meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 2.0
soluzione equazioni del moto

Luigi BREGANT
bregant@units.it

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

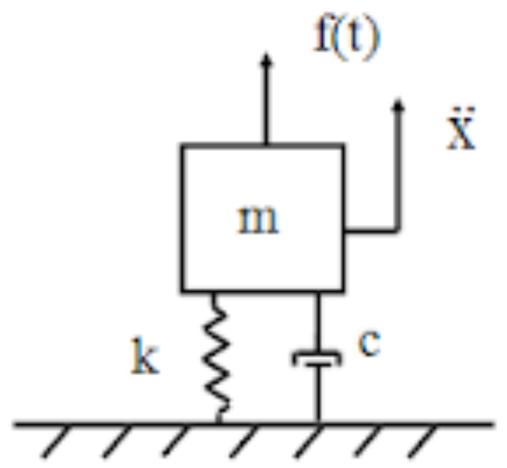
Soluzioni Equazioni del moto - Approcci

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

- Integrazione ODE nel tempo
- Funzione di Trasferimento
- Zeri, Poli e Guadagni
- Rappresentazione Modale
- Stato Spazio

Integrazione ODE nel tempo

Prima di integrare le equazioni differenziali del moto con tecniche numeriche,
si può provare a trovare la soluzione in forma chiusa … (Analisi II)



Ricordando l'equazione del moto .. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f - W$

la soluzione dell'equazione differenziale sarà la combinazione
della soluzione dell'equazione omogenea (..=0) e di quella particolare (..=f(t))
tralasciando solitamente il cedimento statico x_s
concentrando l'attenzione sulle vibrazioni attorno al punto di equilibrio $x_s = \dfrac{W}{k}$

La soluzione dell'equazione omogenea, per un sistema SDOF con le CI è nota:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right) sin\omega_d t\right]$$

Come si arriva alla soluzione, dall'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

si divide l'equazione per m,
(viene comodo avere il colf. della derivata massima unitario)

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c_c = 2\sqrt{km} \qquad \zeta = \frac{c}{c_c} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

con le sostituzioni classiche

si riscrive l'equazione:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$$

Equazione differenziale II ordine a termini costanti, omogenea

Si sostituisce una soluzione di primo tentativo e le sue derivate nell'equazione del moto

$$x = Ce^{st} \qquad \dot{x} = sCe^{st} \qquad \ddot{x} = s^2Ce^{st}$$

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n{}^2\right)\, Ce^{st} = 0$$

Se la soluzione deve valere per ogni istante di tempo t, Ce^{st} non può essere nullo!

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n{}^2\right) = 0$$

servirà trovare i valori di s che annullano l'equazione tra parentesi (equazione secondo grado in s^2)

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 + 4\omega_n^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

da cui la soluzione cercata: $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

con C_1 e C_2 che dipendono dalla condizioni iniziali!

in più con le equazioni di Eulero si torna alla formula

Il sistema SDOF ha 2 soluzioni complesse e coniugate!

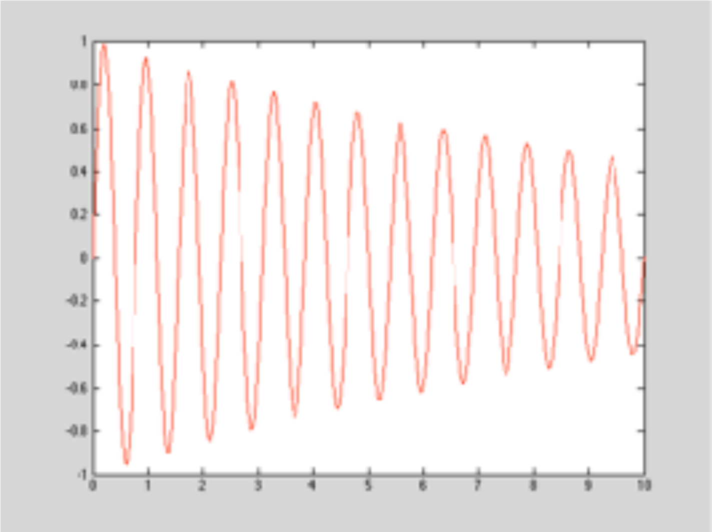
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Riportandole nel piano complesso, la posizione di queste cambia al variare dello smorzamento!

$$0 < \zeta < 1$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

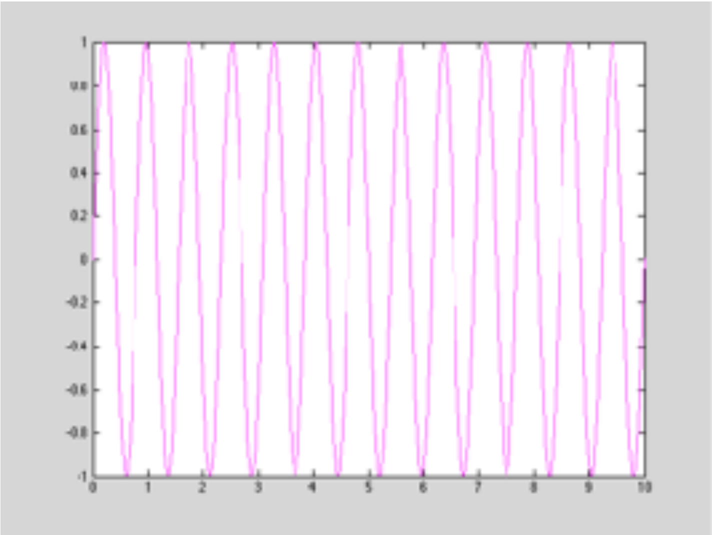
Smorzamento ipocritico



$$\zeta = 0$$

$$s_{1,2} = \pm\,\omega_n$$

Senza smorzamento



$$\zeta = 1$$

$$s = -\zeta\omega_n$$

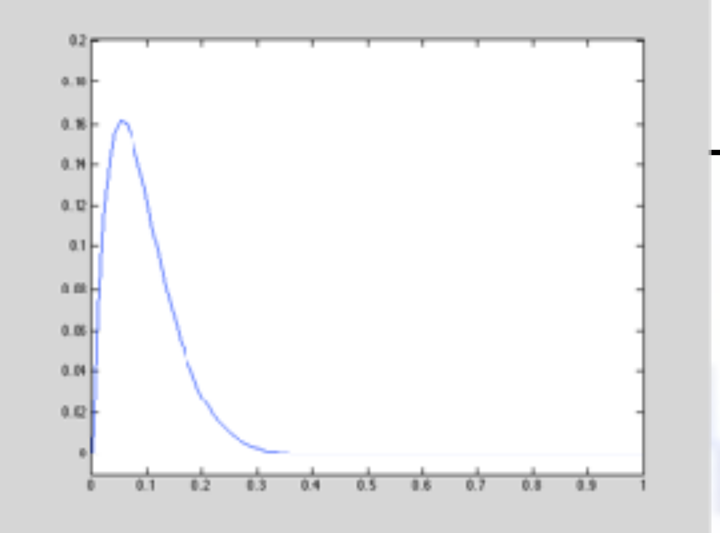
Smorzamento critico

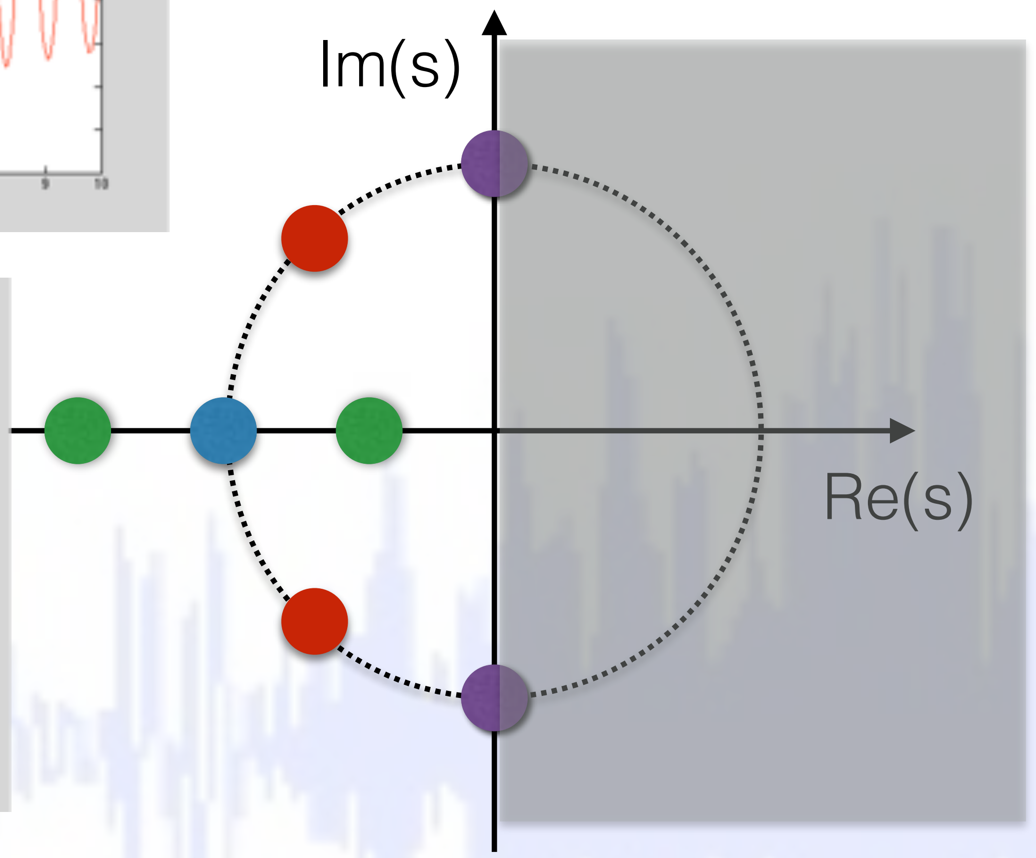
$$\zeta > 1$$

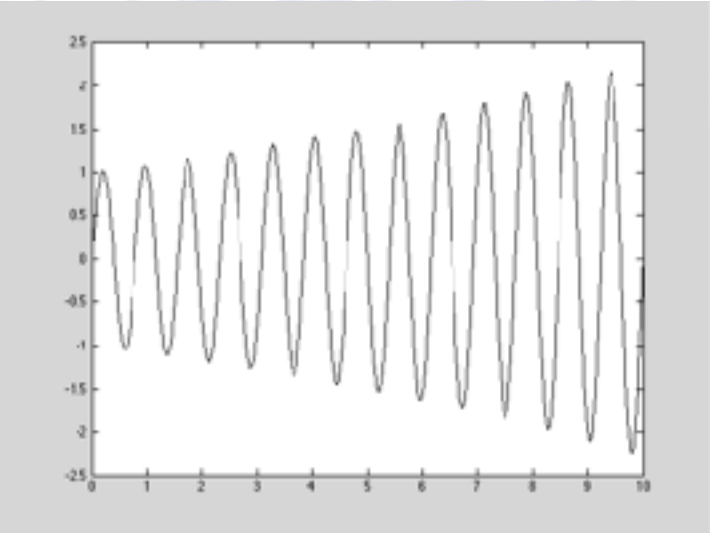
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega^*$$

Smorzamento ipercritico

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1\cosh(\omega^* t) + C_2\sinh(\omega^* t)\right]$$







Soluzioni Stabili

Soluzioni Instabili

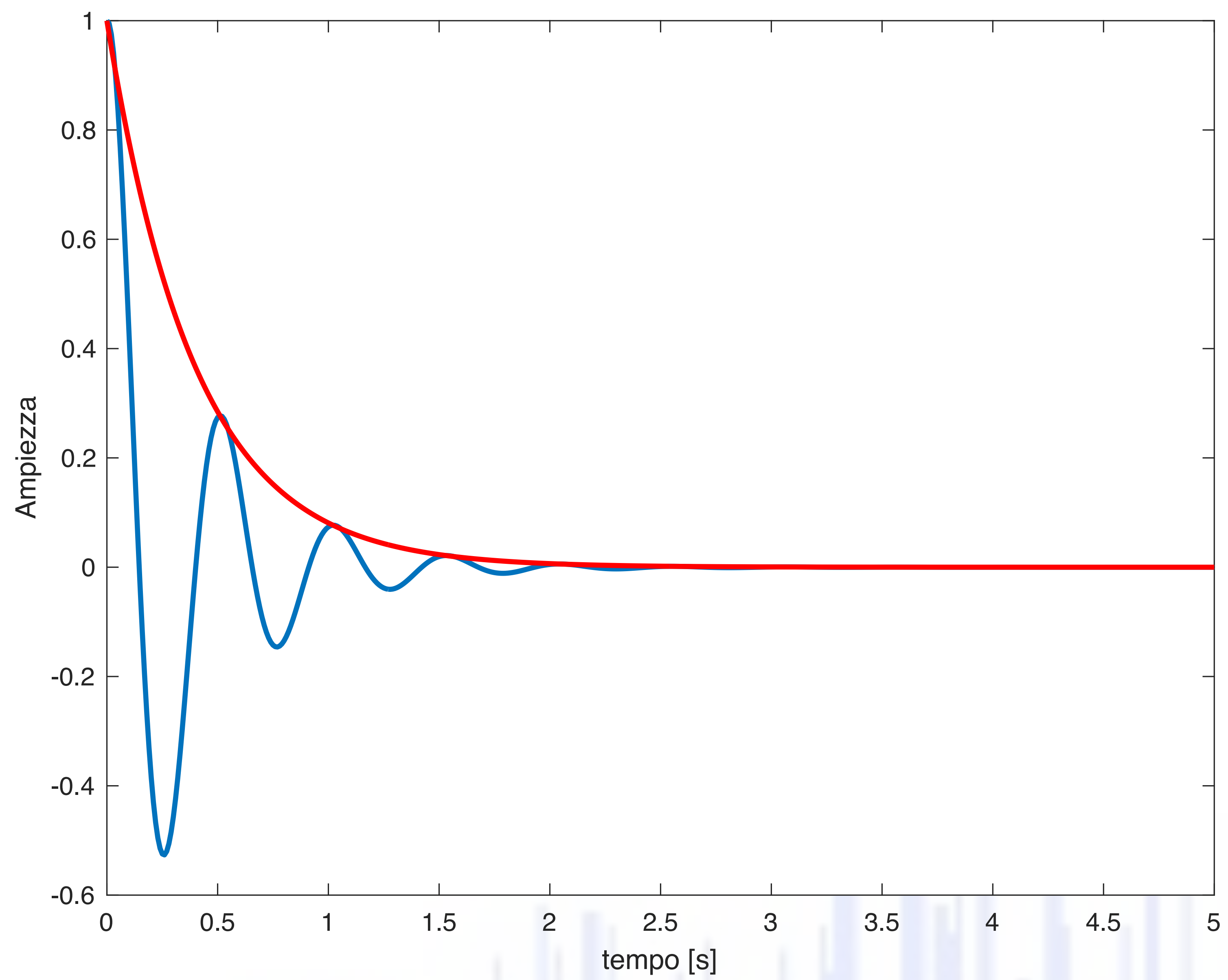
Smorzamento negativo!

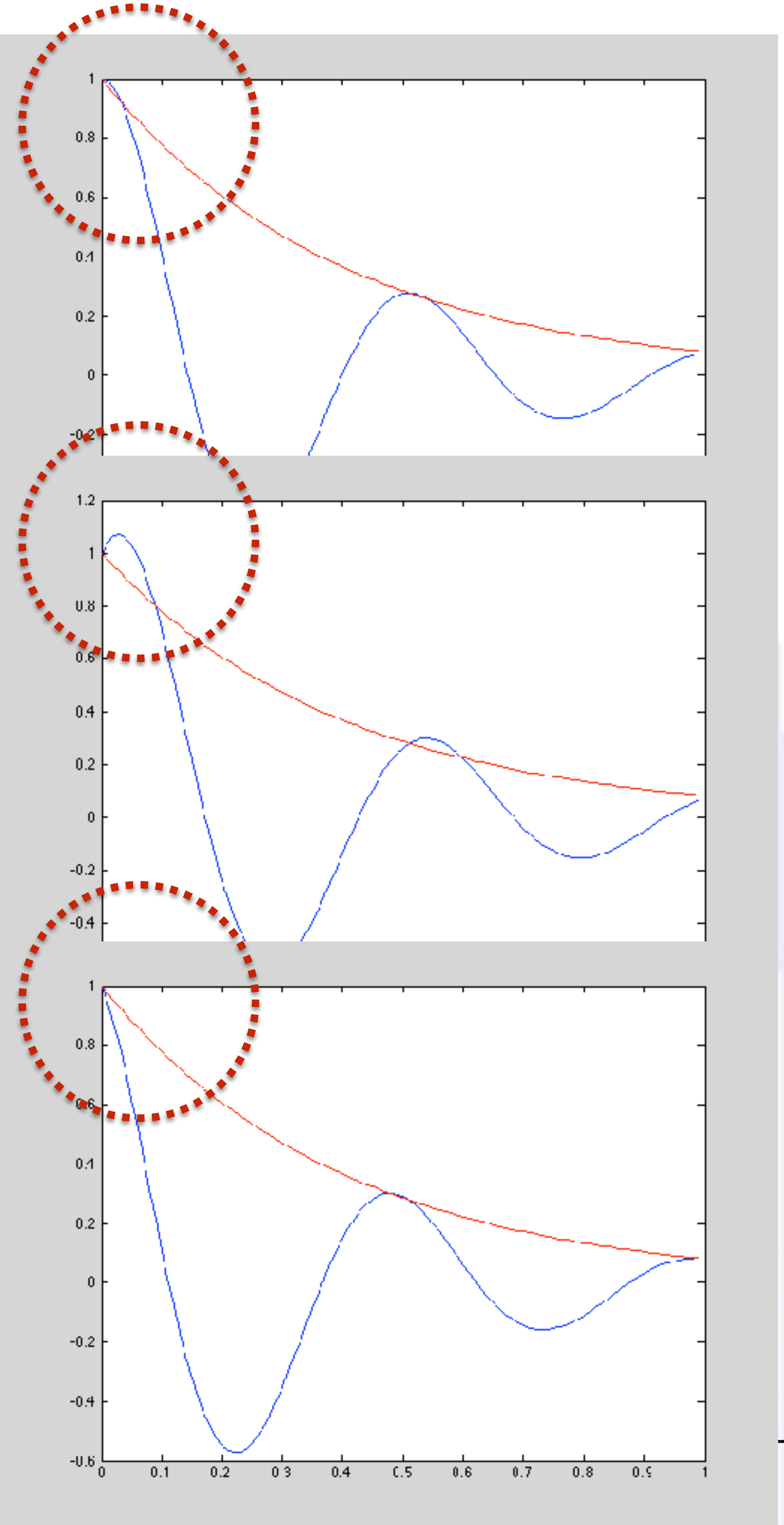
Esempio (C&P in matlab):

Andamento del tempo dello spostamento di un sistema SDOF smorzato con condizioni iniziali [1, .3]

Formula

```
t=0:.01:5;

omegan=2*pi*2;
csi=0.2;
omegad=omegan*sqrt(1-csi^2);

x0=1;
xdot0=.3;

A=x0;
B=(xdot0+csi*omegan*x0)/omegad;

x=exp(-csi*omegan*t).*(A.*cos(omegad*t)+B.*sin(omegad*t));

plot(t,x)
hold

plot(t,exp(-csi*omegan*t),'r')
```

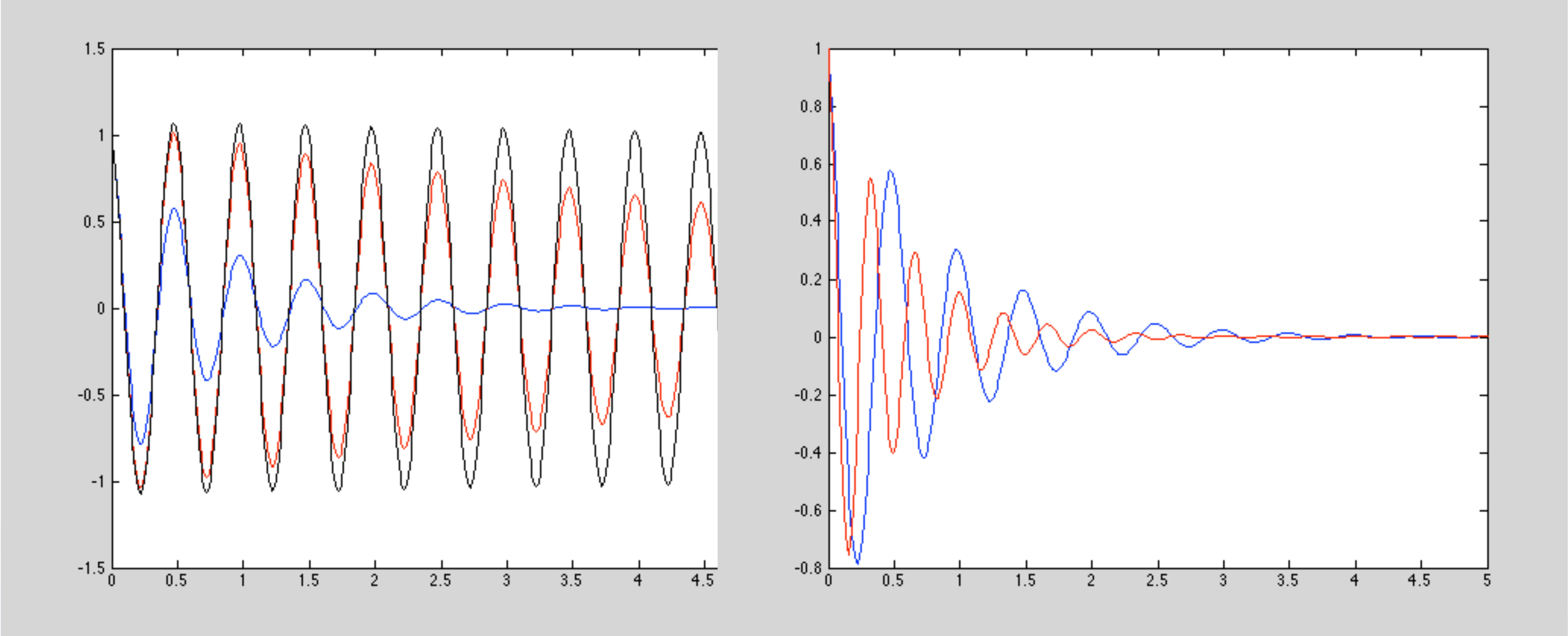




E’ possibile visualizzare facilmente cosa cambia
nella risposta del sistema
variando le condizioni iniziali..

cosa è cambiato nei grafici a sx?
>..

