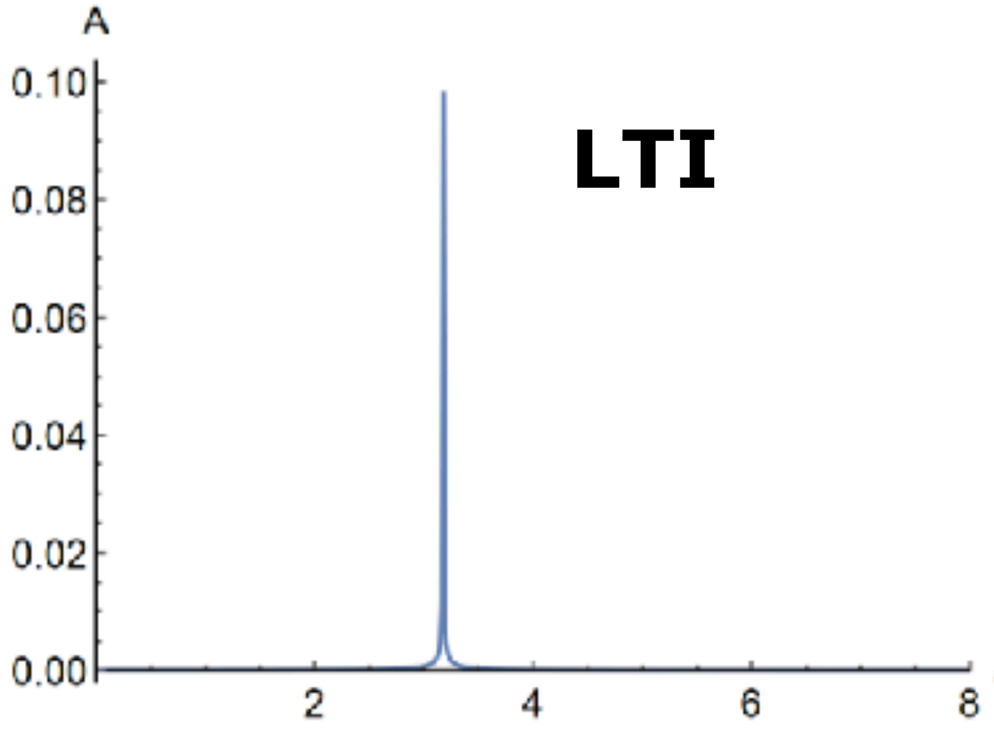
$$x(t) \rightarrow p(t)$$
$$y(t) \rightarrow q(t)$$

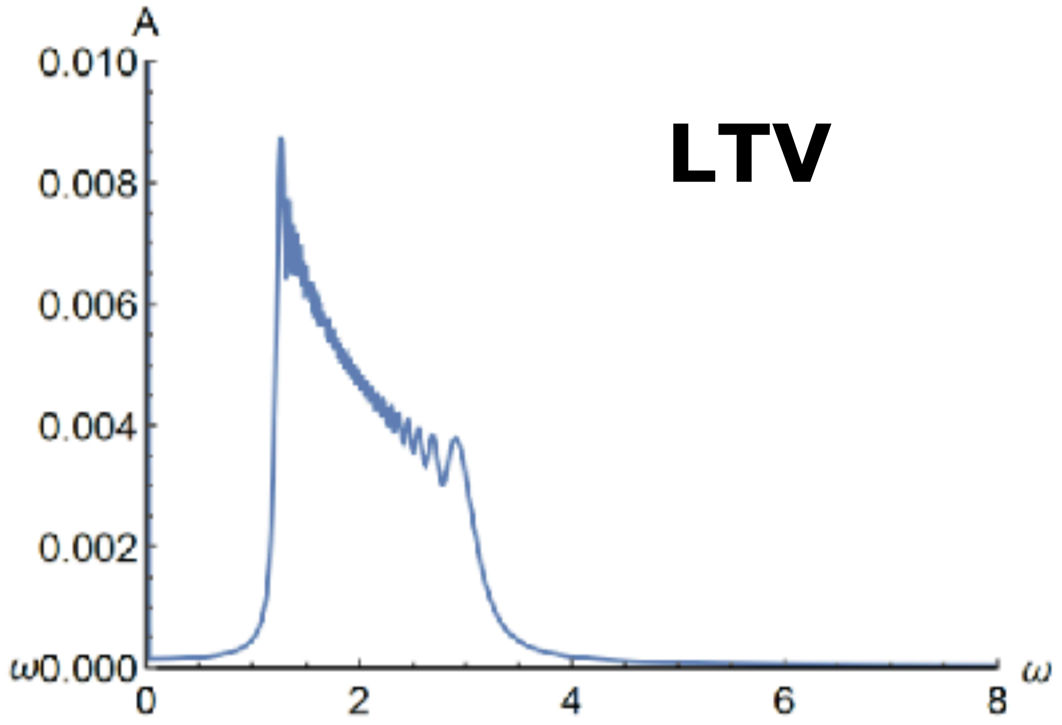
$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha p(t) + \beta q(t)$$

Sfrutteremo questa proprietà nella parte modale tra un po'.

Nel scorso MDV oltre che sistemi lineari, si ipotizza che i parametri del sistema non cambino nel tempo!
>> **Sistemi LTI** - Linear Time Invariant







Luigi BREGANT
bregant@units.it

Scrittura equazioni del moto - Approcci

Approccio
Newtoniano

Diagramma di
corpo libero

Equilibrio delle
Forze / Momenti

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

Approccio
Energetico

Principio
Lavori Virtuali

Equilibrio Lavoro
per ogni spostamento
virtuale

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forze\\reali}} + \delta W_{\substack{forze\\inerzia}} = 0$$

Metodo
Lagrangiano

Calcolo En.
Cinetica e Potenziale

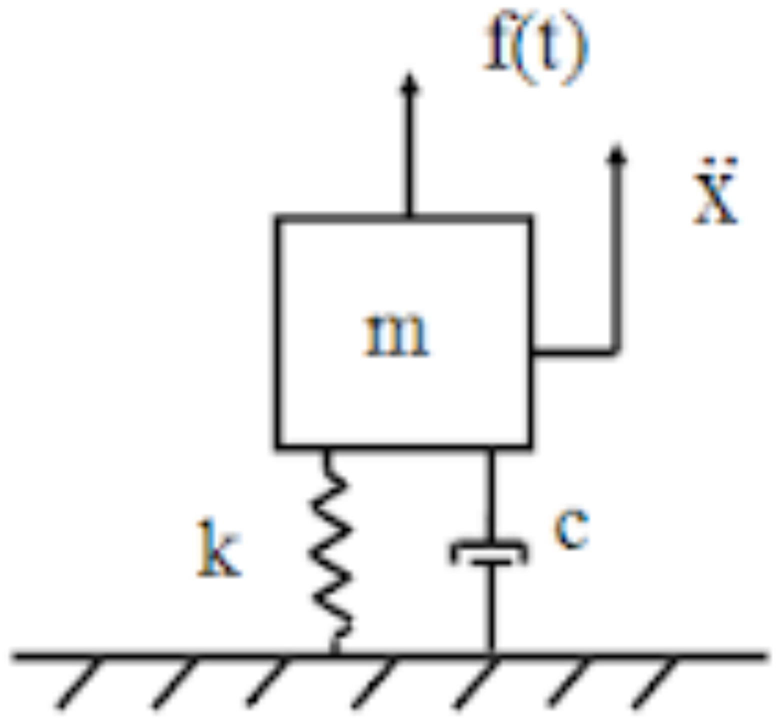
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

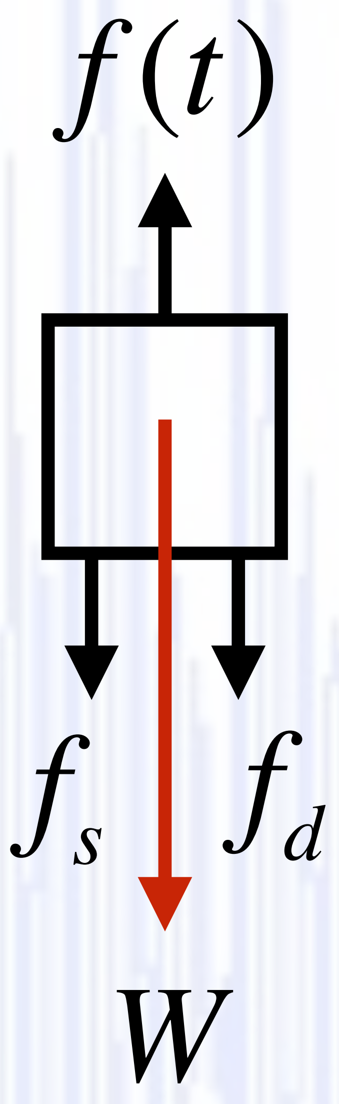
Approccio Newtoniano

$$\sum \vec{F} - m\ddot{\vec{x}} = 0$$

In condizioni di equilibrio.. la sommatoria delle forze agenti su un corpo è nulla!
(forze d'inerzia incluse!)

- Definizione di un sistema di coordinate
- Tracciamento diagramma di corpo libero
- Equilibrio delle forze agenti





$$f(t) - f_s - f_d - W = m\ddot{x}$$

con i modelli di smorzamento e rigidezza già visti..

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f - W}$$

riordinando in funzione della coordinata x > eq. differenziale II ordine, non omogenea, lineare, a termini costanti

$$\left| \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array} \right.$$

servono 2 condizioni iniziali!

..nel caso torsionale.. non cambia molto!

$$\sum \vec{M} - m\ddot{\vec{\theta}} = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \longrightarrow J\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + k_\theta\theta = f$$

$$-M_0 - WL\sin\theta = J_o\ddot{\theta}$$

$$M_0 = k_\theta\theta$$

$$J_0 = J_g + mL^2$$

$$\boxed{\left(J_g + mL^2\right)\ddot{\theta} + k_\theta\theta + WL\sin\theta = 0}$$

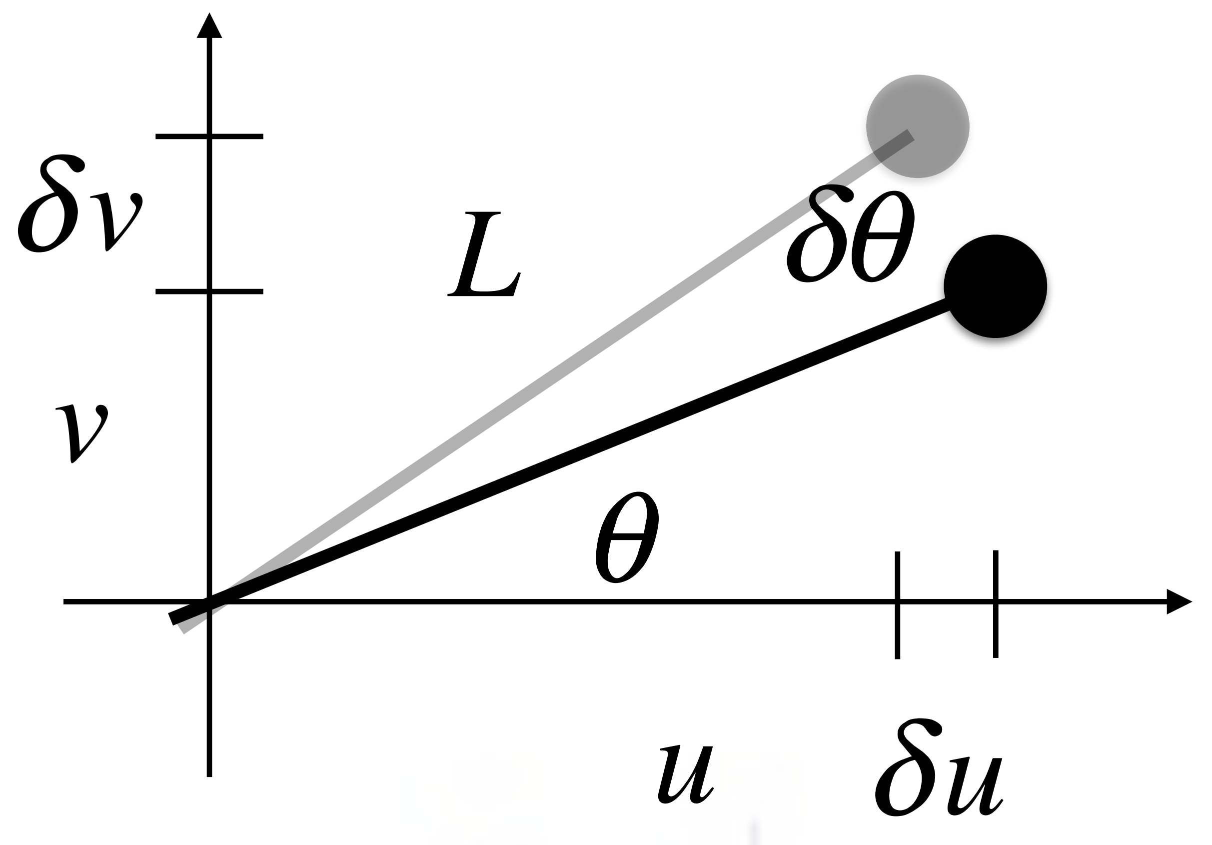
Non dimenticare le 2 condizioni iniziali!