..oppure vedere l’effetto della modifica delle
caratteristiche del sistema (m,c,k)…



come variare la pulsazione naturale?
>..

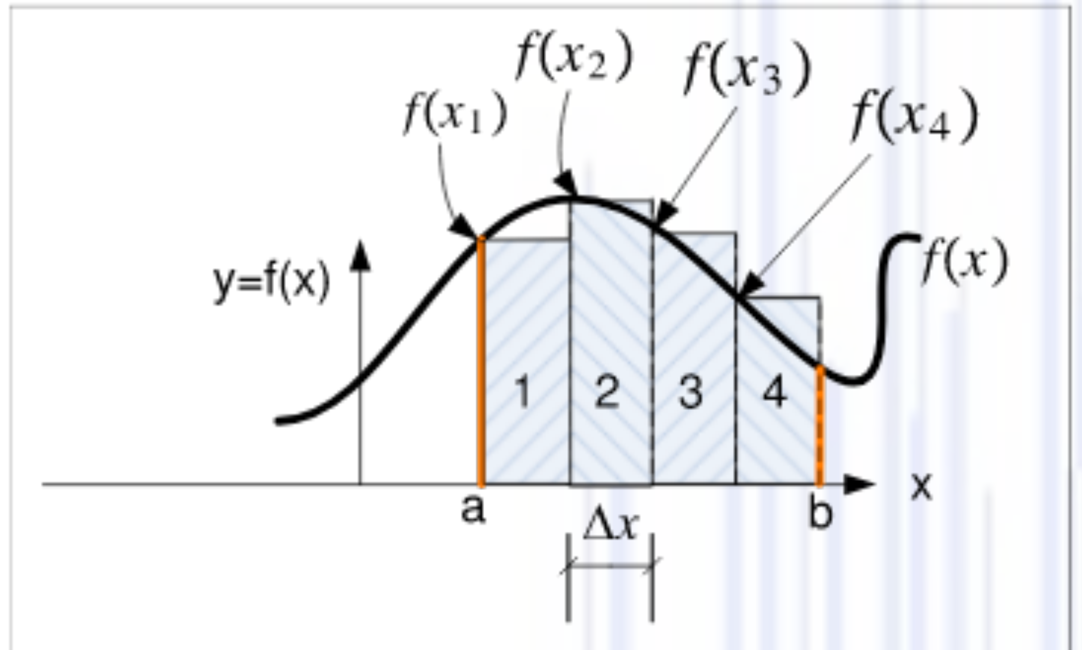
ed il decadimento?
>..

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Se non è possibile calcolare la soluzione in forma chiusa (o non esiste?), cosa fare?

E' possibile trovare una soluzione APPROSSIMATA in maniera numerica!

La soluzione è approssimata perché dipende dal metodo di integrazione (es. Newton-Cotes, Gauss..) e dall'intervallo di integrazione utilizzato (più rapide sono le variazioni della risposta più breve dovrà essere l'intervallo! di simulazione)



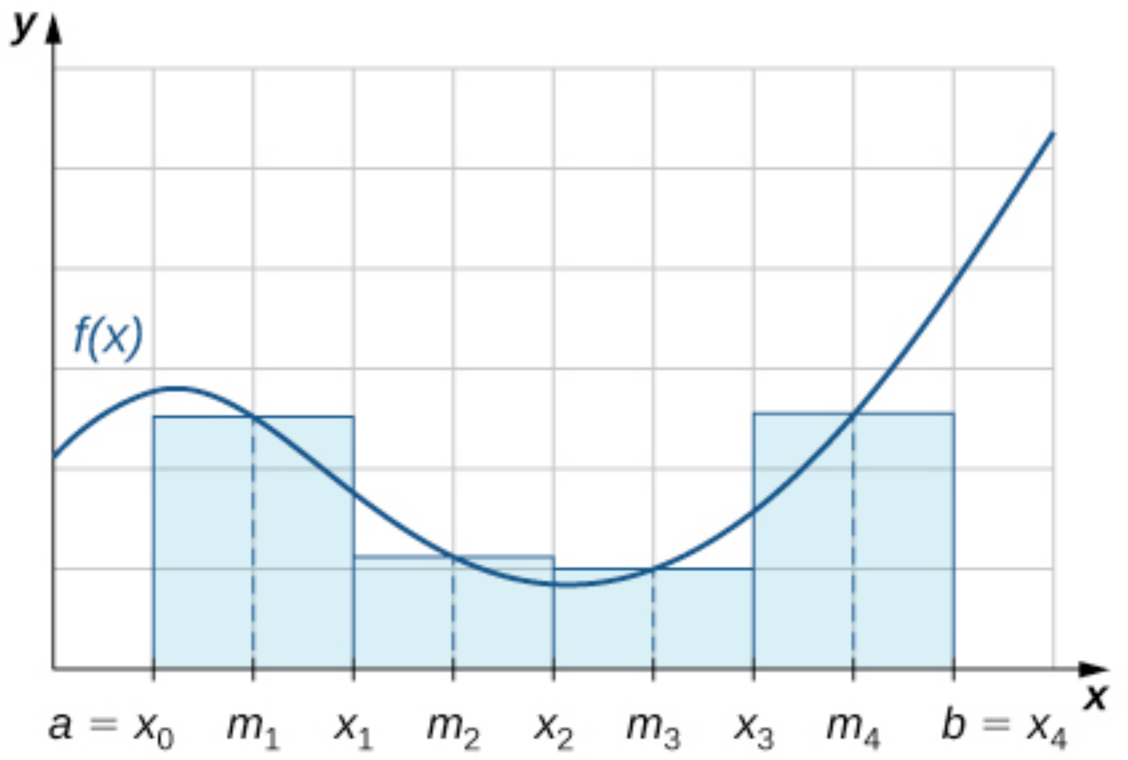
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{4} \Delta x\, f(x_i)$$

Solver	Problem Type	Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. ode45 should be the first solver you try.
ode23		Low	ode23 can be more efficient than ode45 at problems with crude tolerances, or in the presence of moderate stiffness.
ode113		Low to High	ode113 can be more efficient than ode45 at problems with stringent error tolerances, or when the ODE function is expensive to evaluate.
ode15s	Stiff	Low to Medium	Try ode15s when ode45 fails or is inefficient and you suspect that the problem is stiff. Also use ode15s when solving differential algebraic equations (DAEs).
ode23s		Low	ode23s can be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances. It can solve some stiff problems for which ode15s is not effective. ode23s computes the Jacobian in each step, so it is beneficial to provide the Jacobian via odeset to maximize efficiency and accuracy. If there is a mass matrix, it must be constant.
ode23t		Low	Use ode23t if the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping. ode23t can solve differential algebraic equations (DAEs).
ode23tb		Low	Like ode23s, the ode23tb solver might be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances.
ode15i	Fully implicit	Low	Use ode15i for fully implicit problems $f(t,y,y') = 0$ and for differential algebraic equations (DAEs) of index 1.

Da Matlab Documentation>
Numerical Integration and Differential Equations>
Ordinary Differential Equations >
Chose an ODE solver

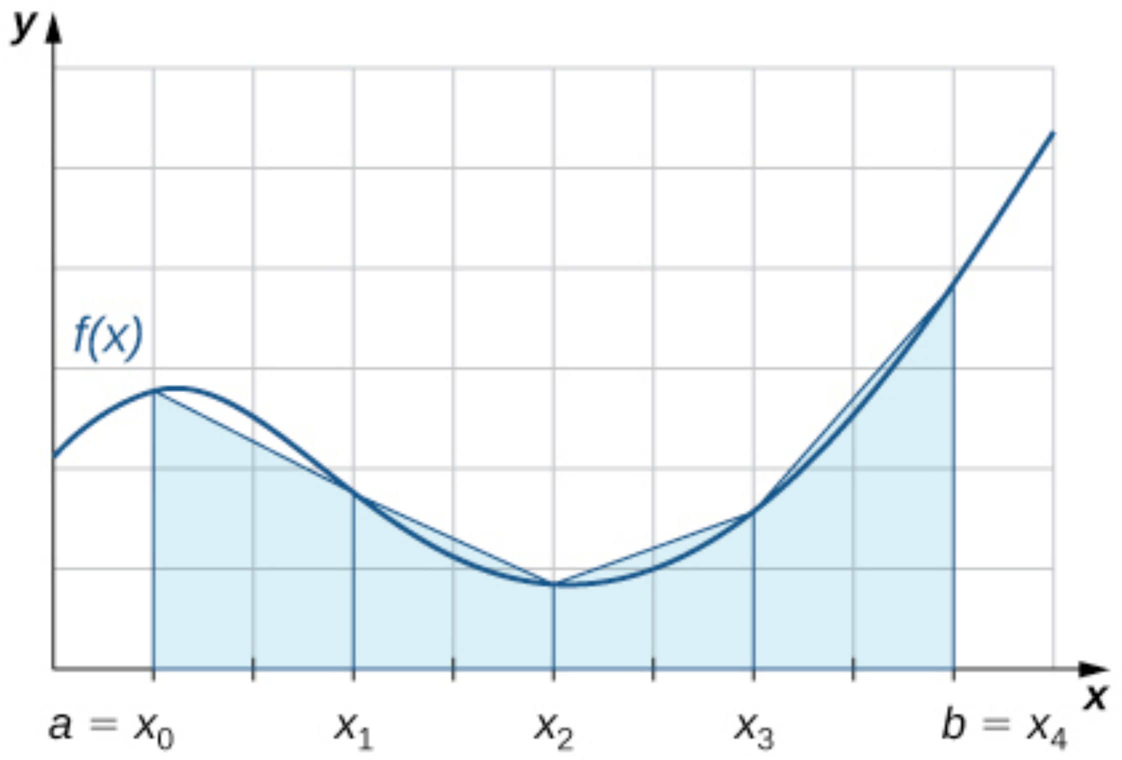
https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_2200%3A_Calculus_for_Scientists_II/2%3A_Techniques_of_Integration/2.5%3A_Numerical_Integration_-_Midpoint%2C_Trapezoid%2C_Simpson%27s_rule

Esistono diverse tecniche per integrazione una funzione
Ad esempio si può utilizzare il metodo..

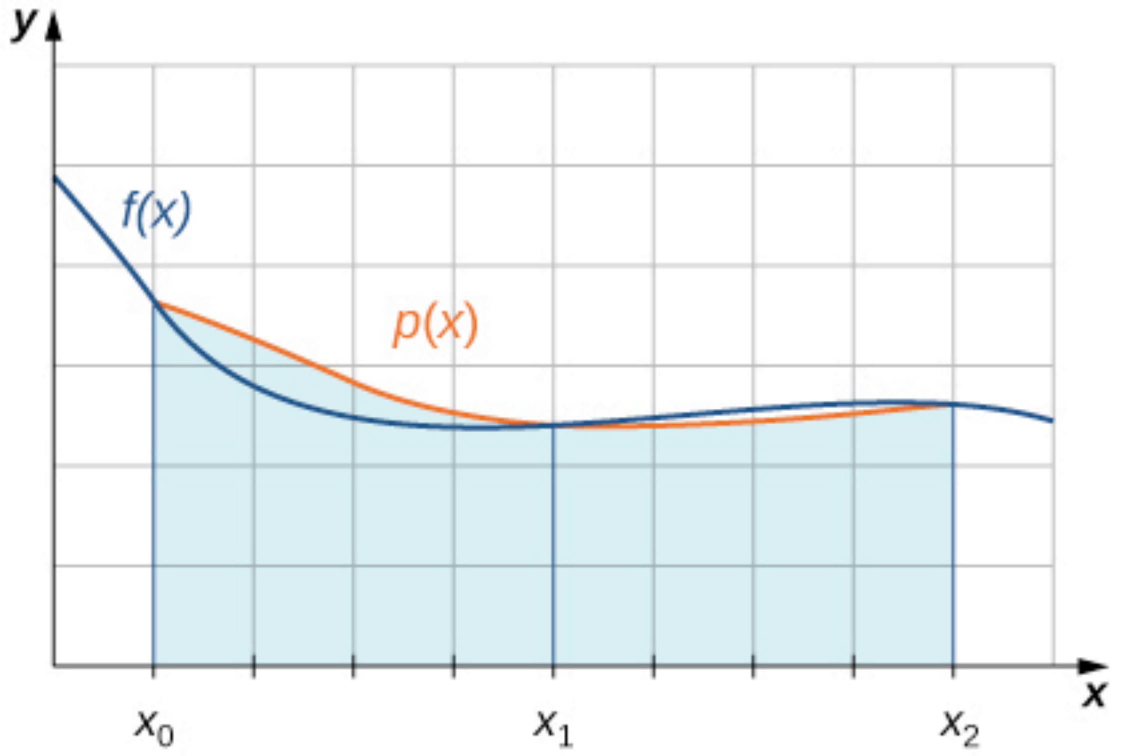


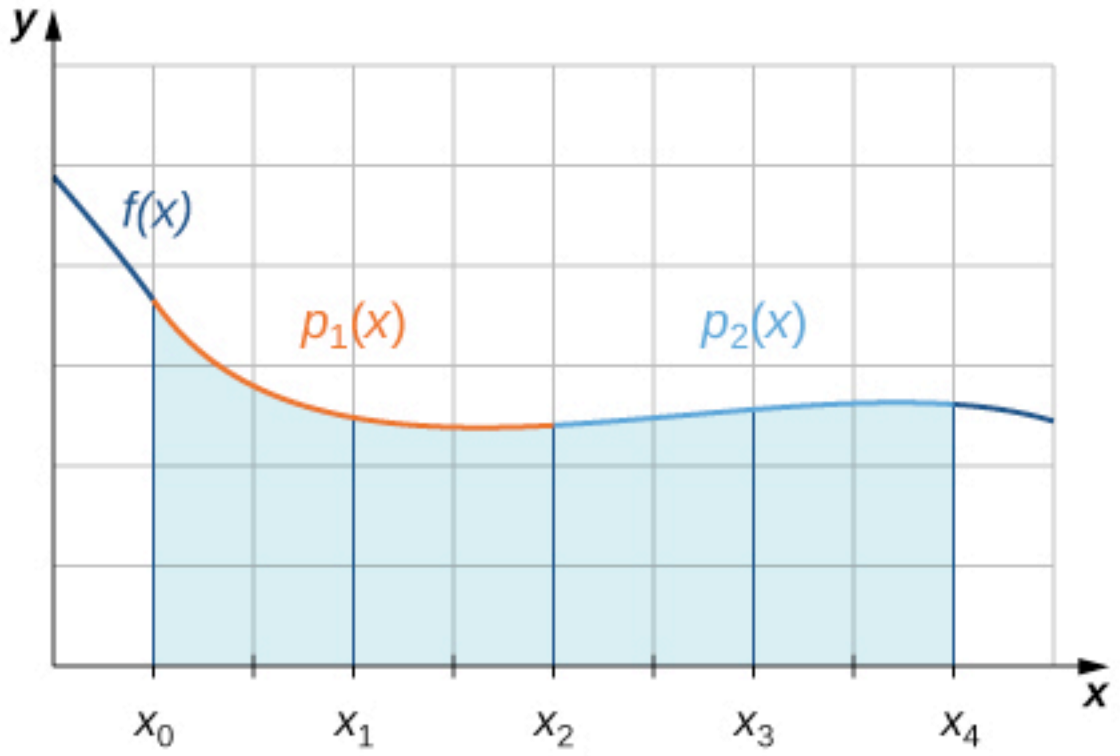
..del punto centrale

..con diversa precisione del risultato finale
e diverso costo computazionale!



..dei trapezi





..di Simpson

Vediamo come si procede in Matlab (o similmente in python…)

Serve:
1 definire la funzione da integrare
2 definire il metodo di integrazione (e le sue eventuali opzioni)
3 definire le condizioni al contorno, il tempo di integrazione e l'intervallo tra i campioni

Si voglia integrare l'equazione non lineare del pendolo: $$mL^2\ddot{\theta} + mgLsin\theta = 0$$

Si isola il termine con la derivata massima

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}sin\theta = -\omega^2 sin\theta$$

Si effettua un' opportuna sostituzione di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \dot{\theta} = \dot{y}_1 \end{cases}$$

grazie alla quale si riscrive

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 sin(y_1) \end{cases}$$

La funzione da integrare viene salvata in file: (pendolo.m)

```
function dydt=pendolo(t,y)
omega=2;
dydt=[y(2); -omega^2*sin(y(1))]
```

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 sin(y_1) \end{cases}$$

NB conviene definire qui il rapporto g/L=ω^2

Definita la tecnica d'integrazione,
le condizioni al contorno, intervallo di integrazione

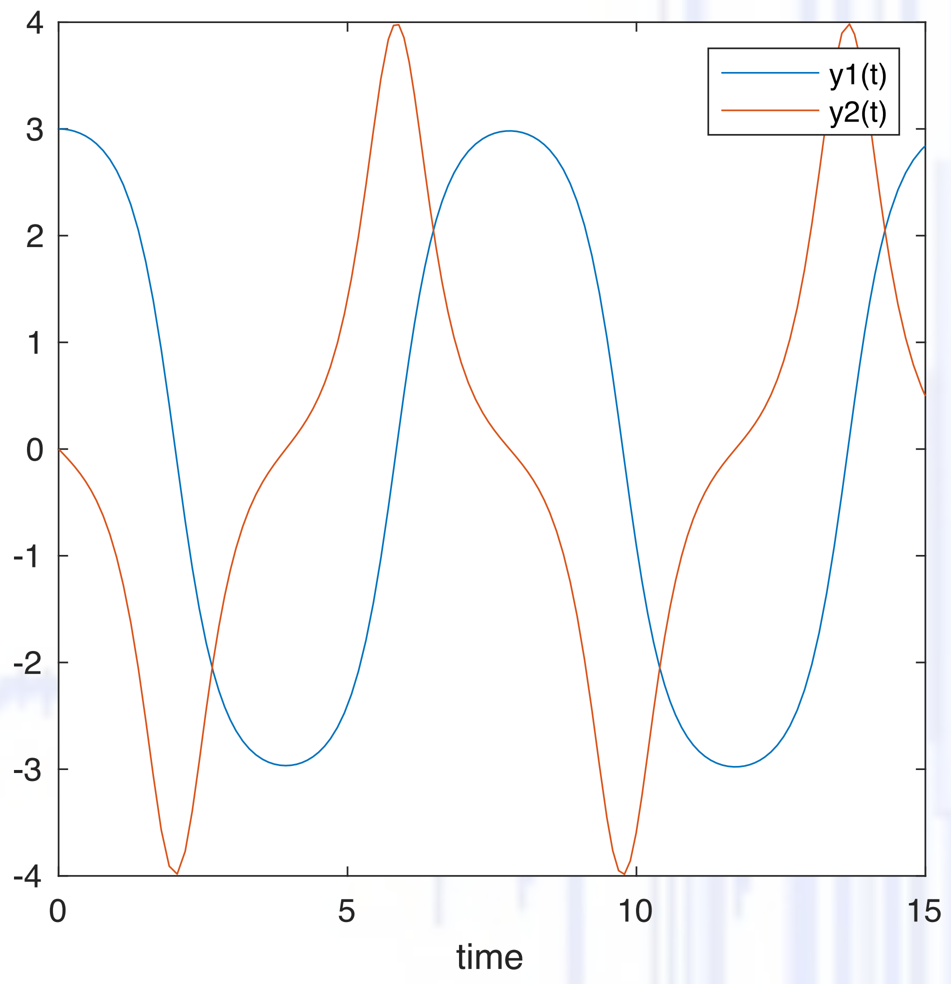
```
ode45
y0=[3 0];      tspan=[0 15];
```

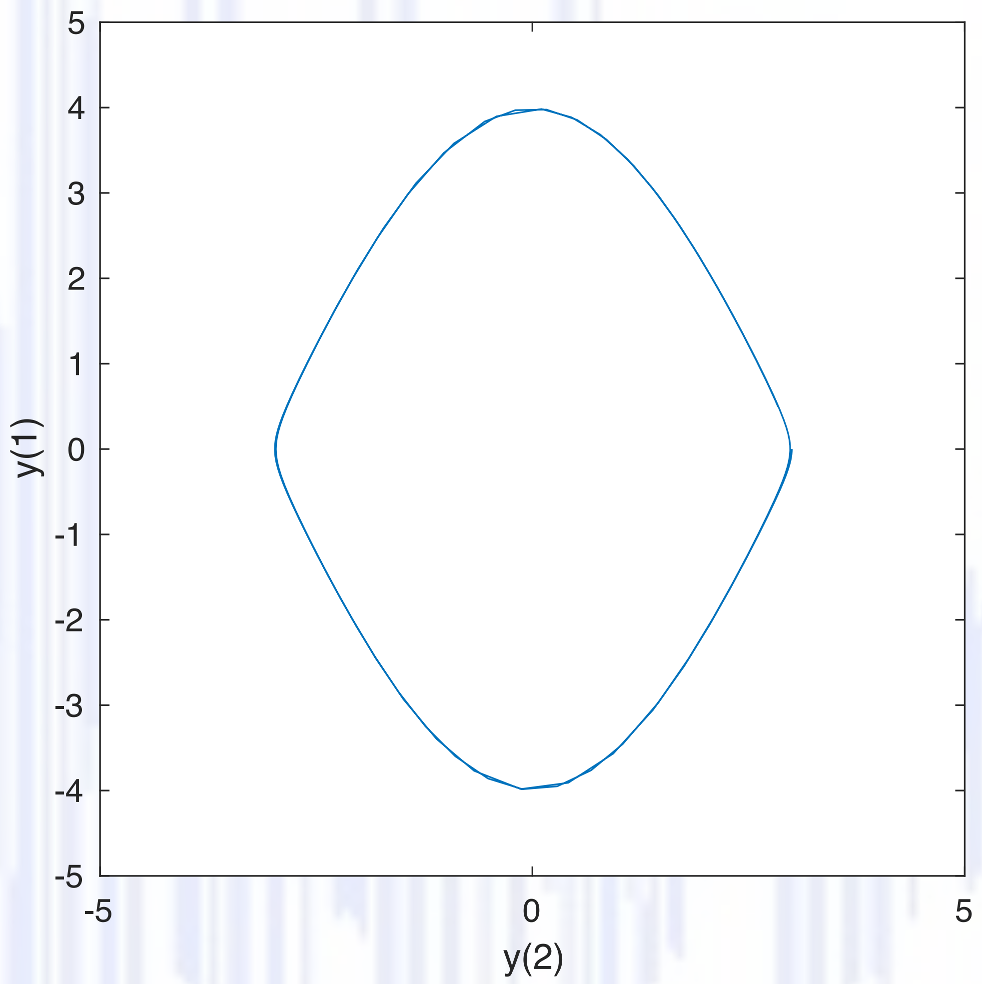
NB l'intervallo è definito nelle
opzioni della tecnica di integrazione scelta

Si integra la soluzione, e si plotta il risultato:

```
[t,y] = ode45(@pendolo,tspan,y0)
```

NB y è un vettore di 2
colonne, spostamento e velocità






```
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),t,y(:,2));
xlabel('time'); legend('y1(t)','y2(t)');

subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2));
axis([-5 5 -5 5]); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)');
```

Una scrittura con più opzioni di integrazione potrebbe essere (con gli stessi risultati):

```
omega = 2;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                    -omega.^2*sin(y(1))];

odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001, 'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

[t,y] = ode45(dy_dt,[0 15], [3 0],odeopt);
```

E’ immediato riutilizzare la struttura appena realizzata per vedere la soluzione nel caso linearizzato

```
omega = 2;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                    -omega.^2*y(1)];

odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001, 'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

[t,y] = ode45(dy_dt,[0 15], [3 0],odeopt);
```

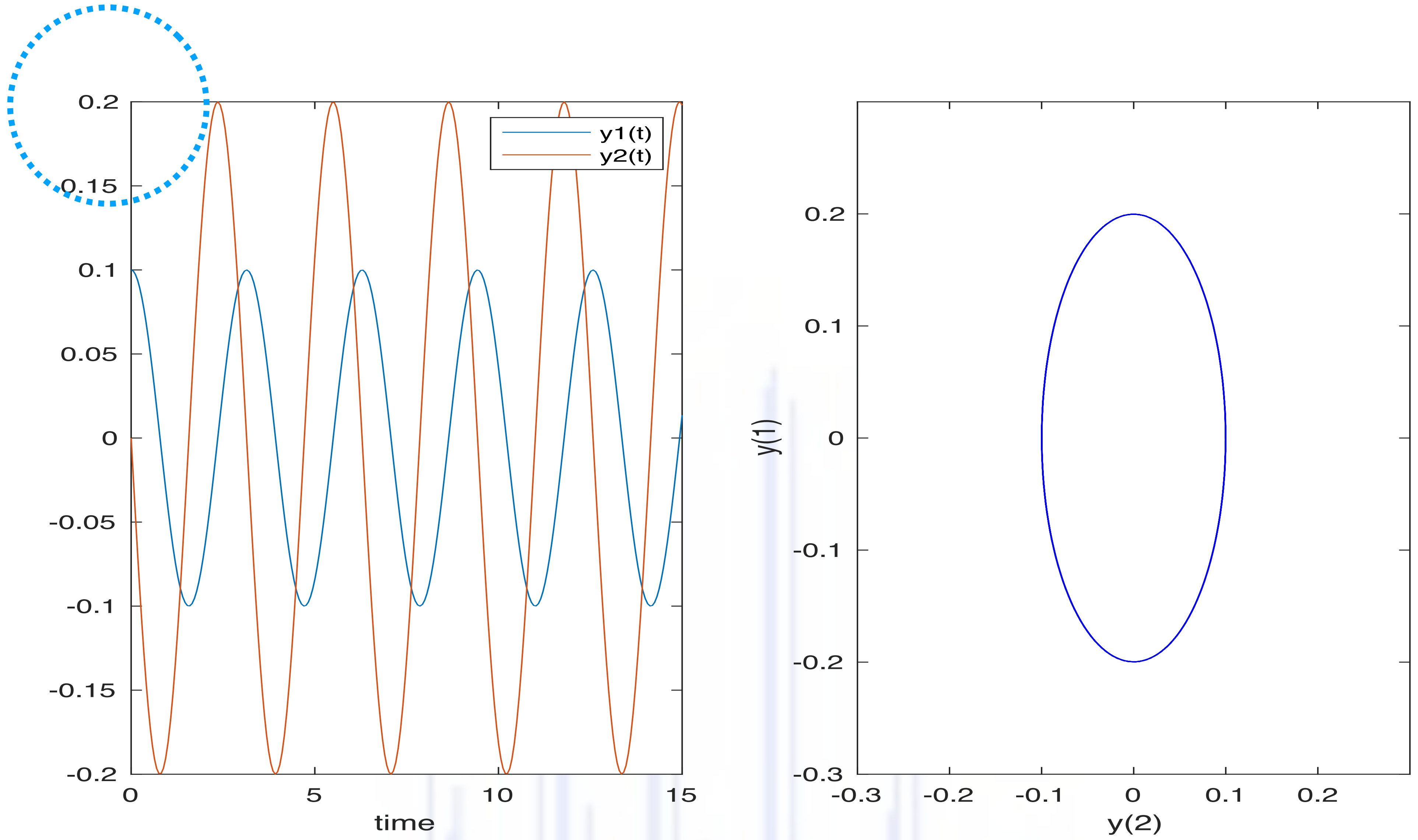
..plottando i risultati si può studiare l’effetto che fa!

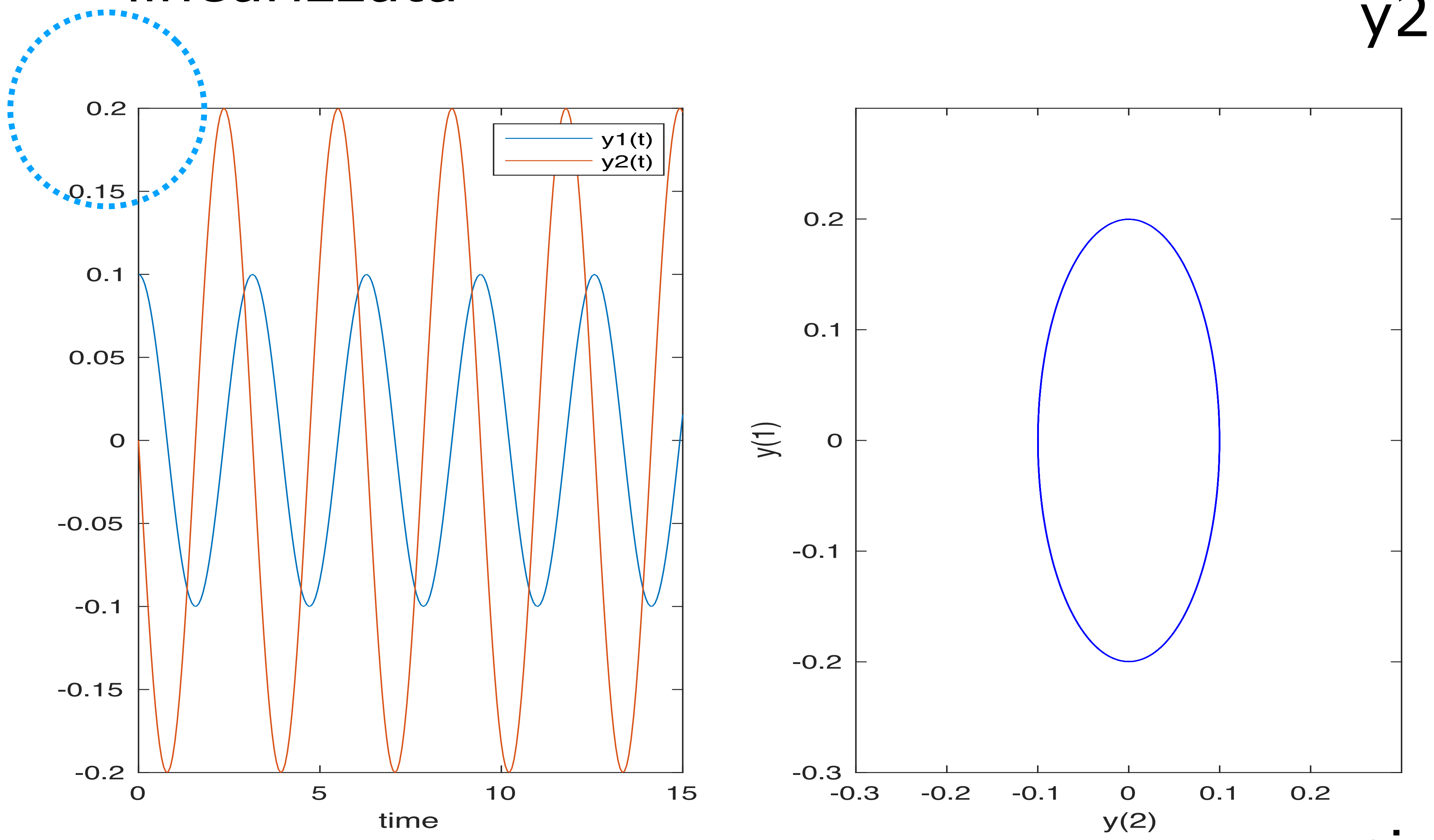
y1(t) spostamento
y2(t) velocità

non lineare

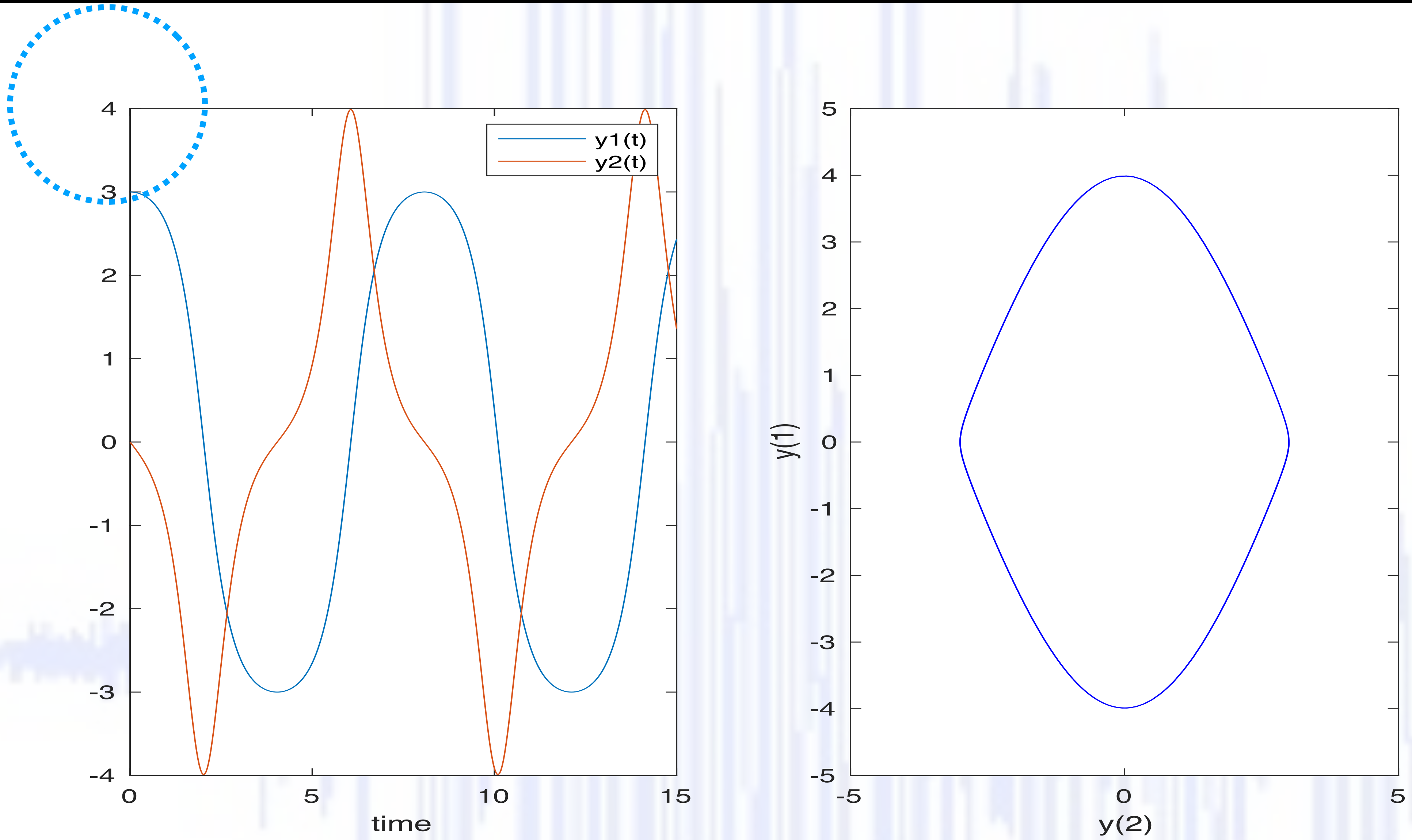
linearizzata

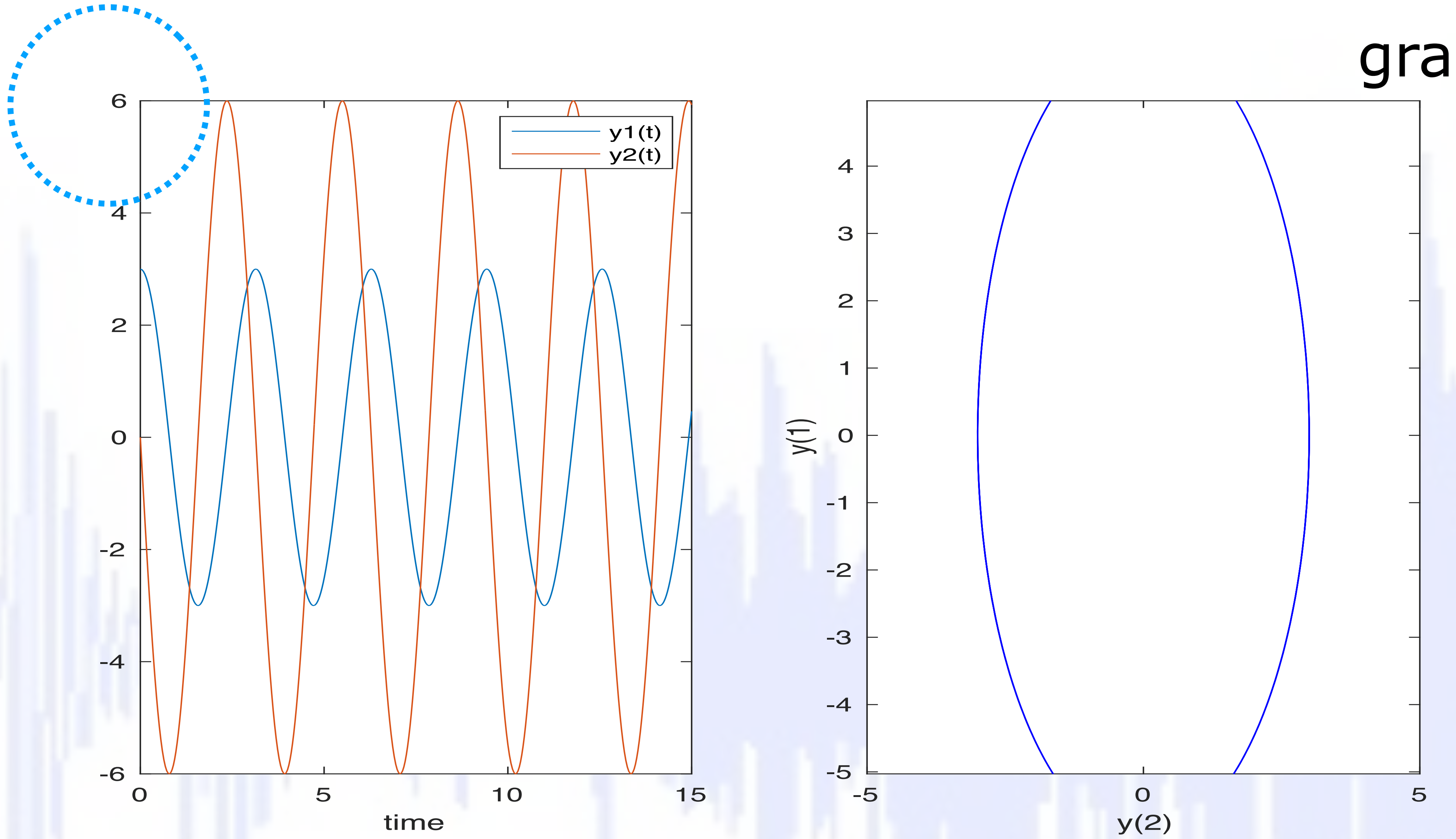
piccoli spostamenti





grandi spostamenti





Con la stessa procedura si possono integrare tutte le equazioni differenziali del caso..

sistema SDOF non smorzato libero

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema SDOF smorzato libero

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema SDOF smorzato forzato

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Fo}{m}sin(\omega t) \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 + \frac{F_o}{m}sin\omega t \end{cases}$$

sistema MDOF smorzato forzato

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_1x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = F_0 sin\omega t \end{cases}$$

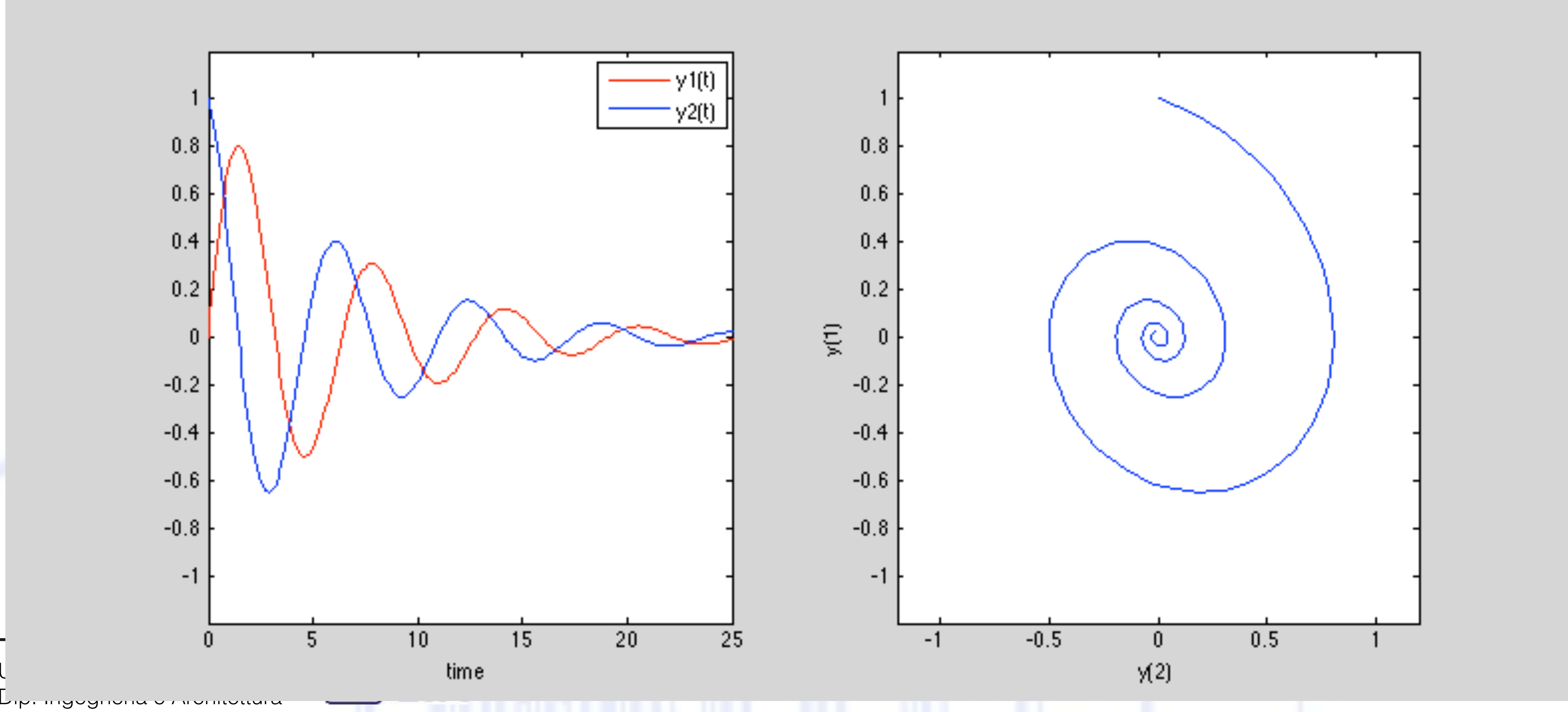
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c}{m_1}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) - \frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 - \frac{k_1}{m_1}y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -\frac{c}{m_2}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - \frac{k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \frac{F_0}{m_2}sin\omega t \end{cases}$$

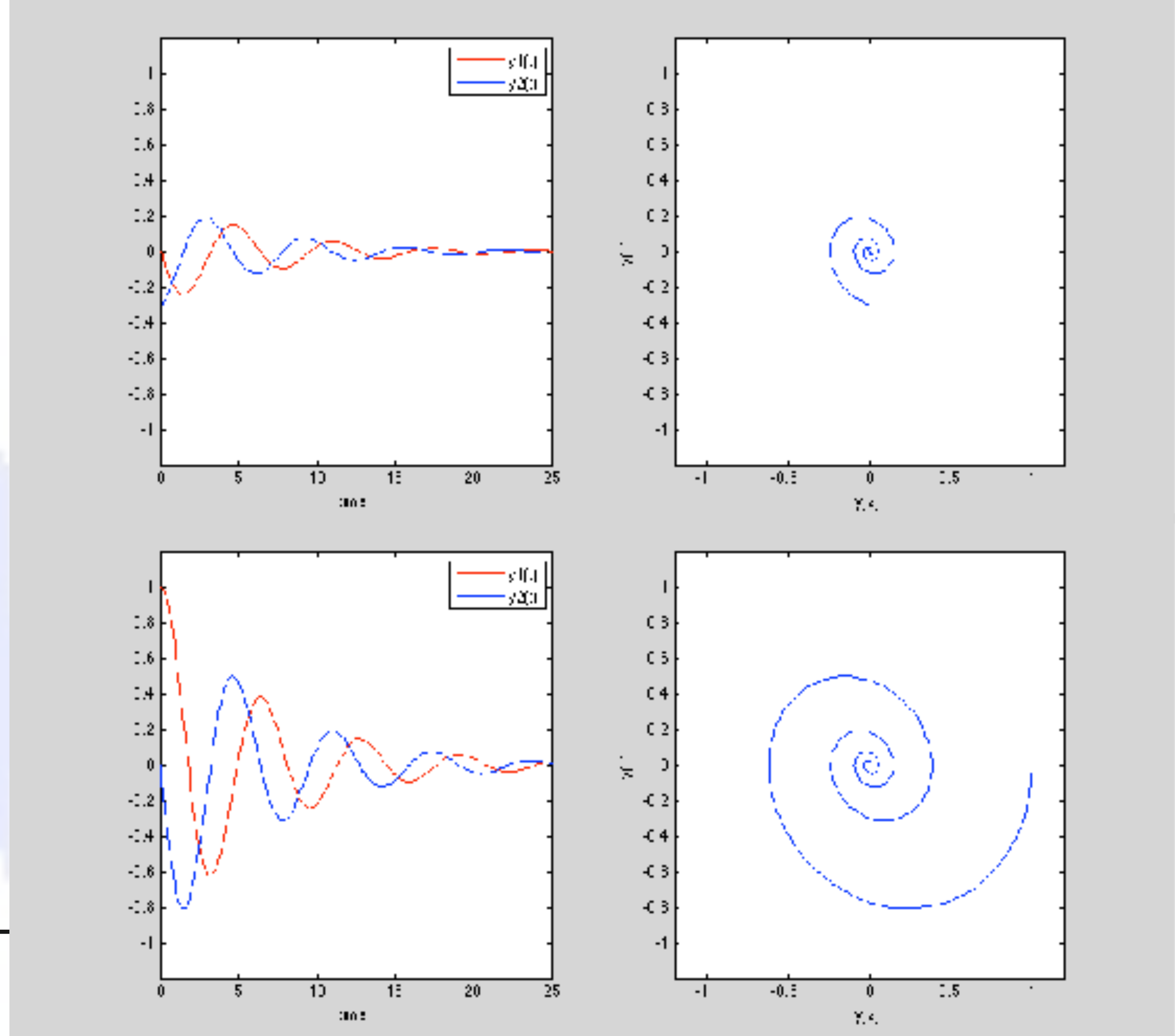
Esempio

Sistema SDOF, smorzato, libero, con CI diverse da 0

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                 -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) ];
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 25], [0.0 1.0],odeopt);

subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');
xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-');
xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```

.. cambiando le CI..