Approccio Lavori Virtuali

Si ricordi:

coordinata : quantità che descrive una configurazione del sistema;

vincolo : limite cinematico sulle configurazioni del sistema;



coordinate generalizzate : un set di spostamenti lin. indipendenti, congrui ai vincoli capace, di descrivere ogni configurazione del sistema (q_i);

spostamento virtuale : un infinitesimo spostamento di configurazione del sistema permesso dai vincoli (δq_i)

lavoro virtuale : lavoro delle forze applicate al sistema quando sottoposto ad uno spostamento virtuale

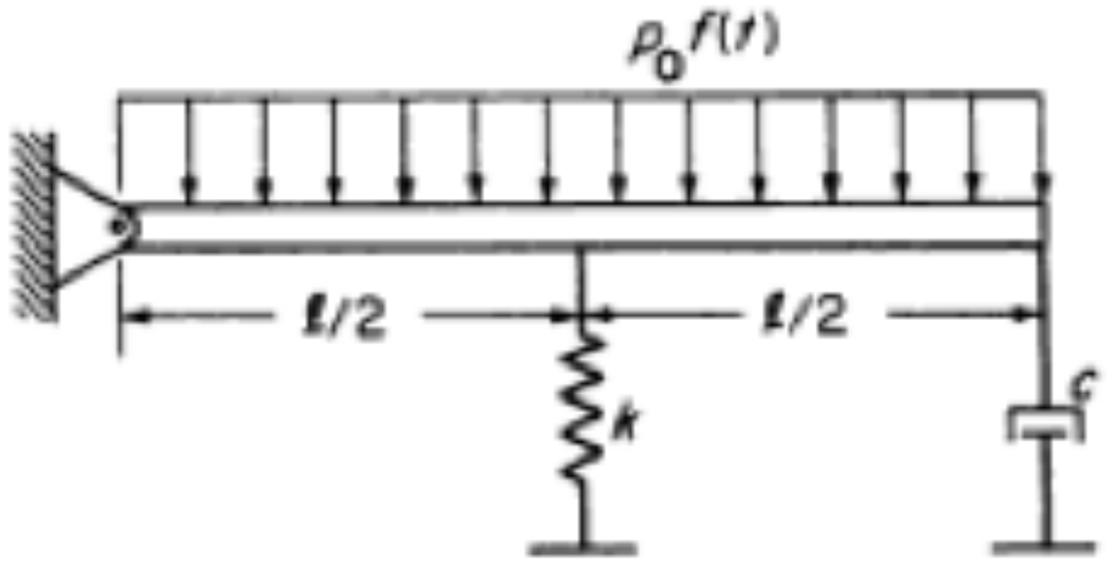
forze generalizzate : quei moltiplicatori di δq_i che forniscono il lavoro virtuale di δq_i (qualora $\delta q_i=1$ e $\delta q_j=0$ per ogni i diverso da j)

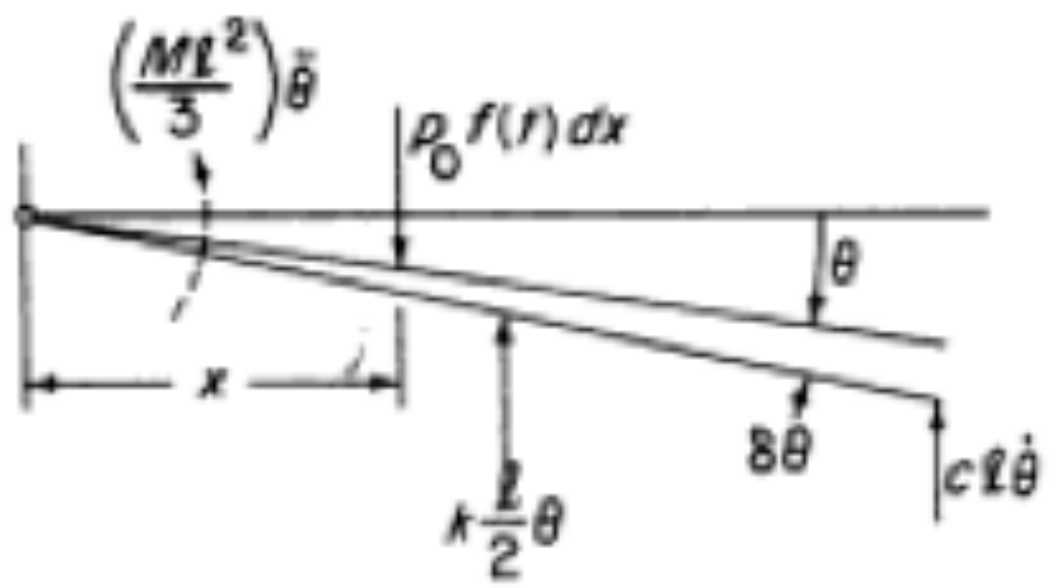
$$\delta W = \sum_{i=i}^{N} Q_i \delta q_i$$

principio dei lavori virtuali: per qualsiasi spostamento virtuale del sistema la somma dei lavori virtuali delle forze applicate e di quelle d'inerzia è nullo

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forze \\ reali}} + \delta W_{\substack{forze \\ inerzia}} = 0$$

Si scriva l'equazione del moto della trave vincolata ad un estremo
con un carico distribuito
(con approccio Newtoniano
come si gestiscono il vincolo e la forza distribuita? ..)