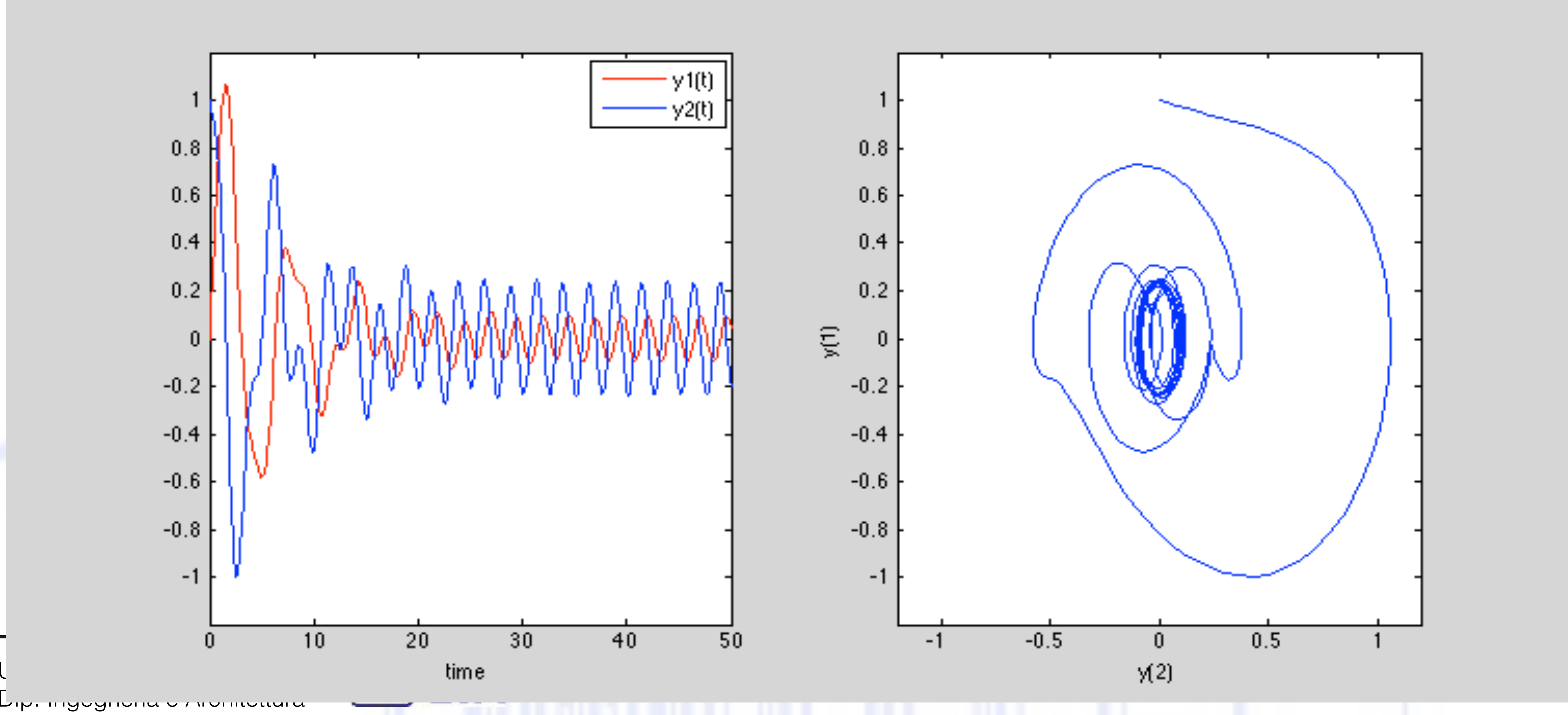




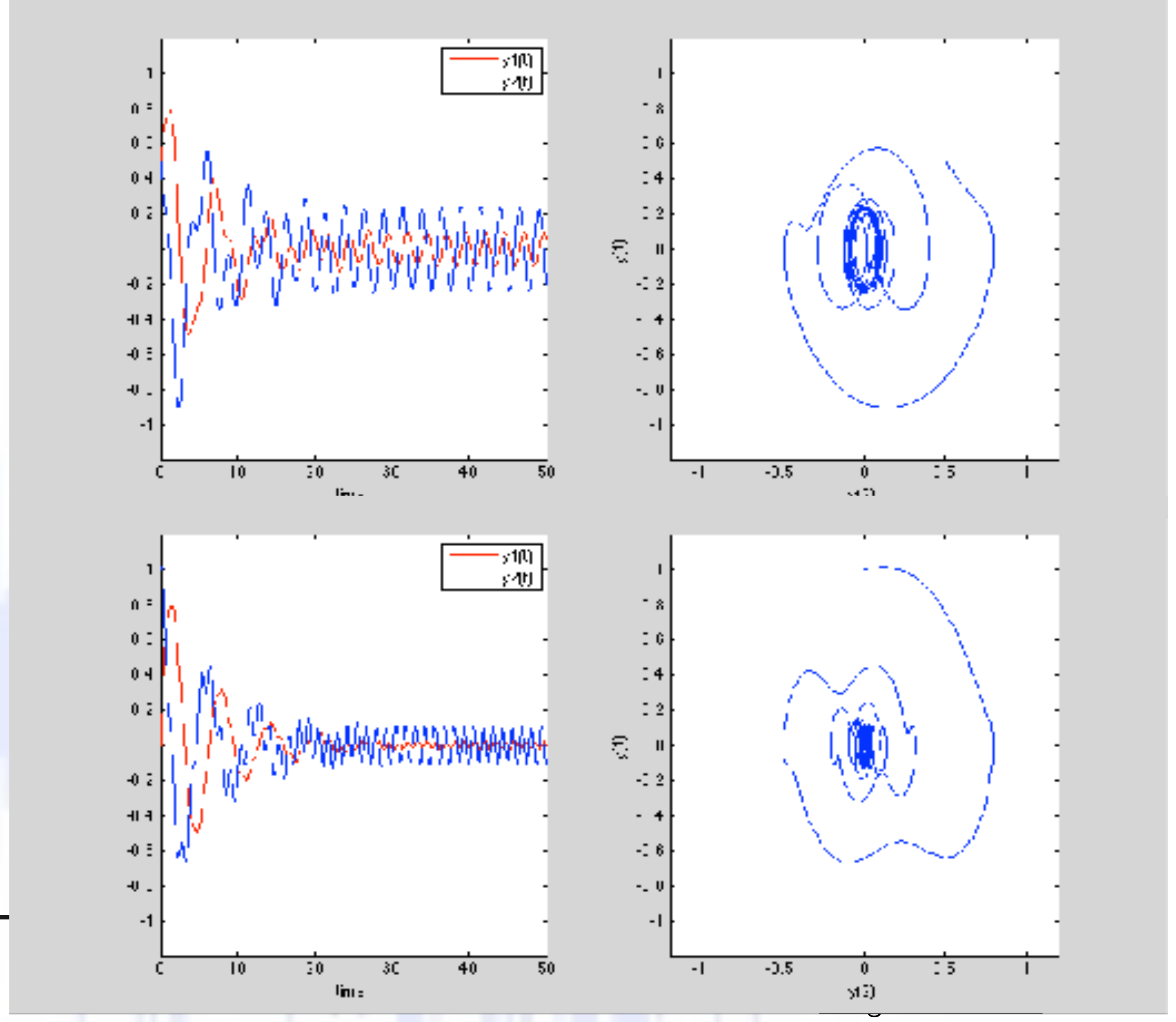
Esempio

Sistema SDOF, smorzato, con forzante armonica, con CI diverse da 0

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
F0 = 0.5; w = 2.5;
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) + (F0/m) * sin(w*t)];
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 50], [0.0 1.0],odeopt);

subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');
xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-');
xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```



.. cambiando le CI..



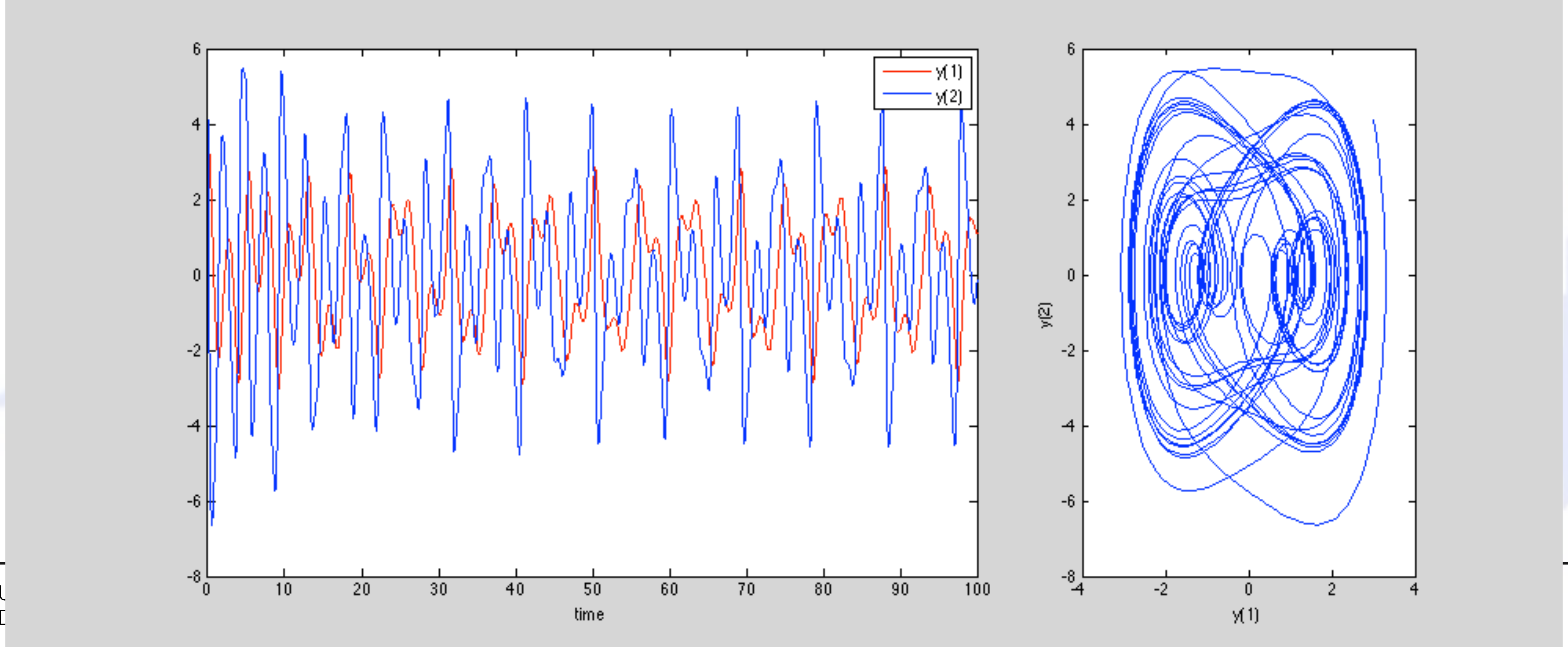
Esempio

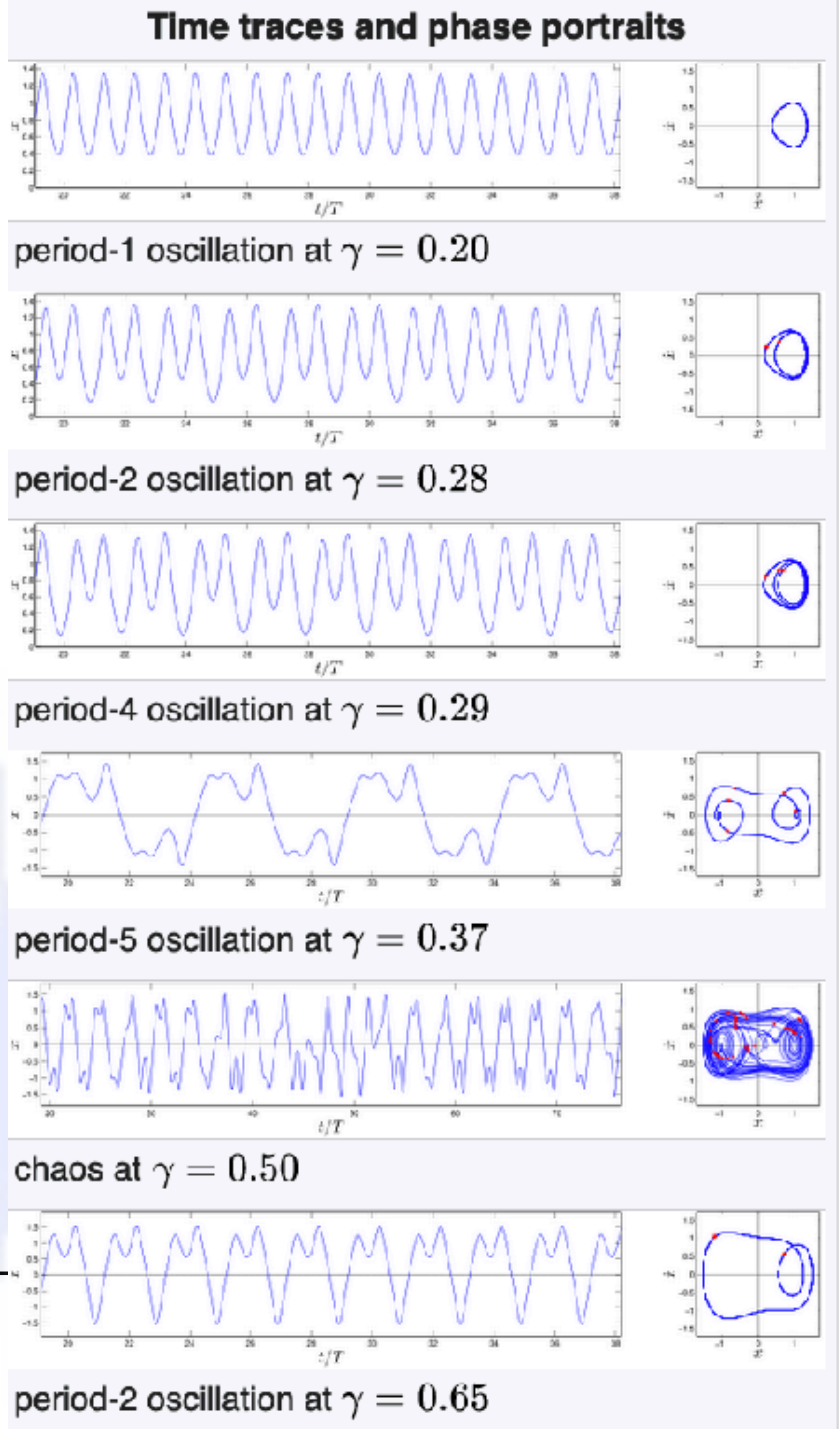
Oscillatore di Duffing, con forzante e CI diverse da 0

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\left(\beta x^3+\omega_0^2 x\right)=\gamma\cos(\omega t+\phi)$$

NB non lineare

```
delta = 0.06; beta = 1.0;
w0 = 1.0; w = 1.0; gamma = 6.0; phi = 0;
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -delta*y(2)-(beta*y(1)^3 + w0^2*y(1))+gamma*cos(w*t+phi)];
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 100], [3.0 4.1],odeopt);

subplot(1,3,[1 2]);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');
xlabel('time'); legend('y(1)','y(2)');
subplot(1,3,3);plot(y(:,1),y(:,2));
xlabel('y(1)'); ylabel('y(2)');
```

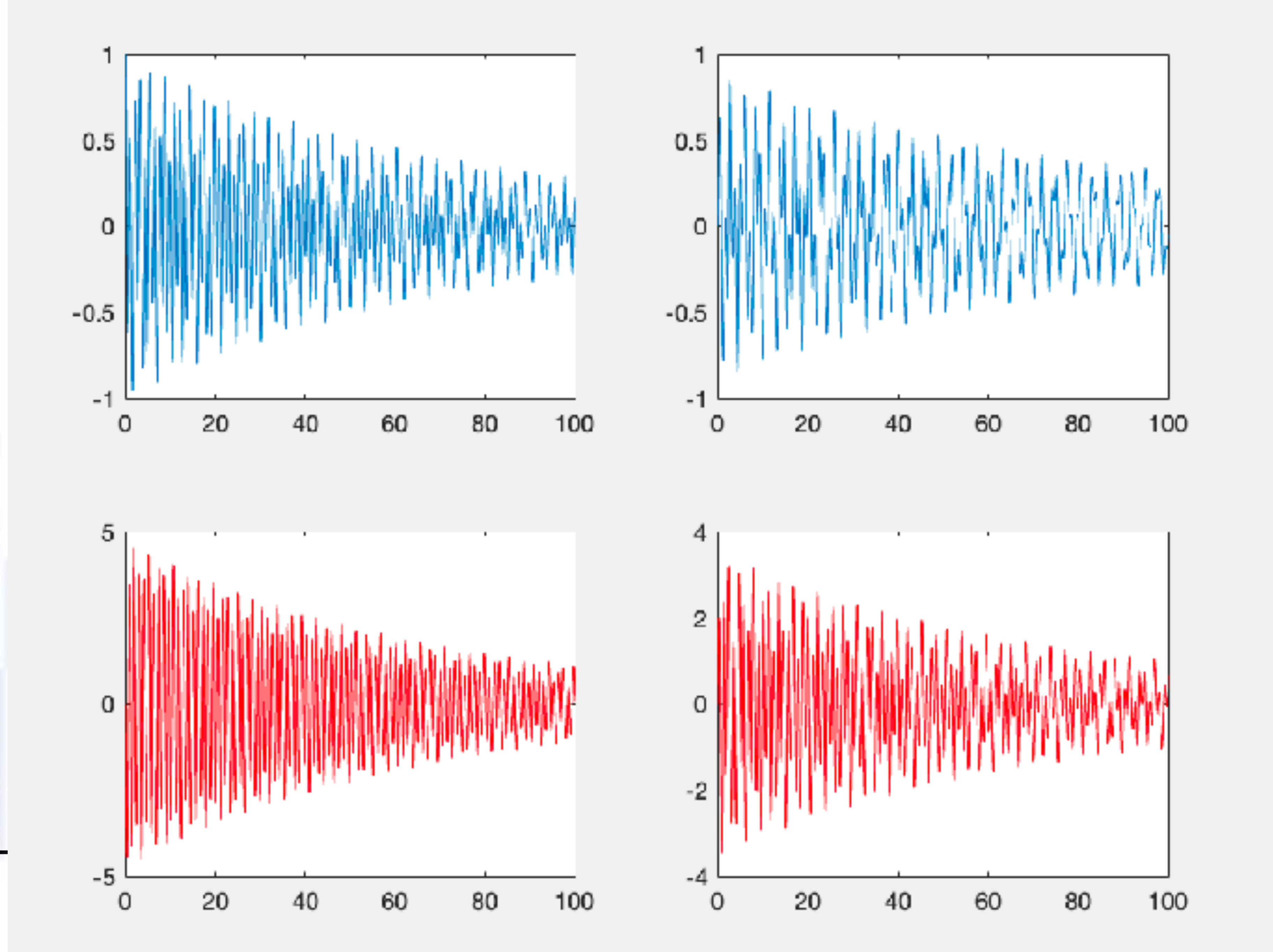


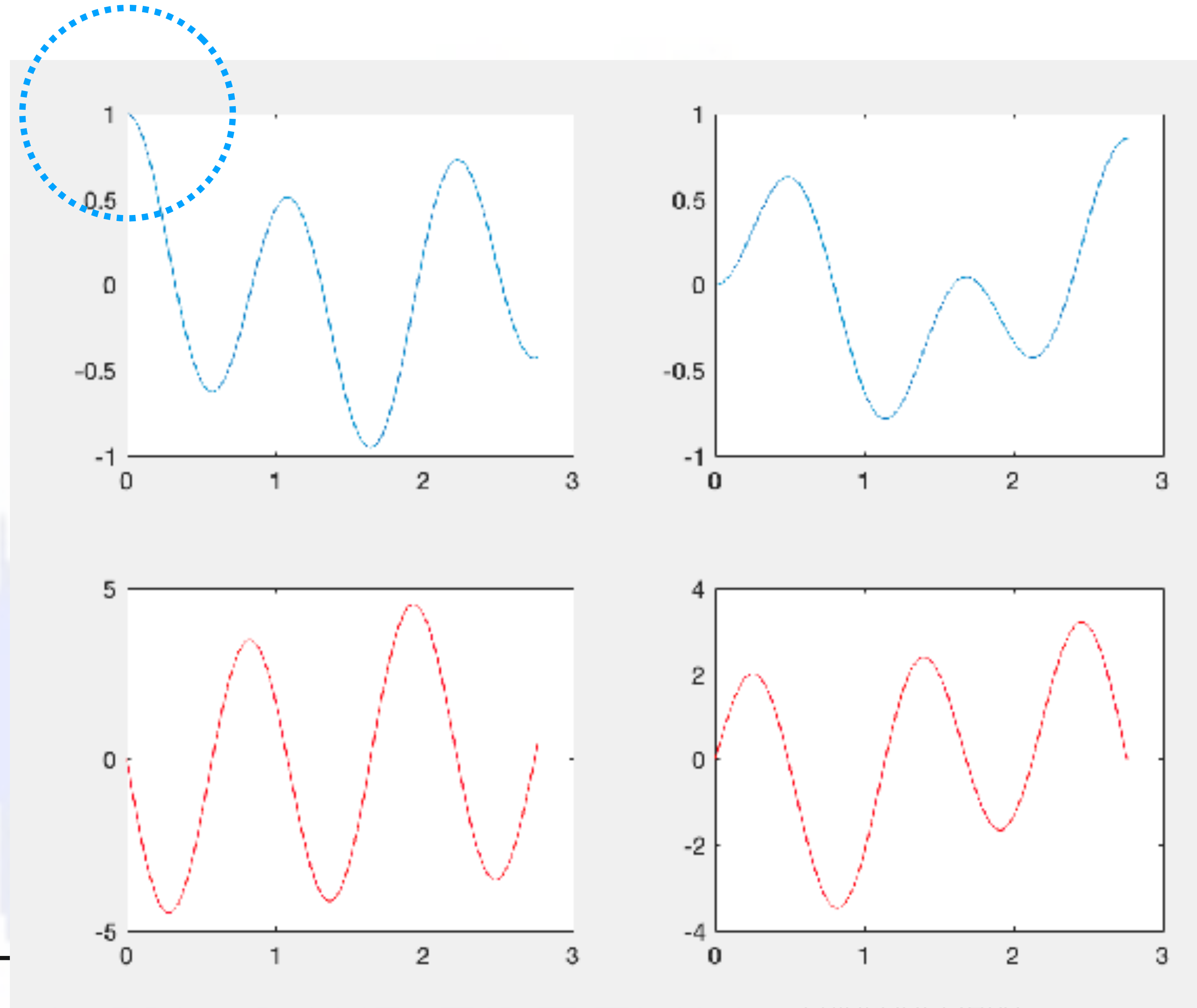


Esempio

Sistema MDOF, smorzato, libero, con CI diverse da 0

```
m1=4; m2=4;
c1=.05; c2=.04;
k1=50; k2=50;
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,’InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

dy_dt = @(t,y) [y(3);...
                y(4);...
               (1/m1)*(-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)-(c1+c2)*y(3)+c2*y(4));...
               (1/m2)*(k2*y(1)-k2*y(2)+c1*y(3)-(c1+c2)*y(4))]
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 100], [1 0 0 0],odeopt);

subplot(2,2,1); plot(t,y(:,1))
subplot(2,2,2); plot(t,y(:,2))
subplot(2,2,3); plot(t,y(:,3),’r’)
subplot(2,2,4); plot(t,y(:,4),’r’)
```





..che sistema si sta analizzando?

bregant@units.it

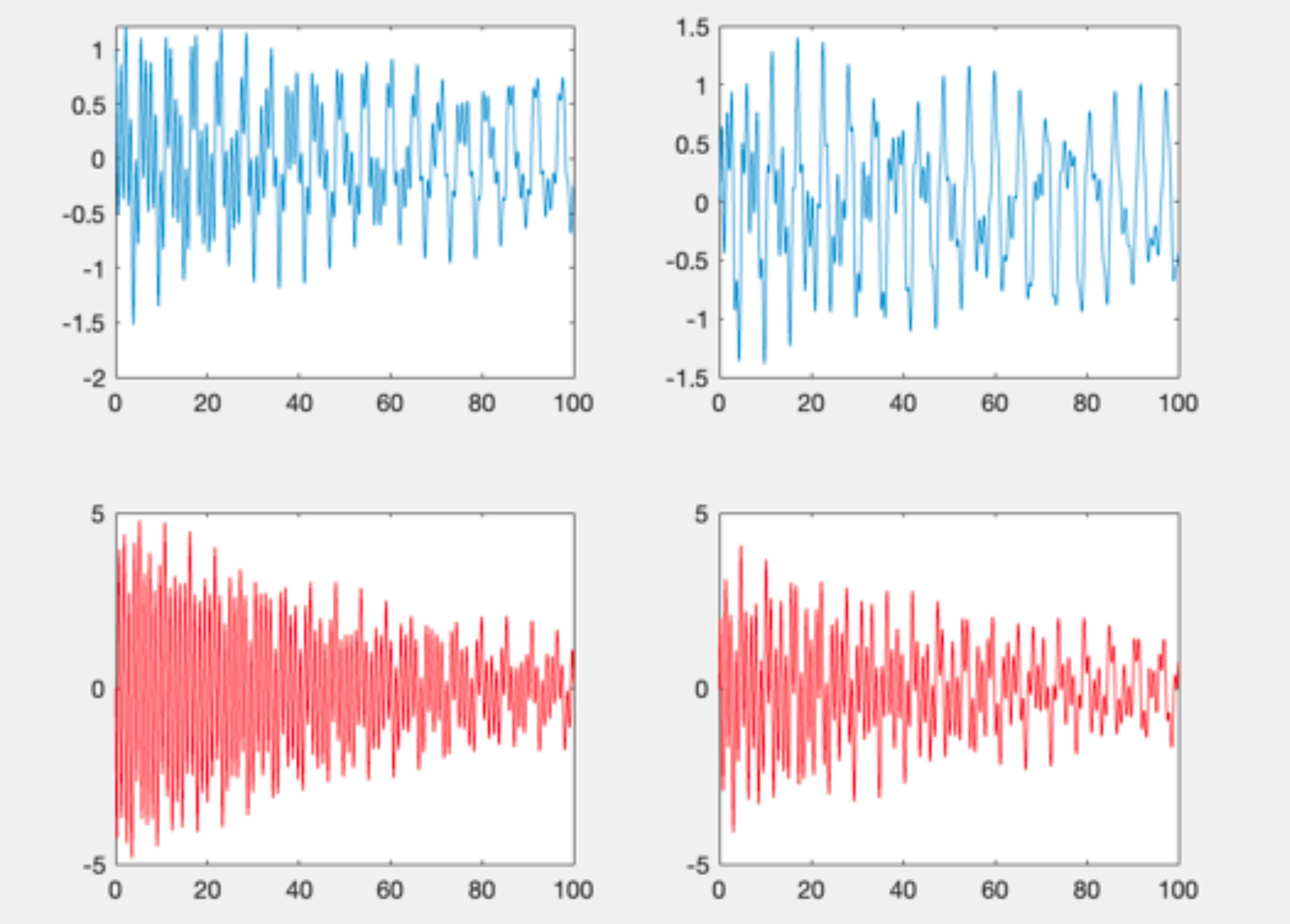
Esempio

Sistema MDOF, smorzato, forzato, con CI diverse da 0

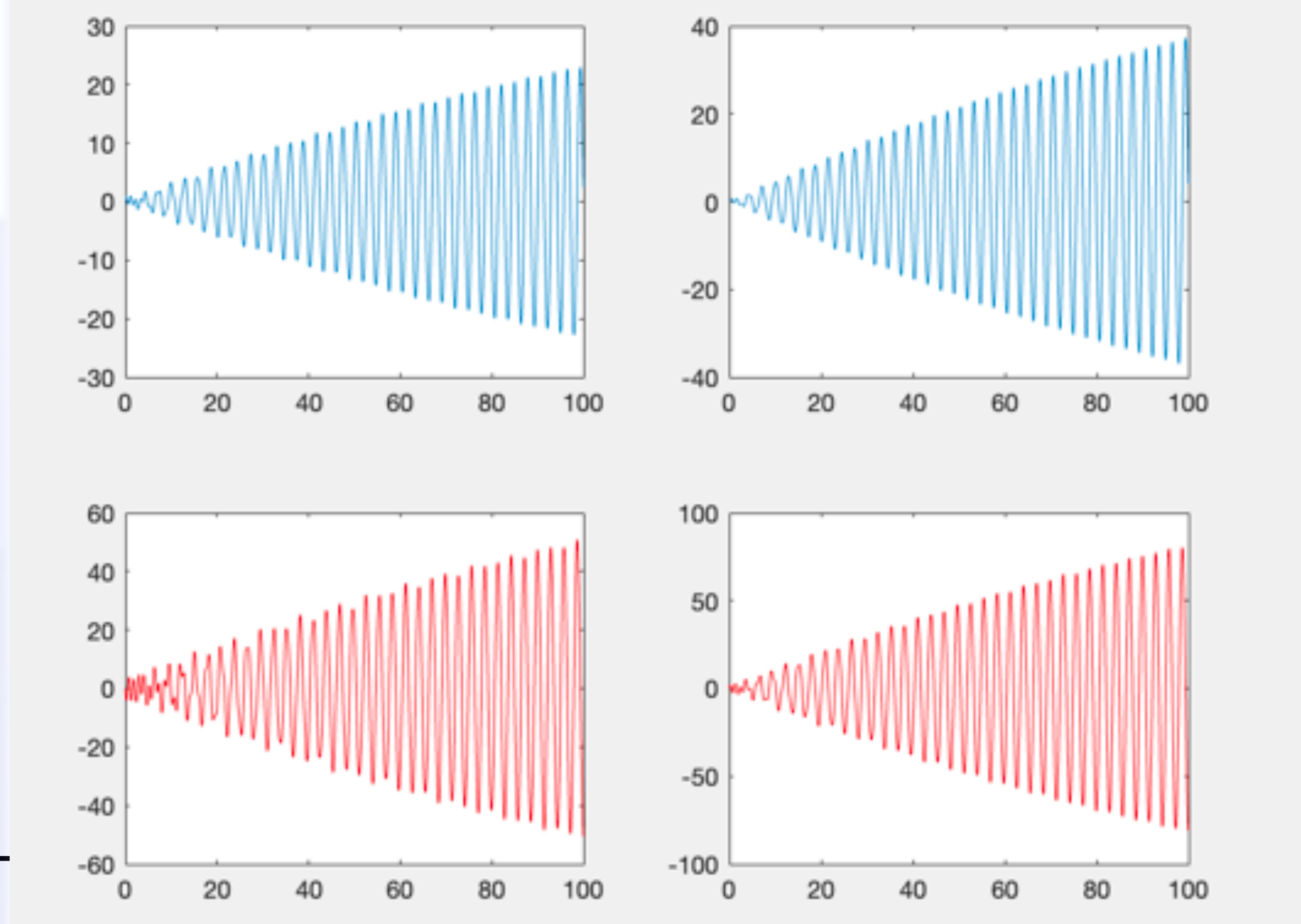
```
m1=4; m2=4;
c1=.05; c2=.04;
k1=50; k2=50;
F1 = 5; w = 1.18;
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);

dy_dt = @(t,y) [y(3);...
                y(4);...
                (1/m1)*(-(k1+k2)*y(1)+k2*y(2)-(c1+c2)*y(3)+c2*y(4))+F1*sin(w*t);...
                (1/m2)*(k2*y(1)-k2*y(2)+c1*y(3)-(c1+c2)*y(4))]

[t,y] = ode45(dy_dt,[0 100], [1 0 0 0],odeopt);
```

NB cambiando pulsazione di eccitazione cambia la risposta del sistema !

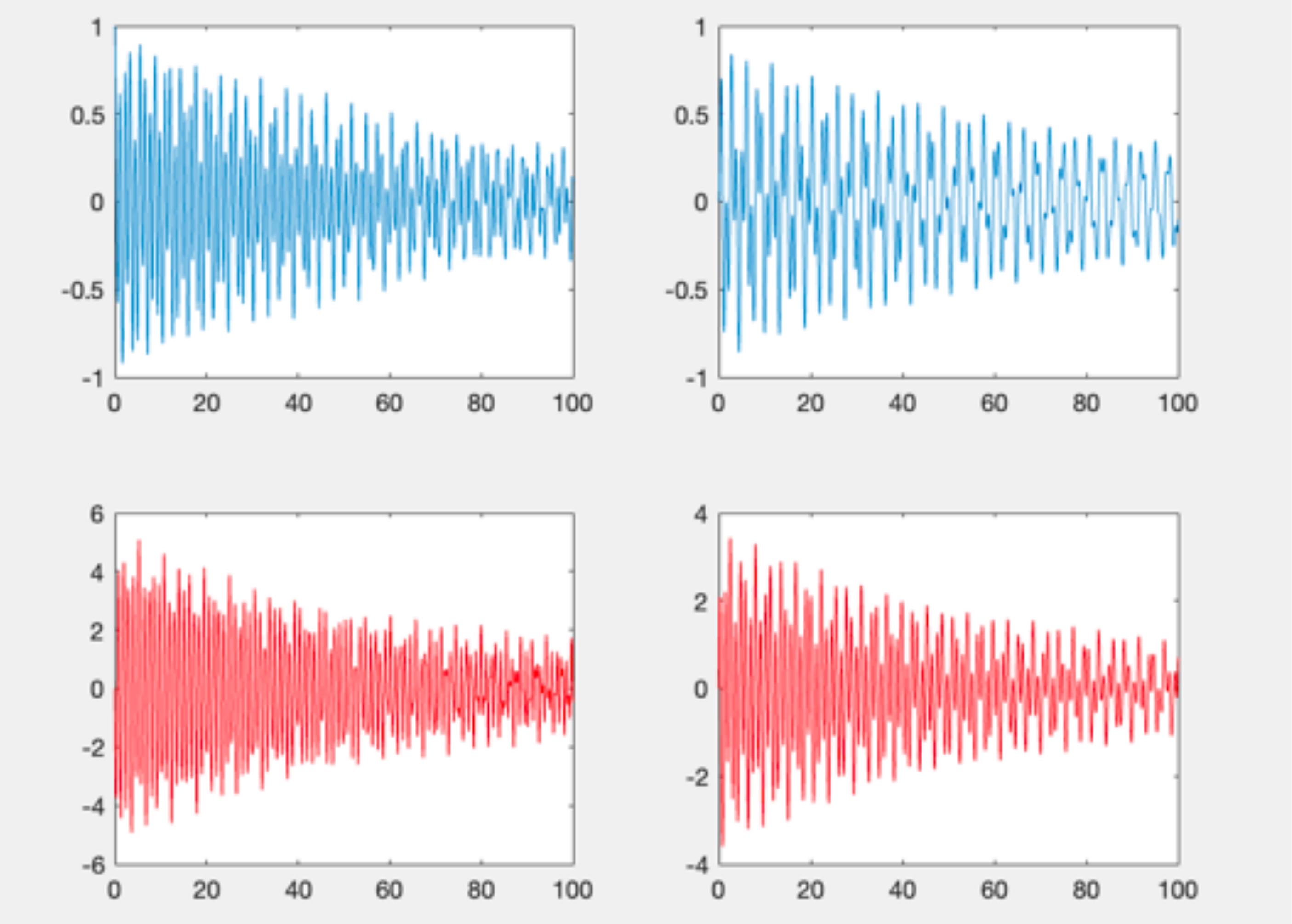
w = 1.18;



w = 2.18;



w =10.18;



Con questo approccio è possibile studiare tutti i sistemi governate da equazioni differenziali ordinarie.

Modificando opportunamente la le caratteristiche del sistema
funzione da integrare, le condizioni iniziali, le forzanti, il metodo ed i tempi di integrazione.

SIAM Journal on Scientific Computing · May 1997

THE MATLAB ODE SUITE

LAWRENCE F. SHAMPINE* AND MARK W. REICHELT†

Abstract. This paper describes mathematical and software developments for a suite of programs for solving ordinary differential equations in MATLAB.

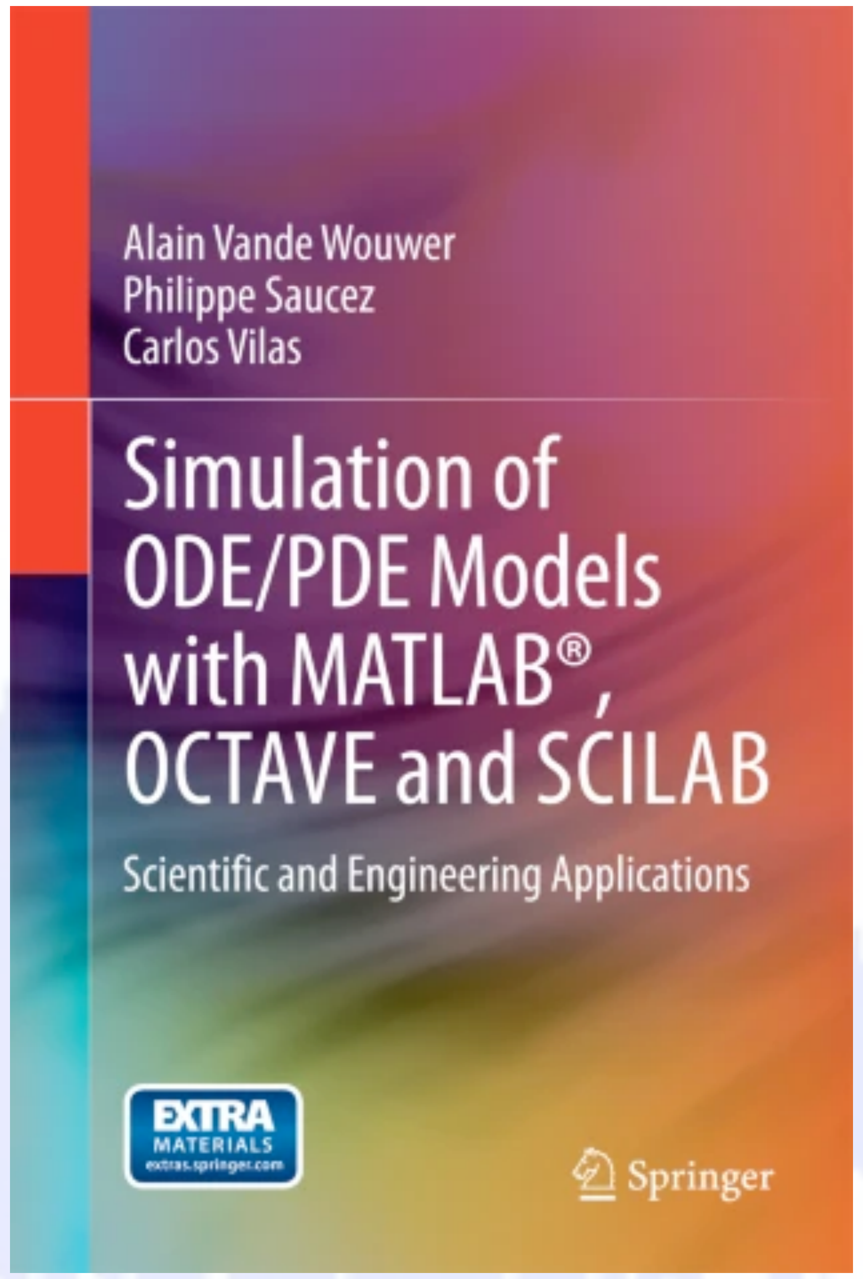
Key words. ordinary differential equations, stiff, BDF, Gear method, Rosenbrock method, non-stiff, Runge-Kutta method, Adams method

AMS subject classifications. 65L06, 65L05, 65Y99, 34A65

1. Introduction. This paper presents mathematical and software developments that are the basis for a suite of programs for the solution of initial value problems of the form

$$y' = F(t, y)$$

on a time interval $t_0 \leq t \leq t_f$, given initial values $y(t_0) = y_0$. The solvers for stiff problems allow the more general form

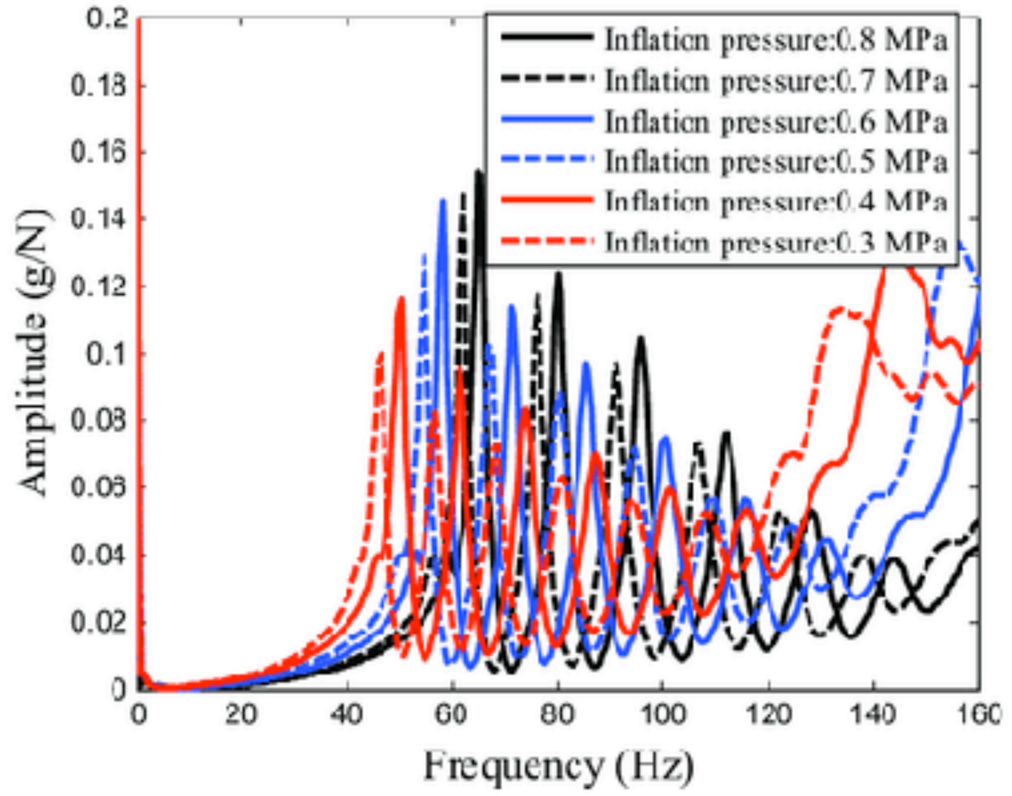


Funzioni di trasferimento

Scritte le equazioni del moto,
è interessante conoscere il legame tra le forzanti applicate
e le risposte del sistema.