$$\delta W_{\substack{forze\\inerzia}} = -\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta}\underline{\delta\theta}$$

$$\delta W_{\substack{forze\\smorzamento}} = -\left(cL\dot{\theta}\right)L\underline{\delta\theta}$$

$\delta\theta$ si semplifica in tutti i termini

$$\delta W_{\substack{forze\\rigidezza}} = -\left(k\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2}\underline{\delta\theta}$$

$$\delta W_{\substack{forze\\carico}} = \int_0^L p_o f(t)x\,dx\delta\theta = p_o f(t)\frac{L^2}{2}\underline{\delta\theta} \longrightarrow \boxed{\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta} + \left(cL^2\right)\dot{\theta} + \left(k\frac{L^2}{4}\right)\theta = p_o\frac{L^2}{2}f(t)}$$

Approccio Lagrangiano

Si parte dal principio di D’Alambert* > Principio di Hamilton** > Equazioni Lagrange

Si valutano quantità scalari (energia cinetica T e potenziale V) con cui si costruisce il Lagrangiano (L=T-V) non si usano più quantità vettoriali!

Ci sono diverse forme dell’eq. di Lagrange..

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

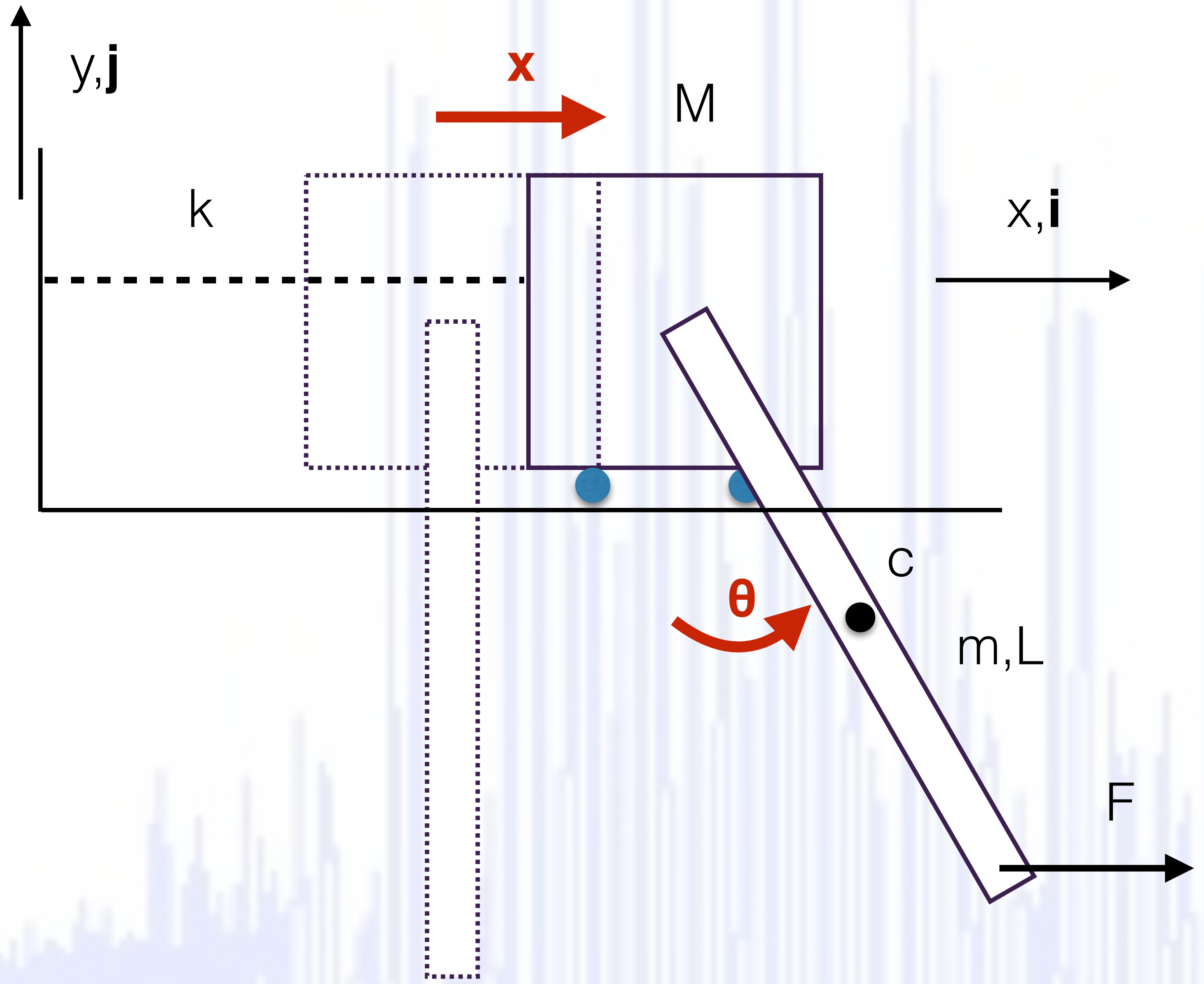
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

*D’Alambert combina l’approccio Newtoniano
e il principio dei lavori virtuali esteso al caso dinamico

$$(\sum \vec{F} - m\ddot{\vec{x}})\delta x = 0$$

** Hamilton estende il principio di D’Alambert
alle coordinate generalizzate

Si scriva l'equazione del moto di un sistema costituito da una molla k, un carrello di massa M che scorre sul piano ed una pendolo di massa m e lunghezza L a questo attaccato.
Schema e coordinate scelte sono riportate in figura.



Momento d'inerzia pendolo $J_c = \frac{mL^2}{12}$

Velocità del punto c $v_c = \left(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \right)\vec{i} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$

Energia Cinetica $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_c \bullet v_c + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2$

Energia Potenziale $V = \frac{1}{2}kx^2 + mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

Lagrangiano
$$L = \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}^2 \right] + \\ -\frac{1}{2}kx^2 - mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

Con le derivate rispetto alle coordinate scelte (x, θ) e le loro derivate,
..si arriva alla scrittura delle equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{1}{2} mL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} mL\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3} mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgL\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

Fate le derivate parziali rispetto al tempo
Cosa si ottiene?
>..?

Le coordinate sono accoppiate?
>..?