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

es. note le asperità della strada, si vuole sapere di quanto si muove
il sedile del guidatore.. in pratica,
come si trasferisce l'eccitazione dal pneumatico al sedile



Le funzioni di trasferimento si calcolano spesso nel dominio della
frequenza (piuttosto che nel dominio del tempo), ma in questo sono quantità "mediate"
(per la trasformata serve acquisire/processare un certo numero di campioni N)

(ricordare le proprietà della trasformata di Fourier moltiplicazione/convoluzione)

Solitamente si sfruttano le proprietà dalla trasformata di Laplace che trasforma l'equazione del moto,
differenziale ordinaria, in una equazione algebrica.
Attenzione, l'equazione di partenza a(t) è espressa nel dominio Reale,
quella di algebrica A(s), nel dominio Complesso

$$A(s) = \int_0^{\infty} a(t)e^{-st}dt$$

s è un numero complesso!
s=a+jb

Siano

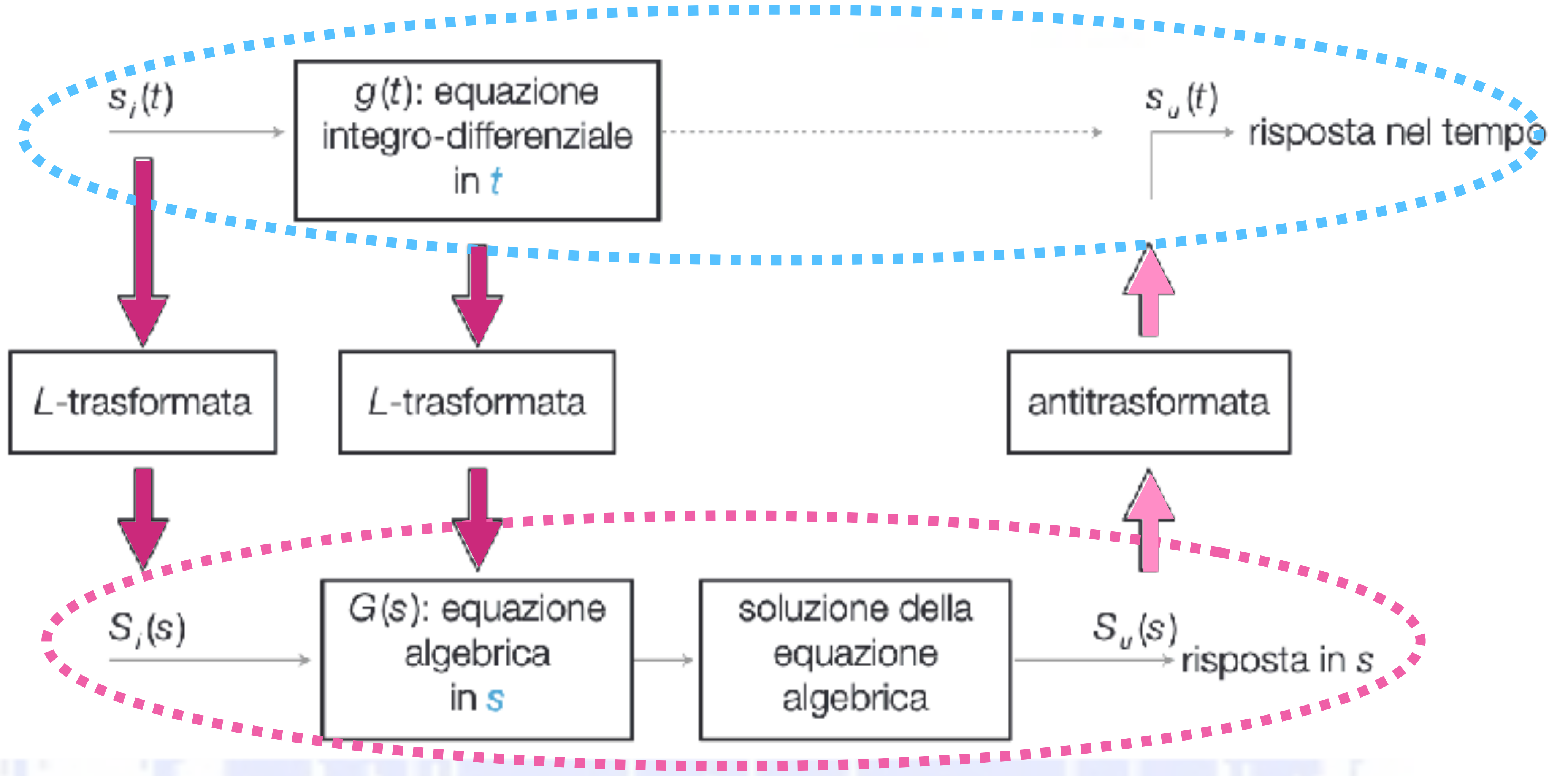
- $s_i(t)$: il generico segnale d'ingresso (funzione del tempo);
- $s_u(t)$: il segnale che rappresenta la risposta (funzione del tempo);
- $g(t)$: il legame tra ingresso e uscita dovuto ai parametri della sistema.

$$g(t) = \frac{s_u(t)}{s_i(t)}$$

..vista la presenza di elementi reattivi nel sistema (immagazzinano/dissipano energia) la g(t) è un equazione integro-differenziale!

$$s_u(t) = s_i(t)g(t)$$

Tramite la trasformata (diretta t>s) di Laplace, le espressioni di tipo integro-differenziale diventano espressioni algebriche. Risolta l'equazione algebrica, con l'anti-trasformata (inversa s>t) si può tornare nel dominio del tempo.



Alcune trasformate notevoli e proprietà della trasformata:

* Trasformata di un prodotto $A(s) = L[a(t)]$

$$pL[a(t)] = pA(s)$$

* Trasformata di una combinazione lineare $A(s) = L[a(t)]$ $B(s) = L[b(t)]$

$$L[pa(t) + qb(t)] = pA(s) + qB(s)$$

* Trasformata di una derivata $A(s) = L[a(t)]$

$$L[\frac{a(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)^{+}$$

condizioni iniziali

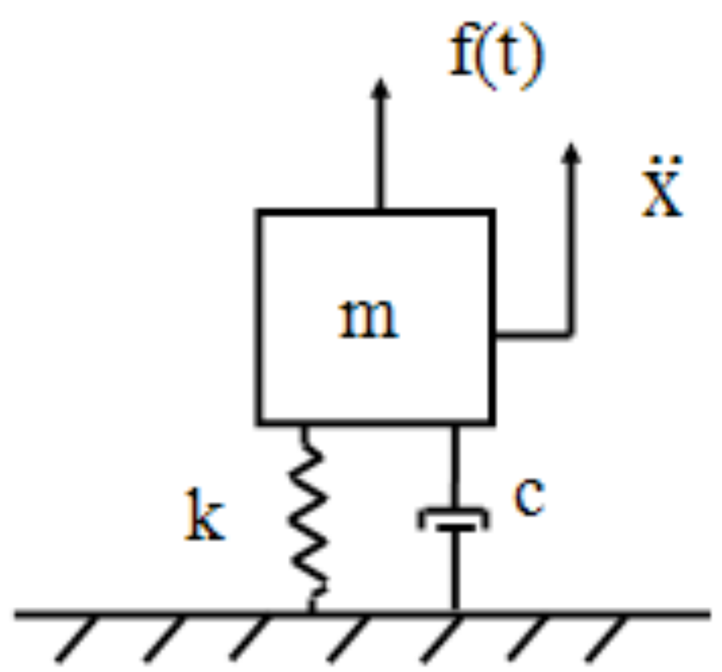
* Trasformata di un integrale $A(s) = L[a(t)]$

$$L[\int a(t)dt] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{\int_0^{0^+} f(t)dt}{s}$$

n°	$f(t)$ funzione del tempo per $t \geq 0$	$F(s)$ Trasformata di Laplace
1	$u(t) = 1$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$ (impulso unitario di Dirac)	1
3	t (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (con n intero e > 0)	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
7	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	$\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1})e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$ (n intero e > 0)
10	$e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$\frac{k}{\omega}e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$ con: $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{b-a}$ $k = \sqrt{(b-a)^2+\omega^2}$	$\frac{s+b}{(s+a)^2+\omega^2}$

Esempio

Sistema SDOF smorzato e forzato..come cambia la risposta x(t) al variare della forzante f(t)?



All' equazioni del moto:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

si applichi la trasformata di Laplace, ipotizzando CI = 0

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$L\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) + sX(0) + \dot{X}(0)$$
$$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) + X(0)$$

https://web.stanford.edu/~boyd/ee102/laplace-table.pdf

Si noti il cambio di variabili t>s
ed il fatto che si possa raccogliere X(s) (eq. algebrica!)

$$\left[ms^2 + cs + k\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[Z(s)\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[ms^2 + cs + k\right] = \left[Z(s)\right]$$

matrice di rigidezza dinamica!
..contiene anche inerzia e smorzamento!

$$[Z(s)] = \frac{F(s)}{X(s)}$$

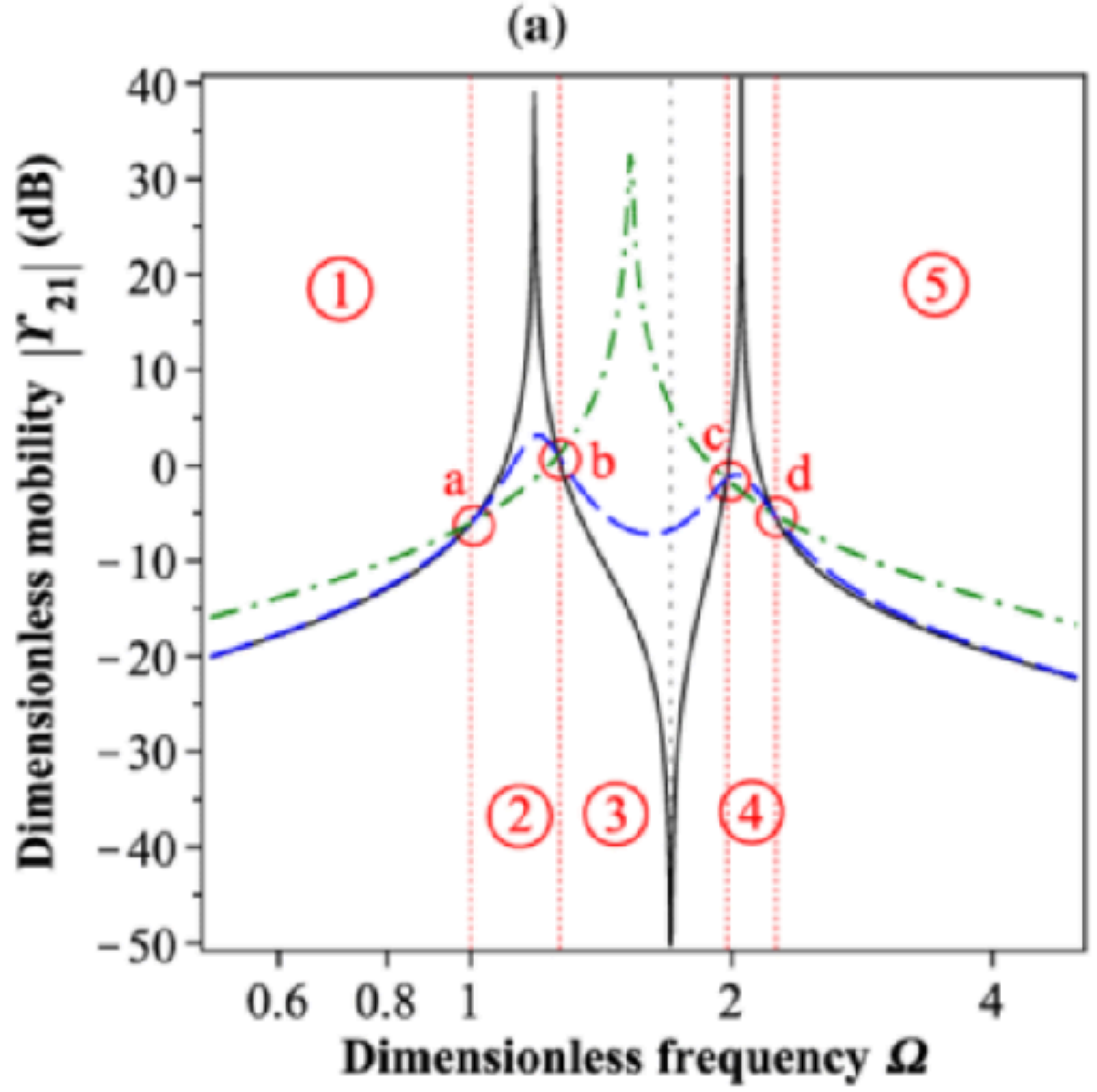
rigidezza dinamica
..definisce il legame tra lo spostamento applicato e la forza risultante

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

funzione di trasferimento
..definisce il legame tra la forza applicata e lo spostamento risultante

$$[ms^2 + cs + k]$$

si ricorda che s è complessa! > Z(s) è complessa > H(s) è complessa!
>> Ampiezza e Fase
>> Parte Reale e Parte Immaginaria



Se si considera s=jω, (puramente immaginario)
si parla di Funzione di Risposta in Frequenza
piuttosto che di Funzione di trasferimento

$$[H(j\omega)] = [-m\omega^2 + jc\omega + k]^{-1}$$

Esempio sistema SDOF

Scritta l'equazione del moto ed applicata la trasformazione di Laplace si ottiene:

$$\left[ms^2 + cs + k\right] X(s) = F(s)$$

$$\left[H(s)\right] = \frac{1}{\left[ms^2 + cs + k\right]}$$

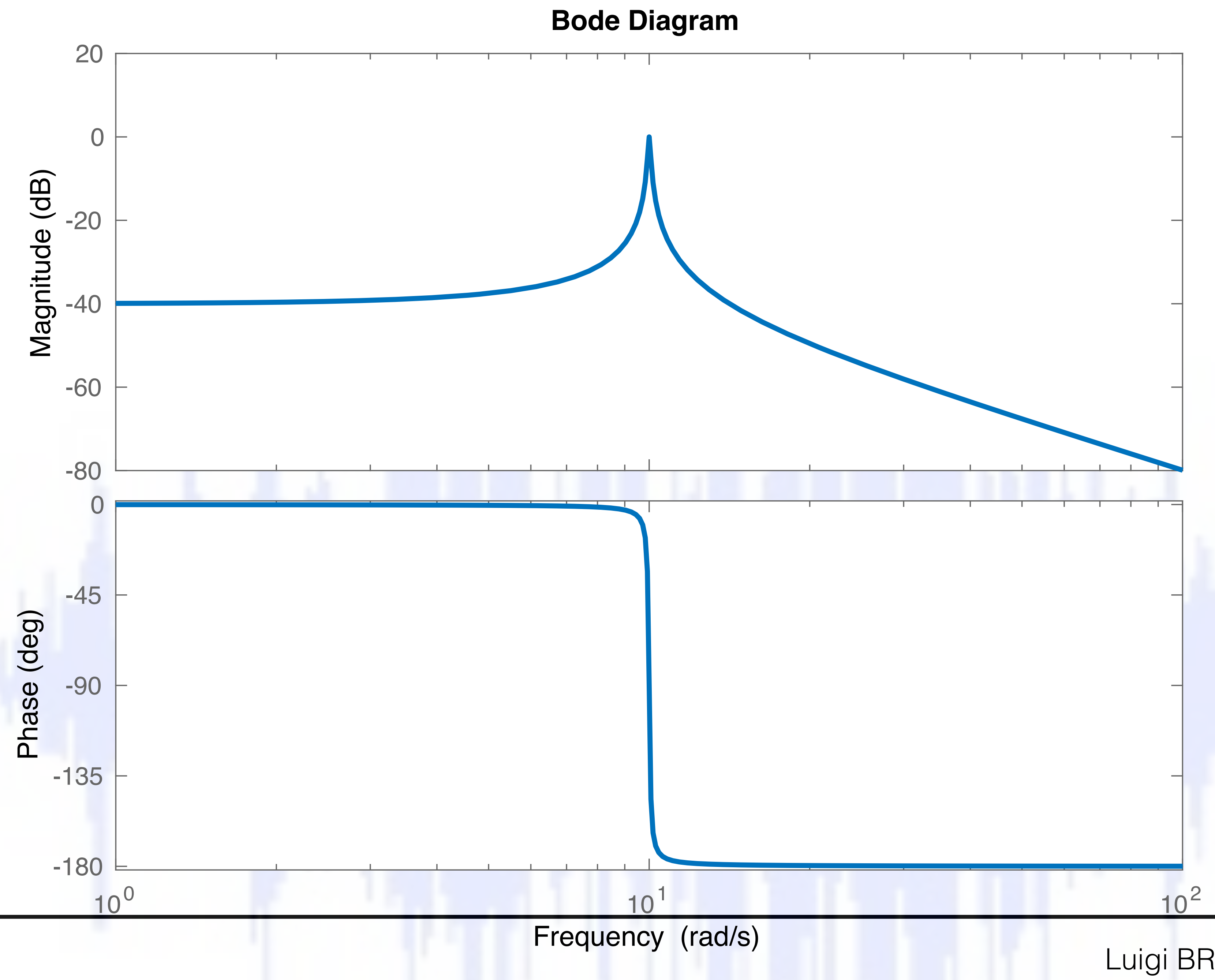
esistono valori di s che annullano il denominatore
> la funzione di trasferimento va all'infinito

$$X(s) = [H(s)]F(s)$$

> la risposta del sistema va all'infinito
> risonanza!