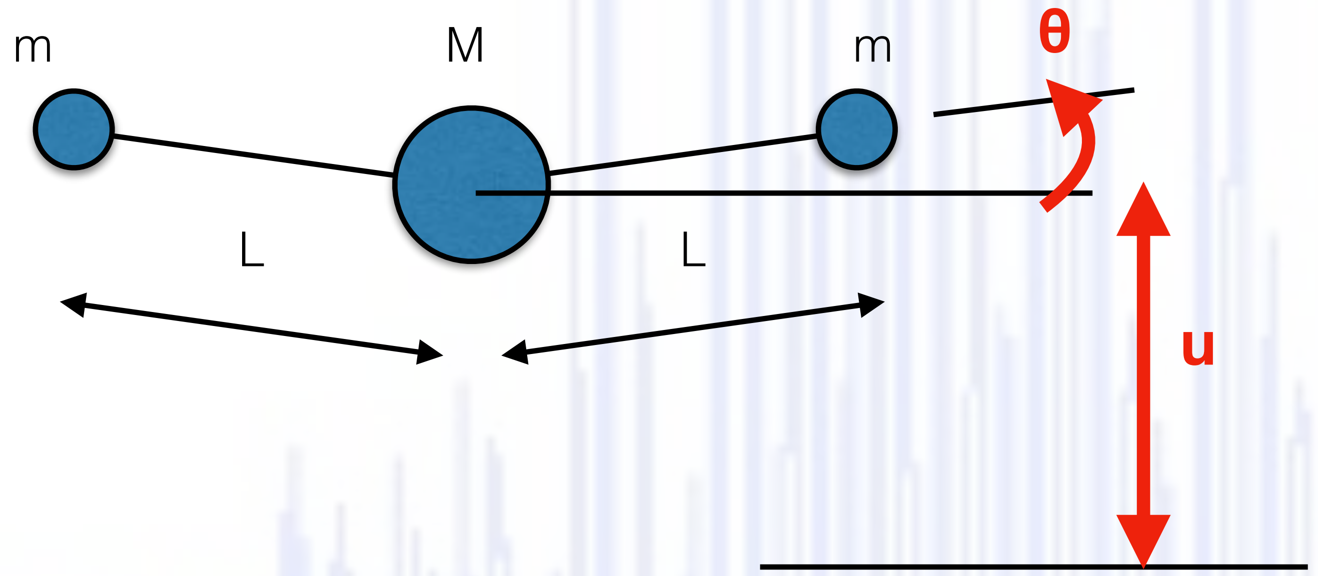
Quante condizioni al contorno servono?
>..?

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(M+m)\dot{x} + \frac{1}{2} mL\dot{\theta}\cos\theta\right] + kx = F$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{6} mL(3\dot{x}\cos\theta + 2L\dot{\theta}\right] + \frac{1}{2} mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2} mgL\sin\theta = FL\cos\theta$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Si scriva l'equazione del moto di un sistema costituito da tre masse rappresentante un aereo in volo.
Schema e coordinate scelte sono riportate in figura.



Coordinata masse m $\quad y_m = u + L\sin\theta \simeq u + L\theta \quad$ ..piccoli spostamenti

Energia cinetica T

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + 2\left[\frac{1}{2}m\dot{y}_m^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)^2$$

Energia Potenziale Elastica $\quad V = 2\frac{1}{2}k\theta^2$

..eseguiamo tutte le derivate necessarie $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + 2m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

$$M\ddot{u} + 2m\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) = 0$$

$$2mL\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) + 2k\theta = 0$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} M+2m & 2mL \\ 2mL & 2mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Le coordinate sono accoppiate?
>..?

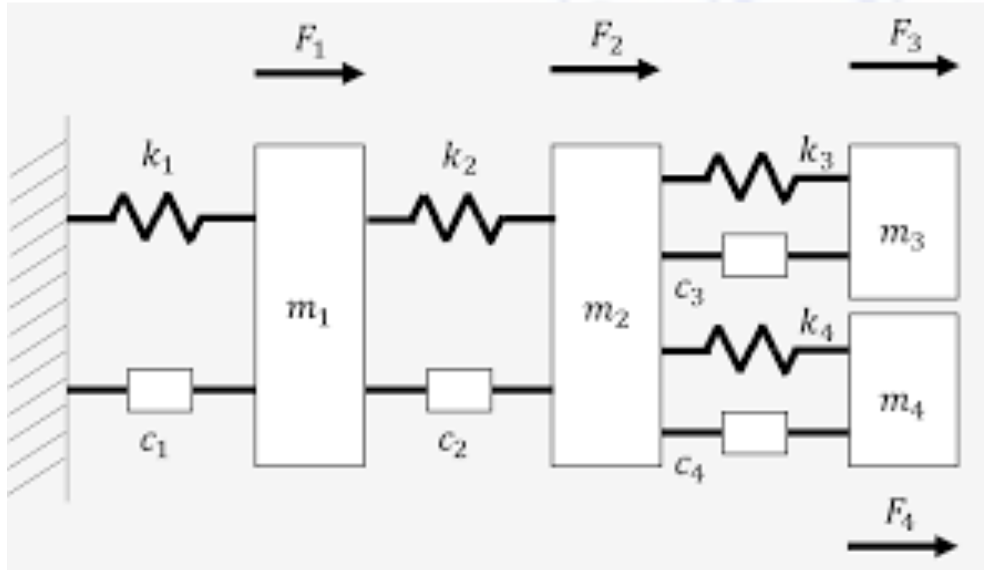
Quante condizioni al contorno servono?
>..?

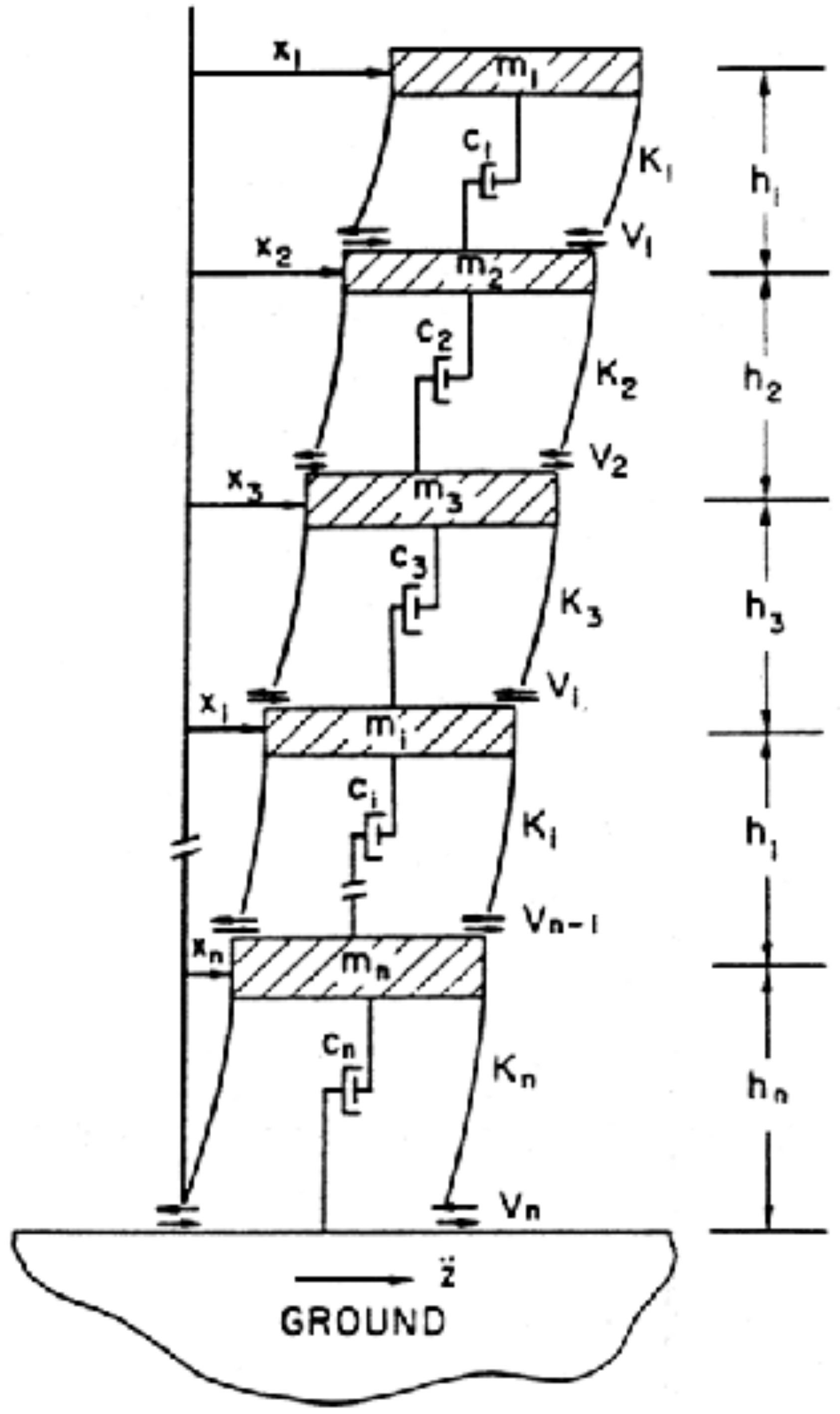
La matrice di rigidezza è singolare, come si vede? cosa implica?
>.. ?
>..?