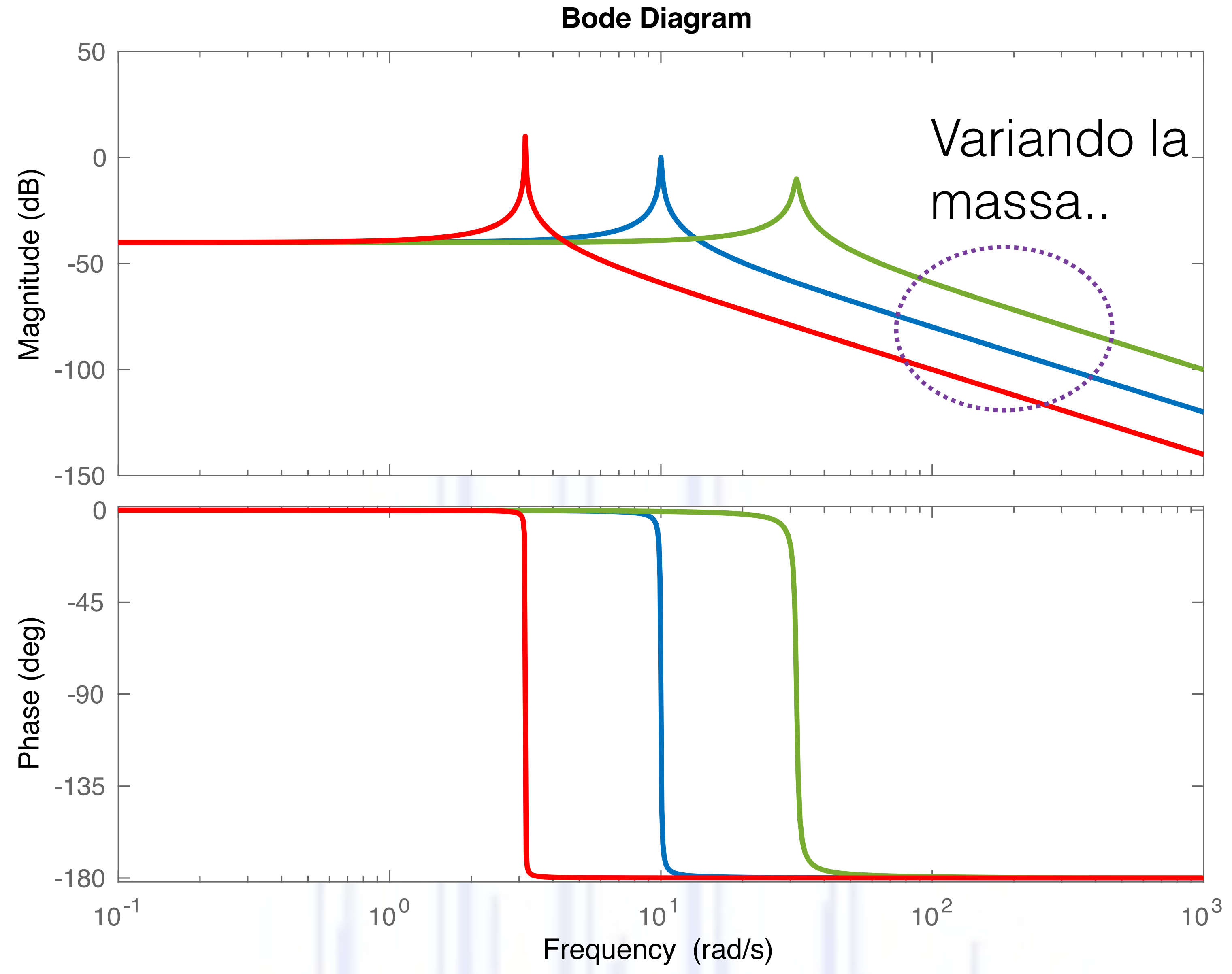
Con
m=1 kg
c=0.1 Ns/m
k=100 N/m

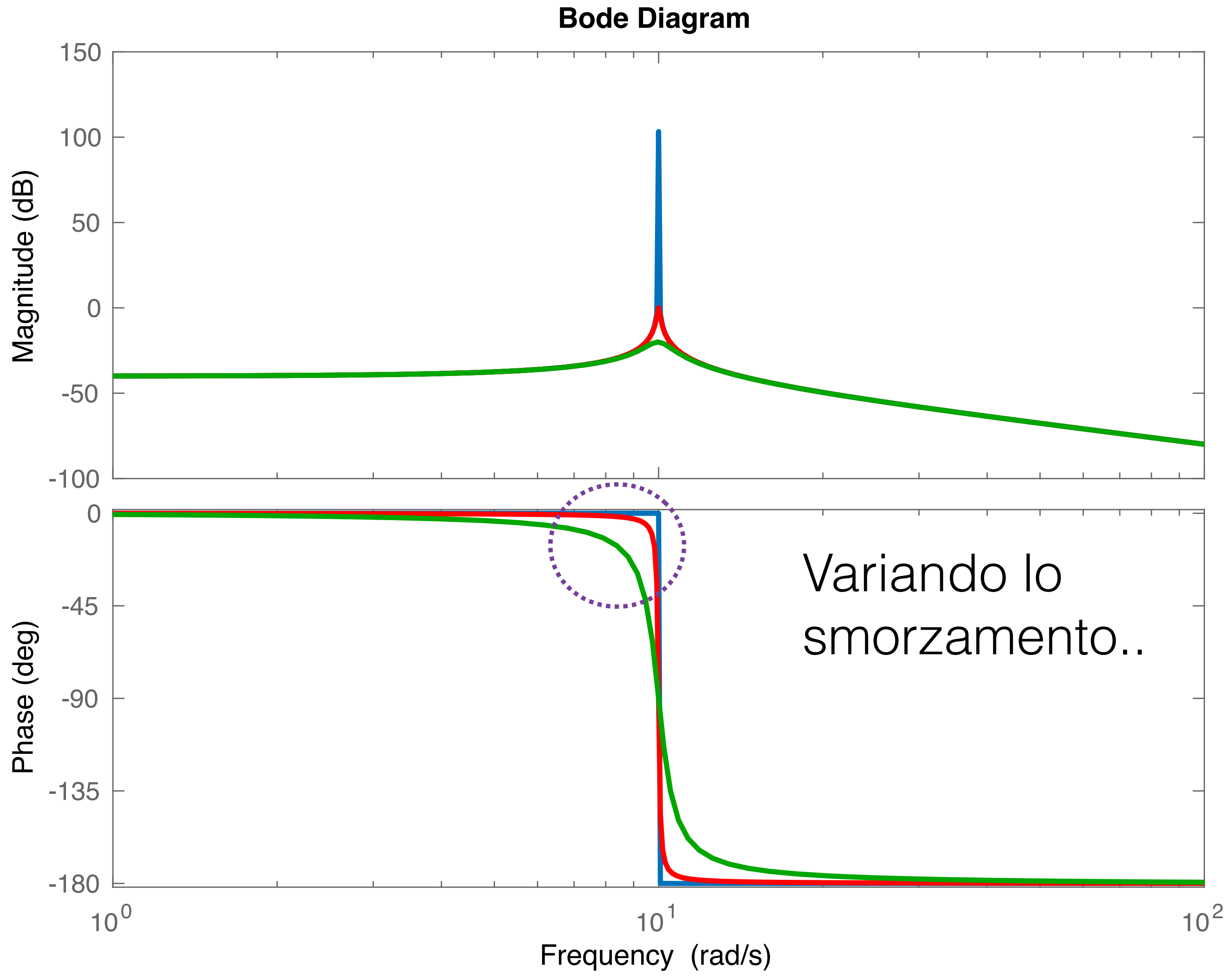
$$\left[H(s)\right] = \frac{1}{\left[1s^2 + 0.1s + 100\right]}$$

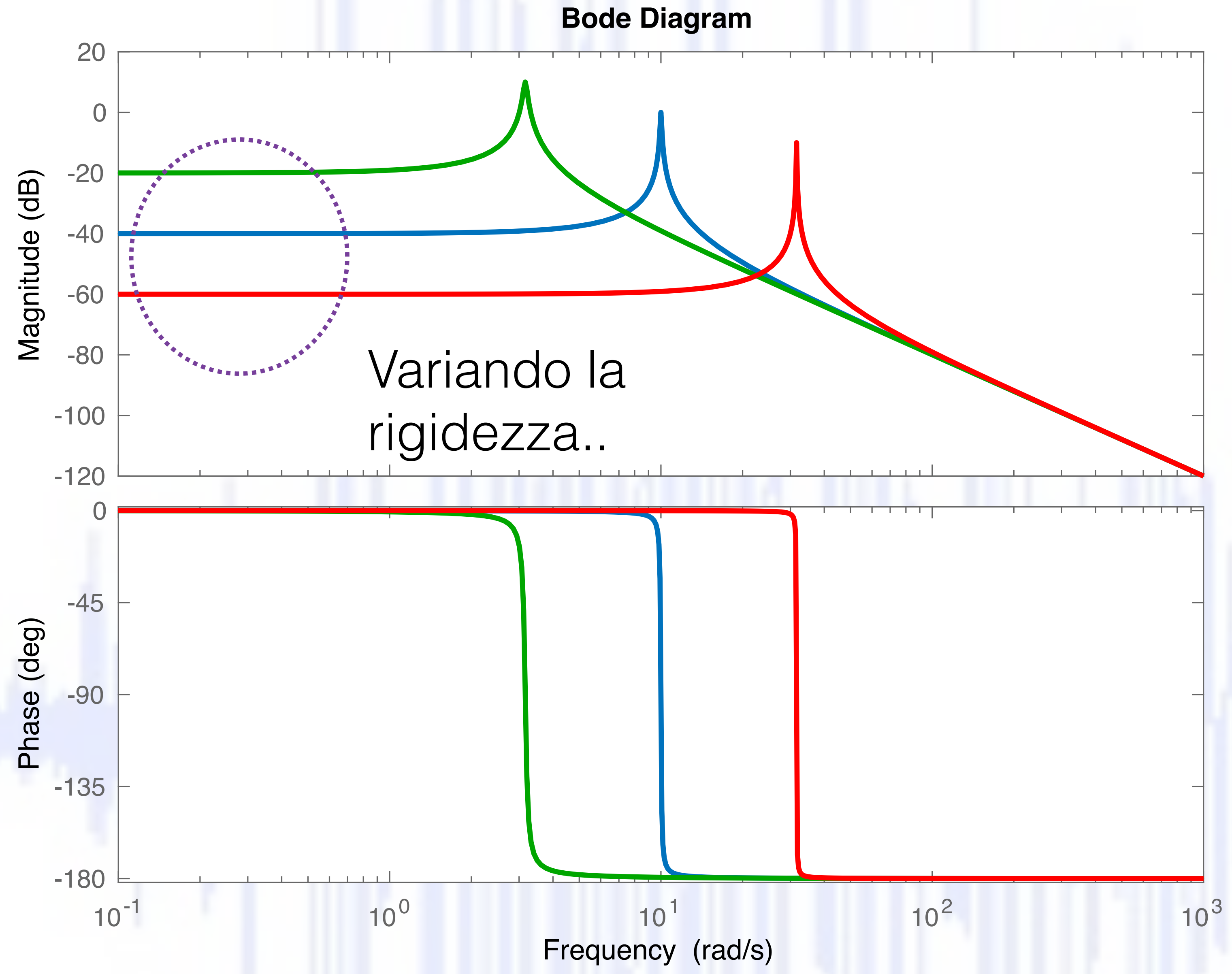


le cui radici sono *
s_1=-0.5+j9.99
s_2=0.5+j9.99

* riguardare come cambia posizione radici in funzione dello smorzamento







Avendo a disposizione un modello matematico è facile vedere l'effetto delle variazioni di tutte le caratteristiche del sistema, sulla funzione di risposta in frequenza.

NB..Gli effetti sono molto diversi ..

Si ricordi che la funzione di risposta in frequenza è una funzione complessa (A() e Φ(), Re() e Im().
Questa può essere scritta nella seguente maniera:

$$\left[H(j\omega)\right] = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = |H(j\omega)|\, e^{j\phi(j\omega)}$$

ove si evidenza che ampiezza e fase sono dipendenti da jω

Esiste la possibilità di esprimere la funzione di risposta in frequenza non solo in termini di spostamento (recettanza) , ma anche di velocità (mobilità) ed accelerazione (accelerano).
Gli inversi vengono nominati rispettivamente la rigidezza dinamica, l'impedenza e la massa apparente!

Ovviamente i "grafici" di ampiezza e fase in funzione della frequenza cambieranno!

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}$$ recettanza

$$\frac{1}{H(j\omega)} = \frac{F(j\omega)}{X(j\omega)}$$ rigidezza dinamica

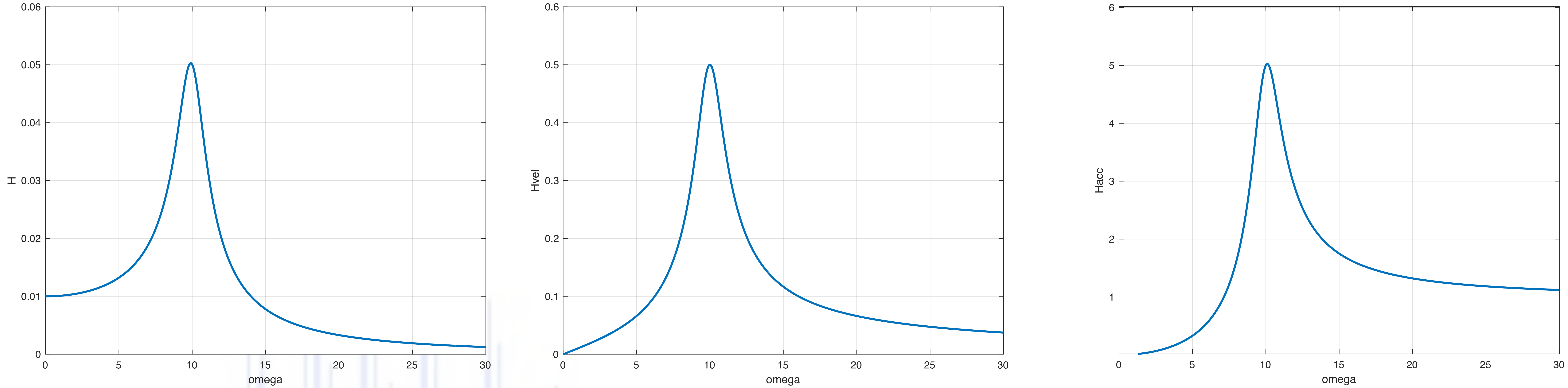
$$H_{vel}(j\omega) = j\omega H(j\omega)$$ mobilità

$$\frac{1}{H_{vel}(j\omega)} = \frac{F(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)}$$ impedenza

$$H_{acc}(j\omega) = -j\omega^2 H(j\omega)$$ acceleranza

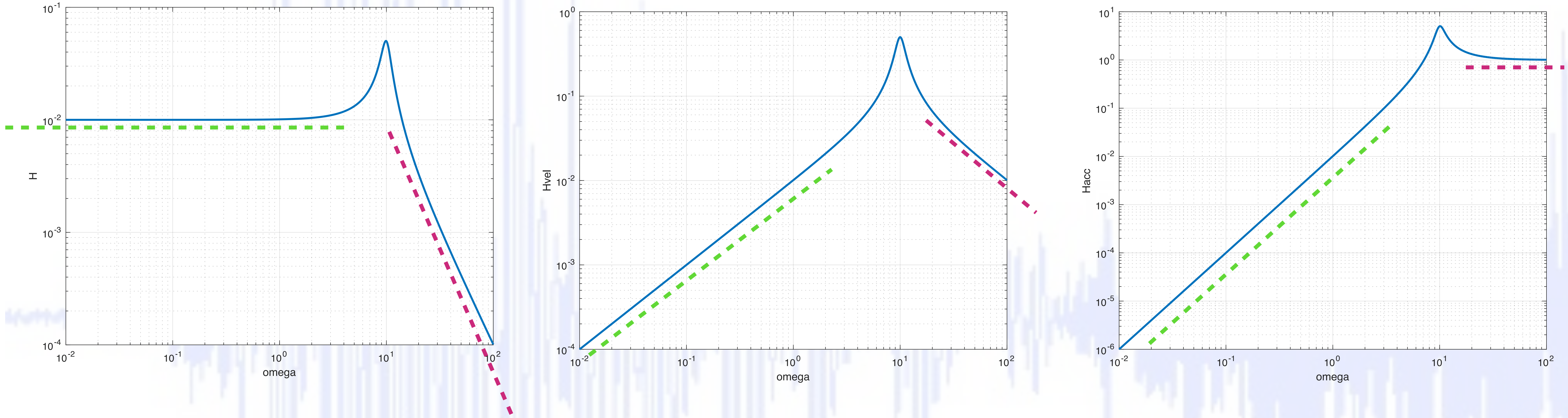
$$\frac{1}{H_{acc}(j\omega)} = \frac{F(j\omega)}{\ddot{X}(j\omega)}$$ massa apparente

per lo stesso sistema SDOF..



recettanza mobilità acceleranza

log Y



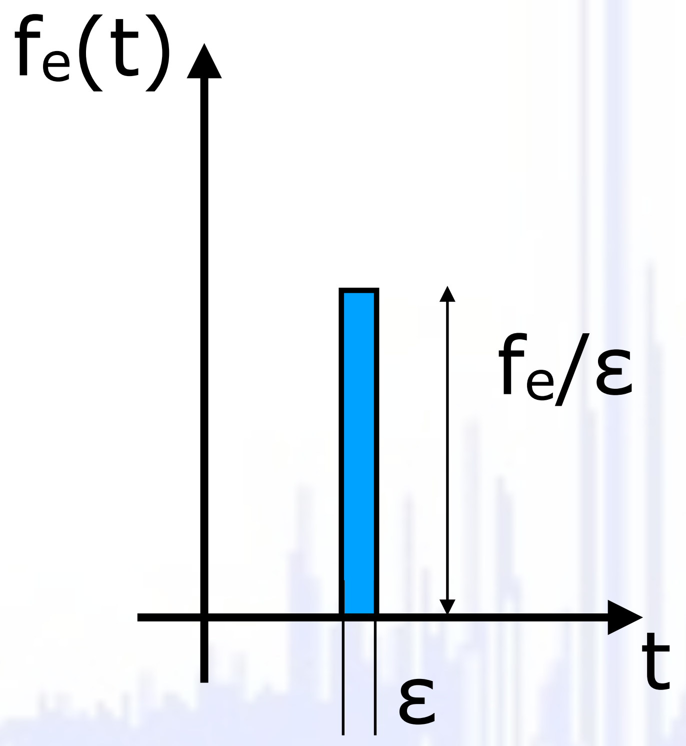
log X
log Y

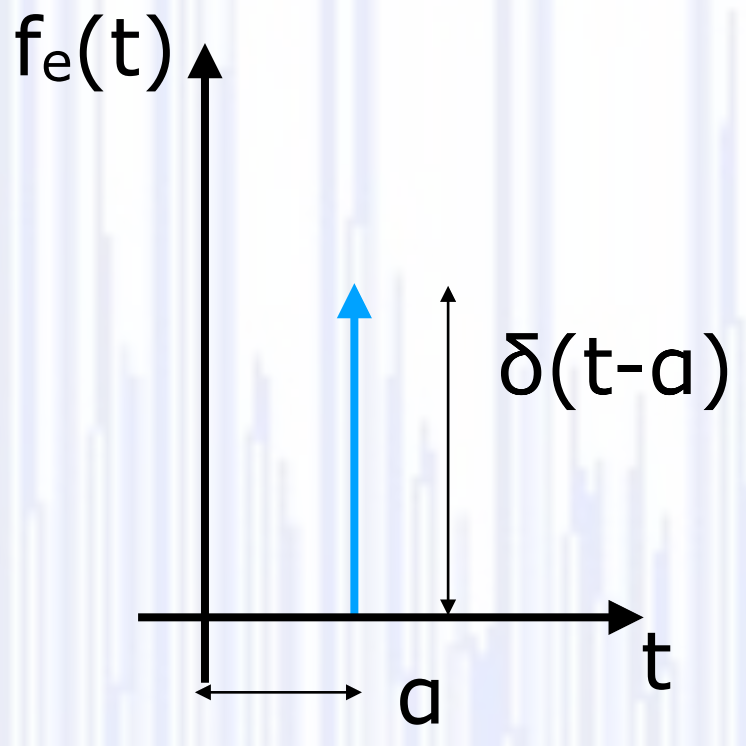
NB attenzione ai diversi limiti dei grafici

Si è visto che con la trasformata di Laplace,
è abbastanza facile riscrivere le equazione del moto dal dominio del tempo t,
al dominio della frequenza jω (ω=2πf) e definire la funzione di trasferimento o di risposta in frequenza H(jω)
(FRF frequency response function)

Il legame tra eccitazione e risposta del sistema può essere analizzato
anche restando nel dominio del tempo, con qualche complicazione in più, definendo
la funzione di risposta all'impulso h(t). (IRF impulse response function)

Si definisce l'impulso una forza che agisce sul sistema per un periodo di tempo molto breve
(area in figura). Se ε tende a 0 si parla di impulso unitario o funzione δ(t) (δ di Dirac) *

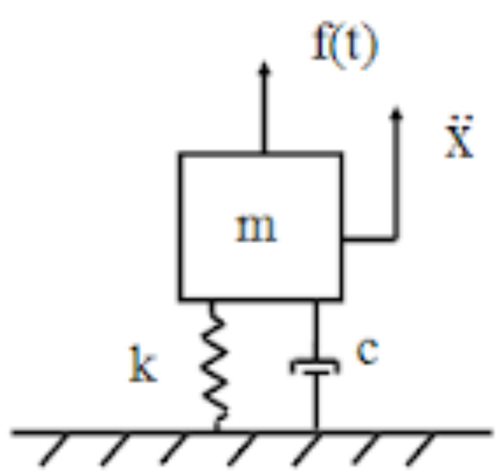




$$\delta = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

* non si può misurare sperimentalmente perché
ogni forza viene applicata per un periodo di tempo defInto



Si supponga di voler determinare l'IRF di spostamento di una sistema SDOF.

Si supponga che questo sia in quiete (spostamento e velocità nulli per t=0)
e che all'istante t=0, viene applicato l'impulso f_e

All'istante $t=0^+$, visto l'impulso applicato, la quantità di moto della massa m non sarà più zero ed il corpo avrà assunto una velocità :

$$f_e = m\dot{x}(0) \qquad \dot{x}(0) = \frac{f_e}{m}$$

..le condizioni iniziali ($t=0^+$) saranno

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \dfrac{f_e}{m} \end{cases}$$

Con queste condizioni, l'equazione generale della risposta del sistema sarà:

$$x(t) = \frac{f_e}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t)$$

da cui è facile trovare l'IRF cercata:

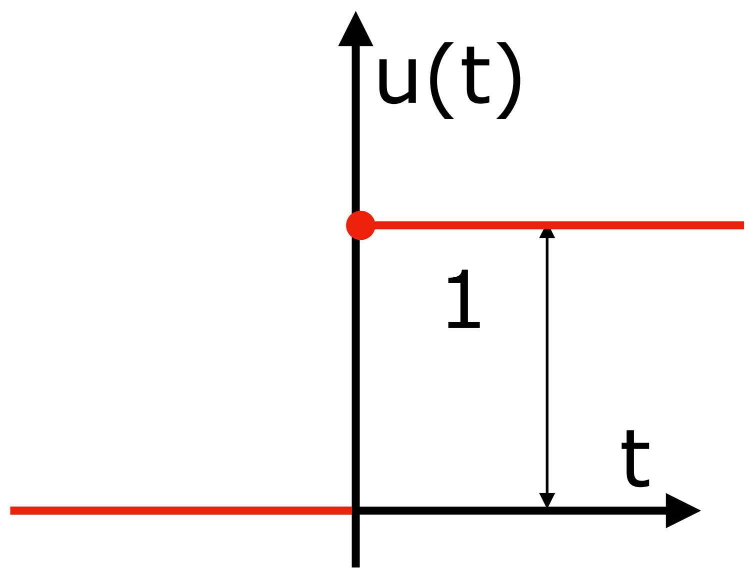
$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t)$$

condizione di causalità $t \geq 0$

Anche in questo caso è possibile valutare la risposta all'impulso in termini di velocità ed accelerazione.

Vista il vincolo di causalità, conviene riscrivere l'equazione dell'IRF sfruttando la funzione di Heaviside u(t).