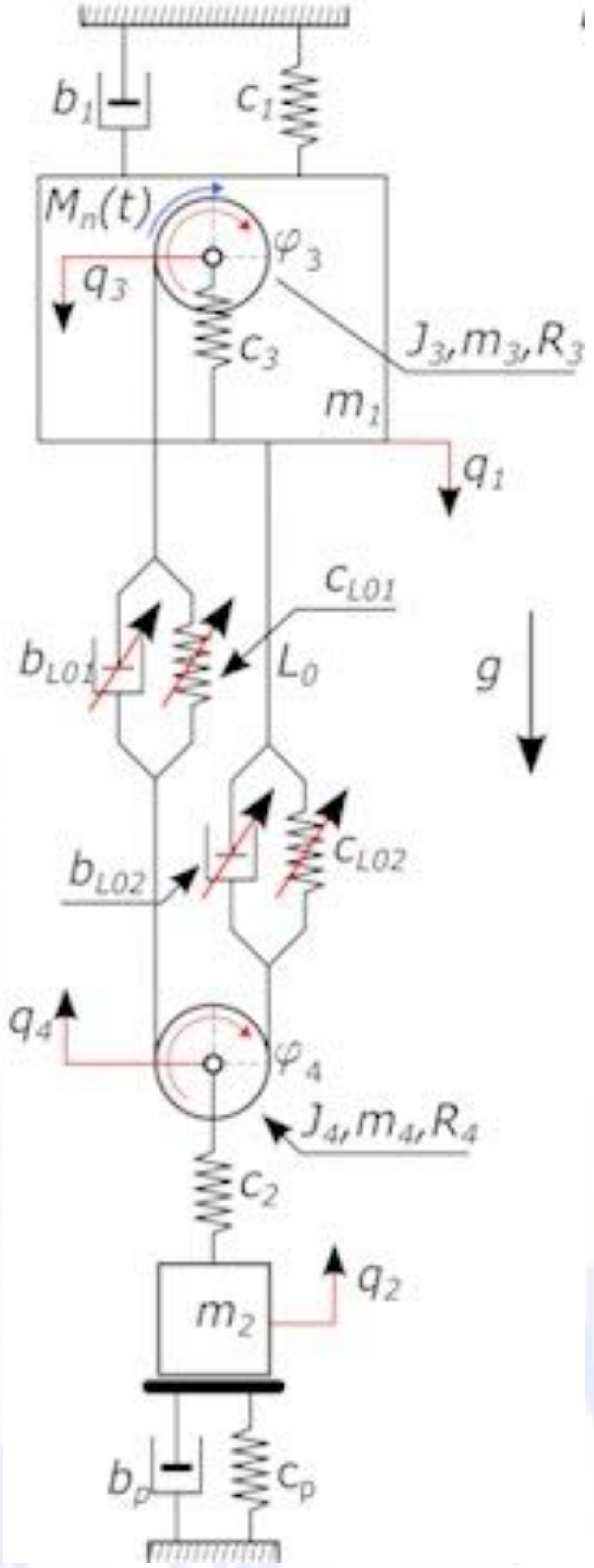
Scrittura equazioni del moto

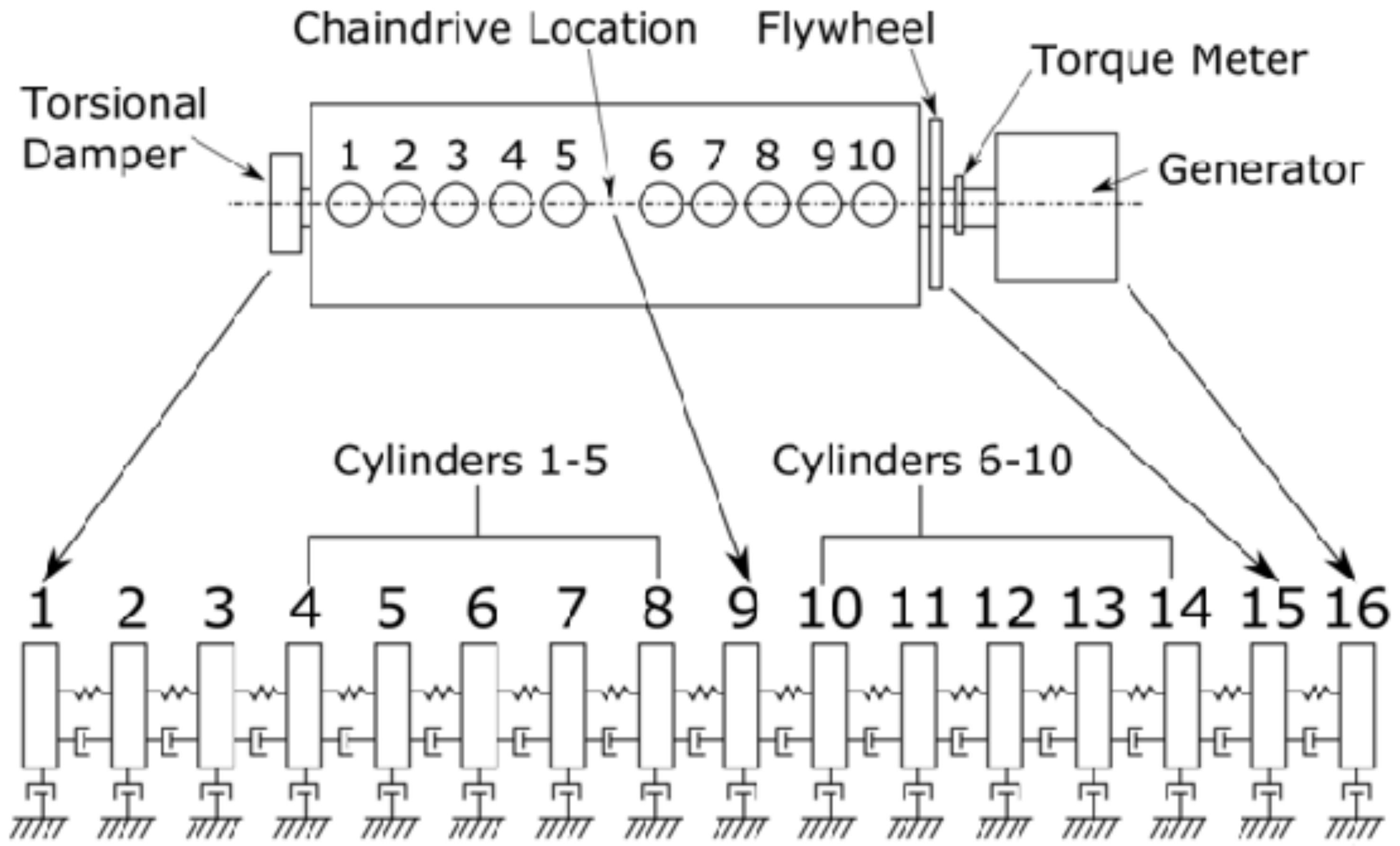
Se i gradi di libertà aumentano, e le equazioni che descrivono le rigidezze e gli smorzamenti si complicano, ma l'approccio generale non cambia!

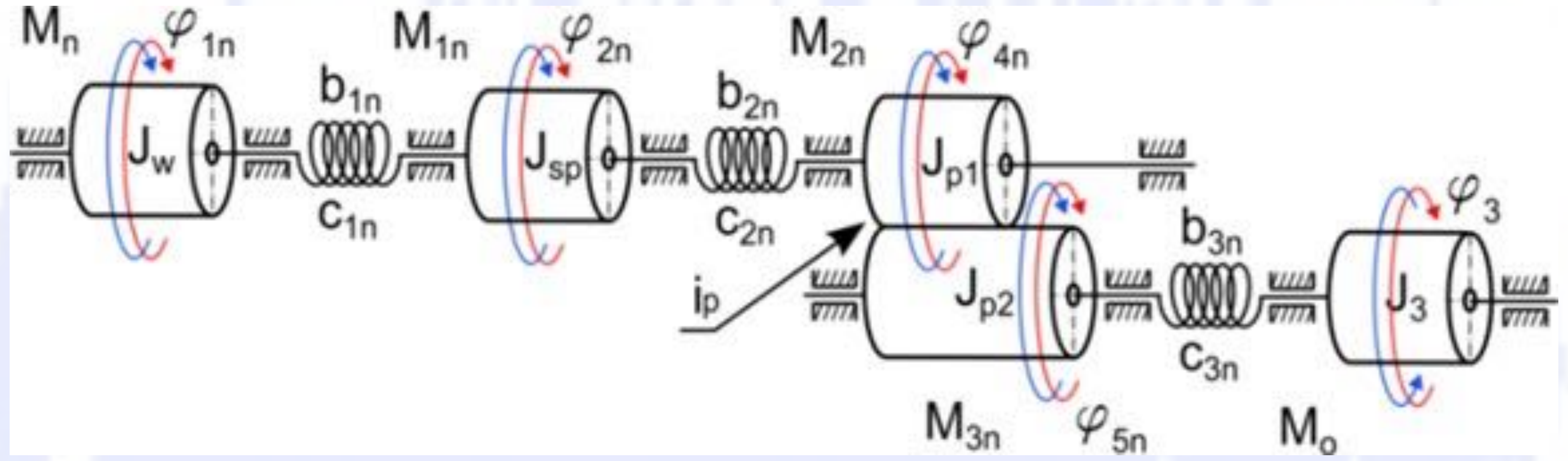
Bisogna fare più attenzione!!

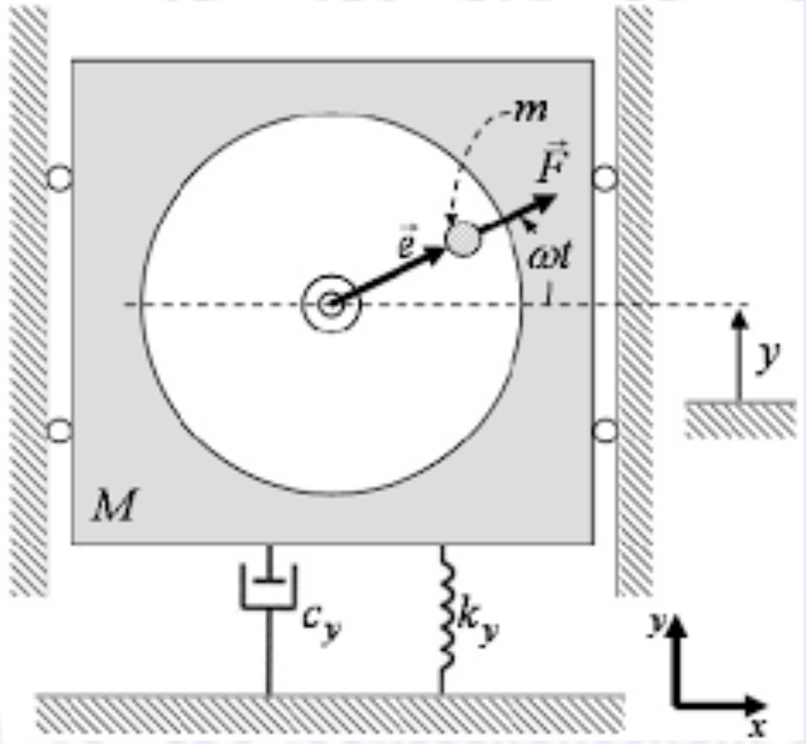


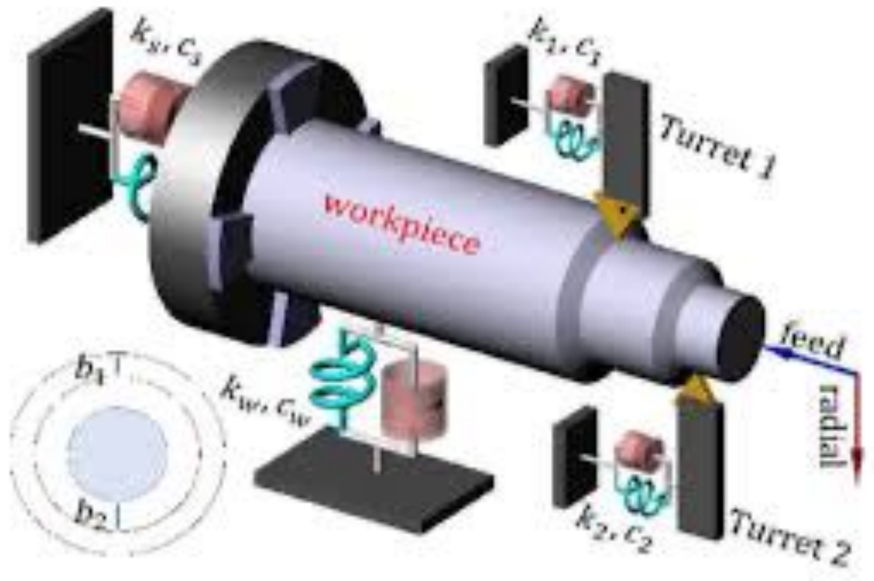


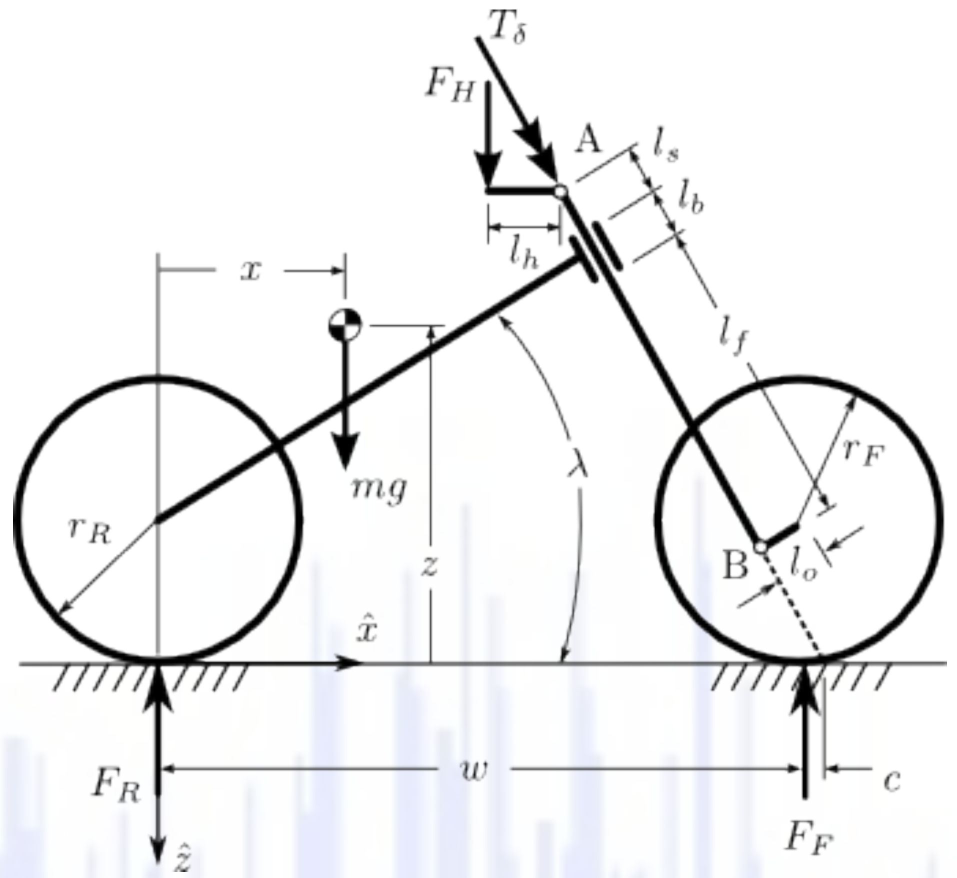












Stesso modello
per sistemi diversi!