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



$$h(t) = u(t)\bar{h}(t)$$ con $$\bar{h}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t)$$ senza il vincolo di casualità!

derivando 1 volta (velocità)

$$\dot{h}(t) = \dot{u}(t)\bar{h}(t) + u(t)\dot{\bar{h}}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \delta(t) \\ \bar{h}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{h}(t) = u(t)\dot{\bar{h}}(t)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{\omega_n}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} cos(\omega_d t + \theta)$$

$$t \geq 0$$

derivando 2 volte (accelerazione)

$$\ddot{h}(t) = \dot{u}(t)\dot{\bar{h}}(t) + u(t)\ddot{\bar{h}}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \delta(t) \\ \dot{\bar{h}}(0) = \frac{1}{m} \end{cases}$$

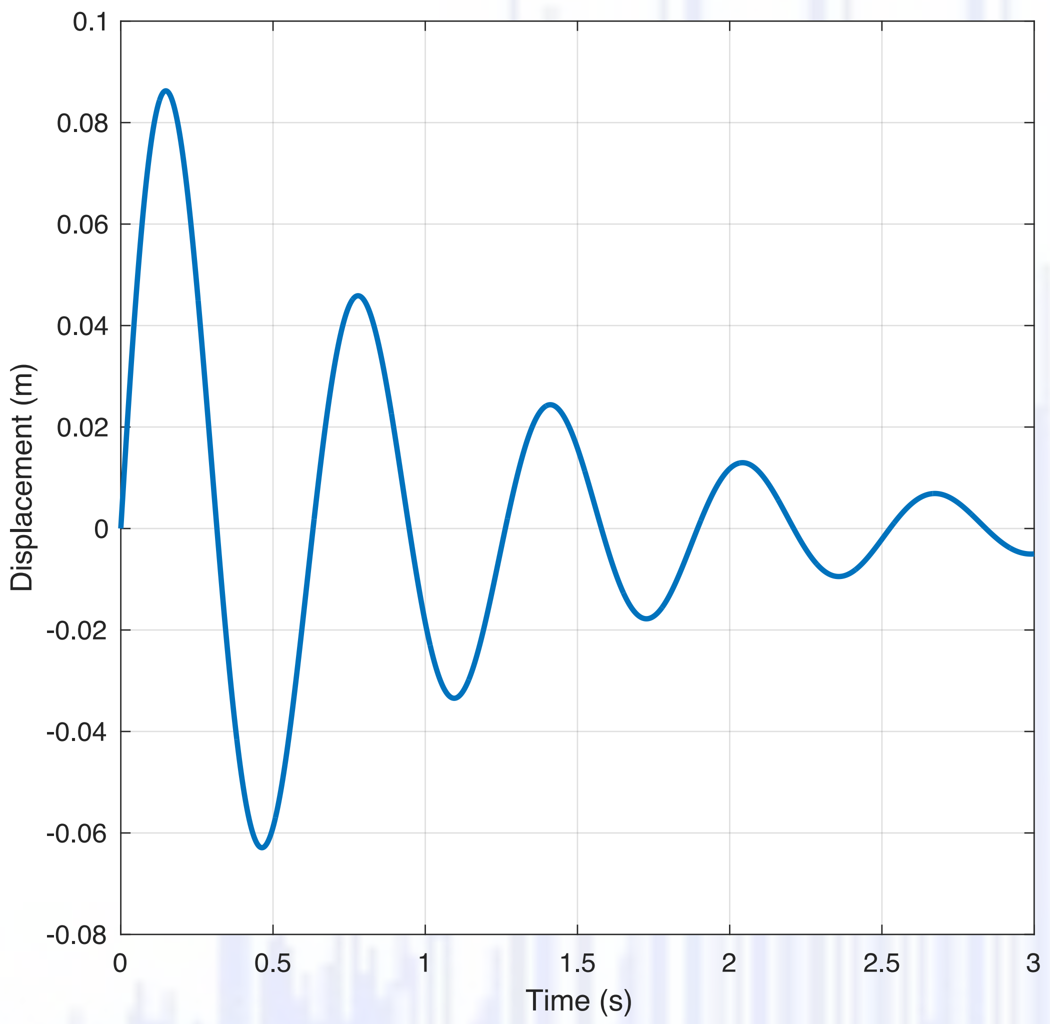
$$\ddot{h}(t) = \frac{\delta(t)}{m} + u(t)\ddot{\bar{h}}(t)$$

$$\ddot{h}(t) = \frac{\delta(t)}{m} - \frac{\omega_n^2}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \phi)$$

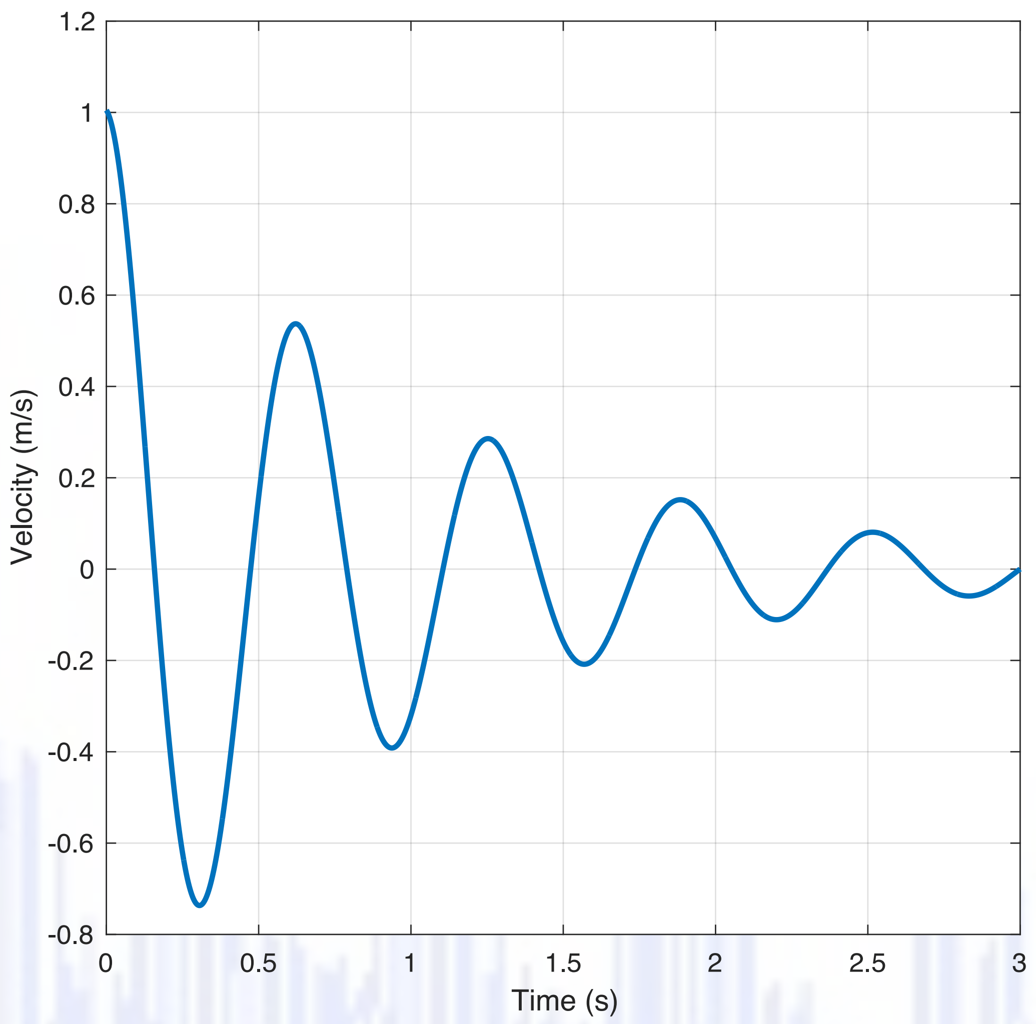
$$t \geq 0$$

Senza la funzione di Heaviside il termine $\dfrac{\delta(t)}{m}$ non ci sarebbe!

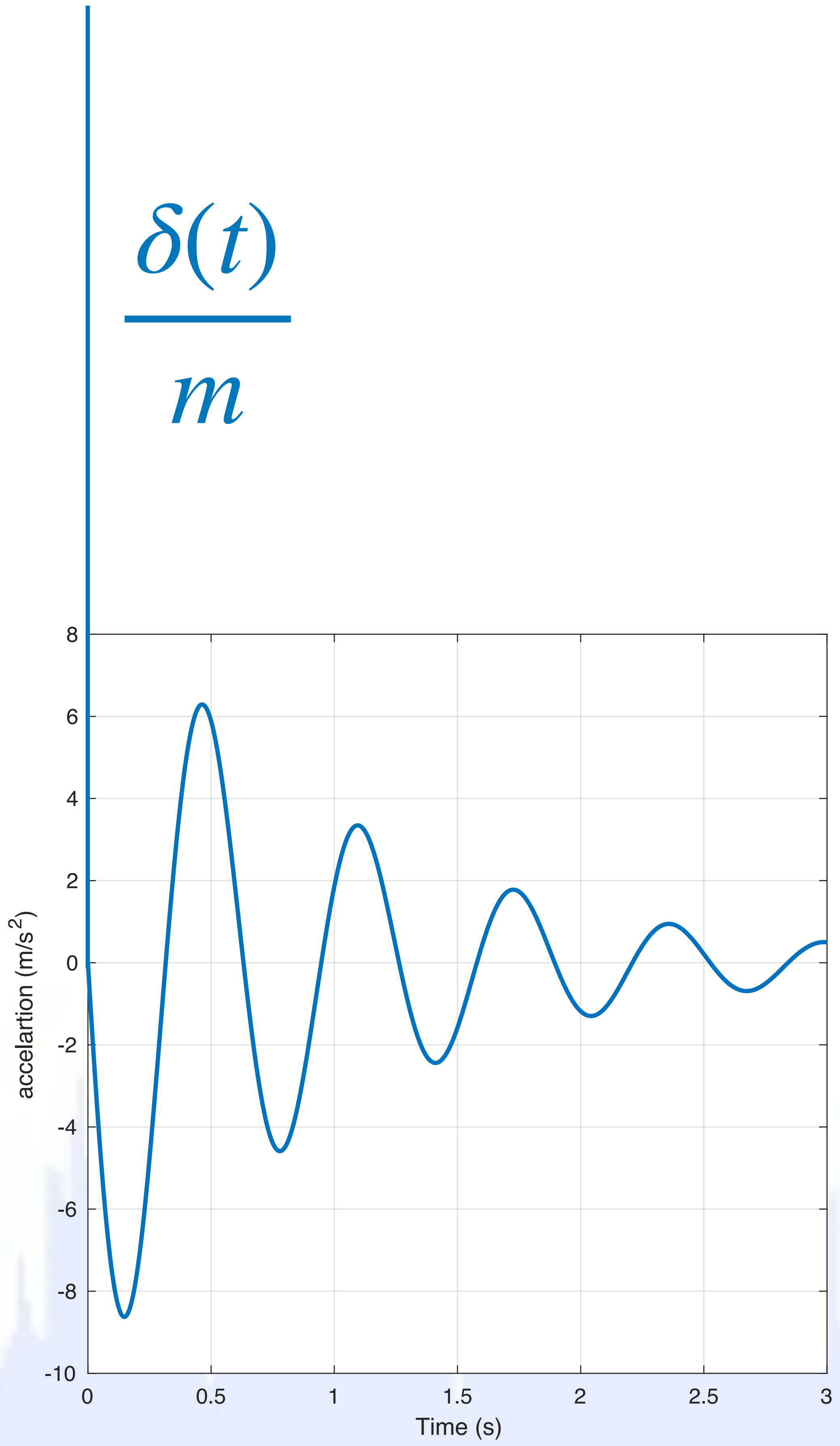
Applicando un impulso, si immette un quantità di moto al sistema e quindi una variazione di velocità all’istante t=0



IRF Spostamento



IRF Velocità



IRF Accelerazione

Nel caso di un sistema MDOF a N GDL, gli elementi caratteristici del sistema diventano matrici NxN, mentre spostamenti e forzanti diventano vettori NX1:

$$\left[[m]s^2 + [c]s + [k]\right]\{X(s)\} = \{F(s)\}$$

Procedendo come per il caso SDOF..

$$\left[H(s)\right] = \left[Z(s)\right]^{-1} = \frac{adj\left[Z(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]}$$

La matrice delle FRF è un rapporto,
tra la matrice aggiunta di Z (NxN) ed il determinate della matrice Z.
Quest'ultimo è sempre un polinomio di ordine 2N.

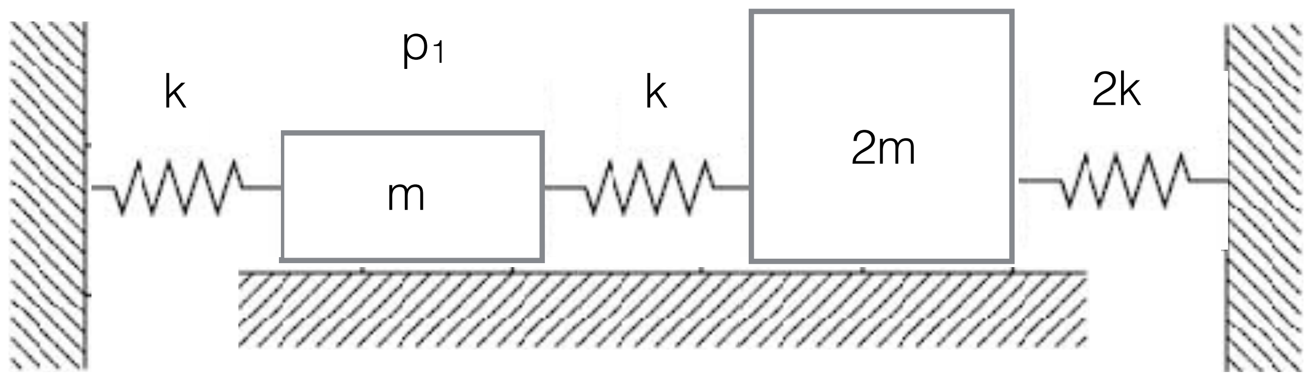
$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]}$$

Per ogni elemento di H(s) i valori di s
per cui si annulla adj $Z_{i,j}(s)$ sono gli **ZERI** della funzione > anti risonanze H_{ij}->0
(dipendono da i e j)
per cui si annulla det Z(s) sono i **POLI** della funzione > risonanze H_{ij}->∞
(indipendenti da i e j)

$$H_{i,j}(s) = \frac{X_i(s)}{F_j(s)}$$

La singola FRF, H_{ij}, esprime il legame tra
il punto di risposta **i** ed il punto di eccitazione **j**

Esempio sistema 2gdl, non smorzato, forzato



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

Equazioni del moto

$$\left[k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \Omega^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Trasformata di Laplace

$$\begin{bmatrix} 2k-\Omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\Omega^2 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

NB ogni elemento della matrice aggiunta è differente
> diverse anti risonanze

NB il determinante è uguale per tutte le funzioni
> stesse risonanze

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k-\Omega^2 2m & k \\ k & 2k-\Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} = \begin{bmatrix} \dfrac{3k-\Omega^2 2m}{\Delta} & \dfrac{k}{\Delta} \\ \dfrac{k}{\Delta} & \dfrac{2k-\Omega^2 m}{\Delta} \end{bmatrix}$$

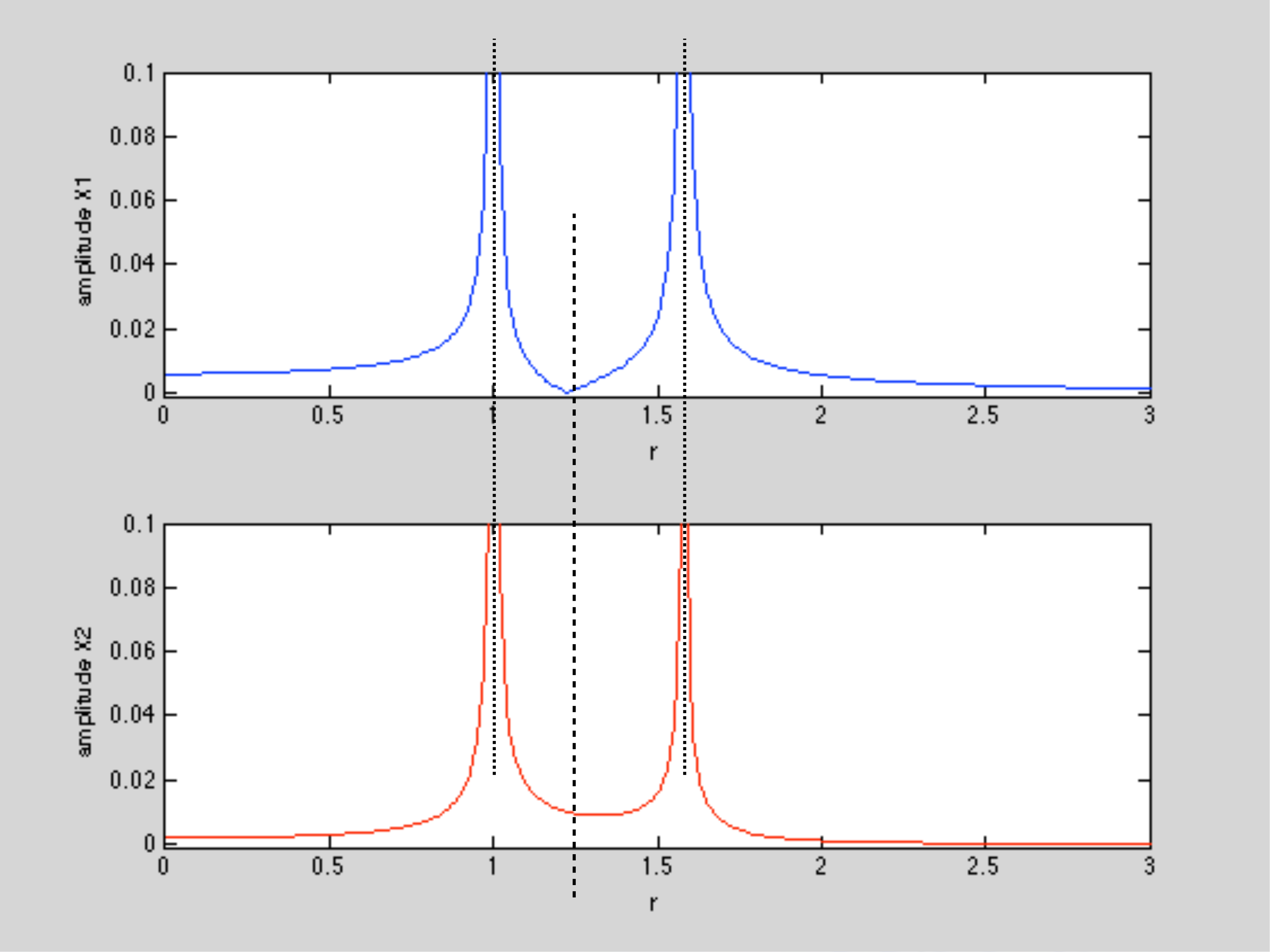
$$\Delta = \left(2k-\Omega^2 m\right)\left(3k-\Omega^2 2m\right)+k^2$$
$$= 2m^2\Omega^4 - 7mk\Omega^2 + 5k^2$$

Determinante del sistema o
Polinomio Caratteristico

Le risposte dei due gradi di libertà dovuti alla forzante p_0 saranno:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k - \Omega^2 2m & k \\ k & 2k - \Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\left(3k - \Omega^2 2m\right) p_0}{\Delta} \\ X_2 = \dfrac{k p_0}{\Delta} \end{cases} \qquad \Delta = 2m^2\Omega^4 - 7mk\Omega^2 + 5k^2$$



Torna comodo plottare la risposta in funzione di $r=\Omega/\omega$..

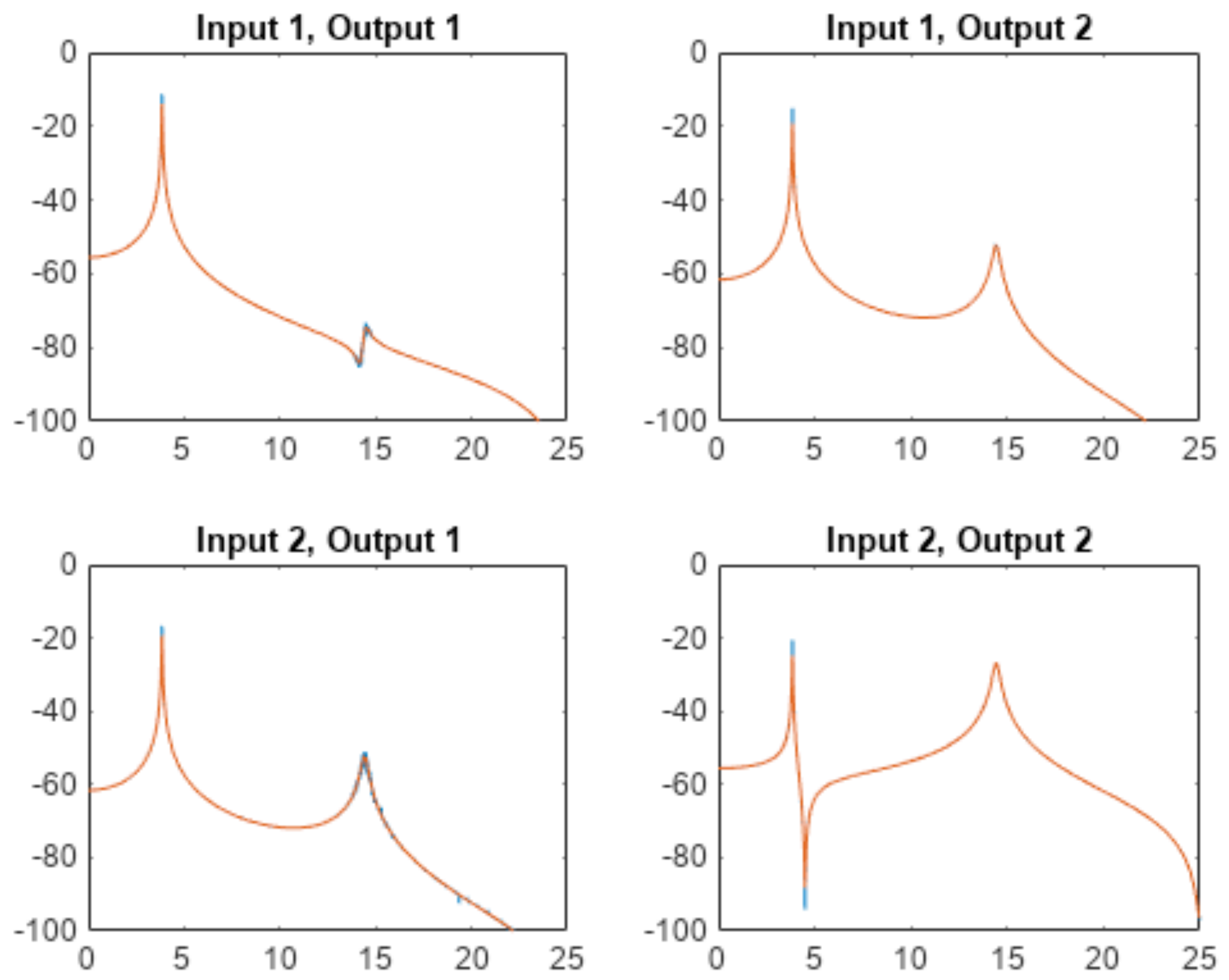
per alcuni valori di Ω, il numeratore va a zero
> **antirisonanza**, risposta va a zero,
massa 1 non si muove!! anche se c'è p_0 applicata nel punto 1
zeri del sistema

per alcuni valori di Ω, il denominatore va a zero
> **risonanza**, risposta va all'infinito (c=0)
poli del sistema

Da rimarcare il fatto che per un sistema a 2gdl, la matrice delle funzioni di risposta [H] è una matrice 2x2 (va da se che per un sistema a n GDL la matrice sarà NxN);

La matrice è simmetrica => $H_{ij}(\omega)=H_{ji}(\omega)$ (teorema Maxwell),
ciò deriva dal fatto che le matrici [m], [c] e [k] sono simmetriche
=> non serve calcolare tutte le NxN funzioni! (se n=100 basterà calcolarne 990, non 10000!)

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3k-\Omega^2 2m}{\Delta} & \dfrac{k}{\Delta} \\ \dfrac{k}{\Delta} & \dfrac{2k-\Omega^2 m}{\Delta} \end{bmatrix}$$



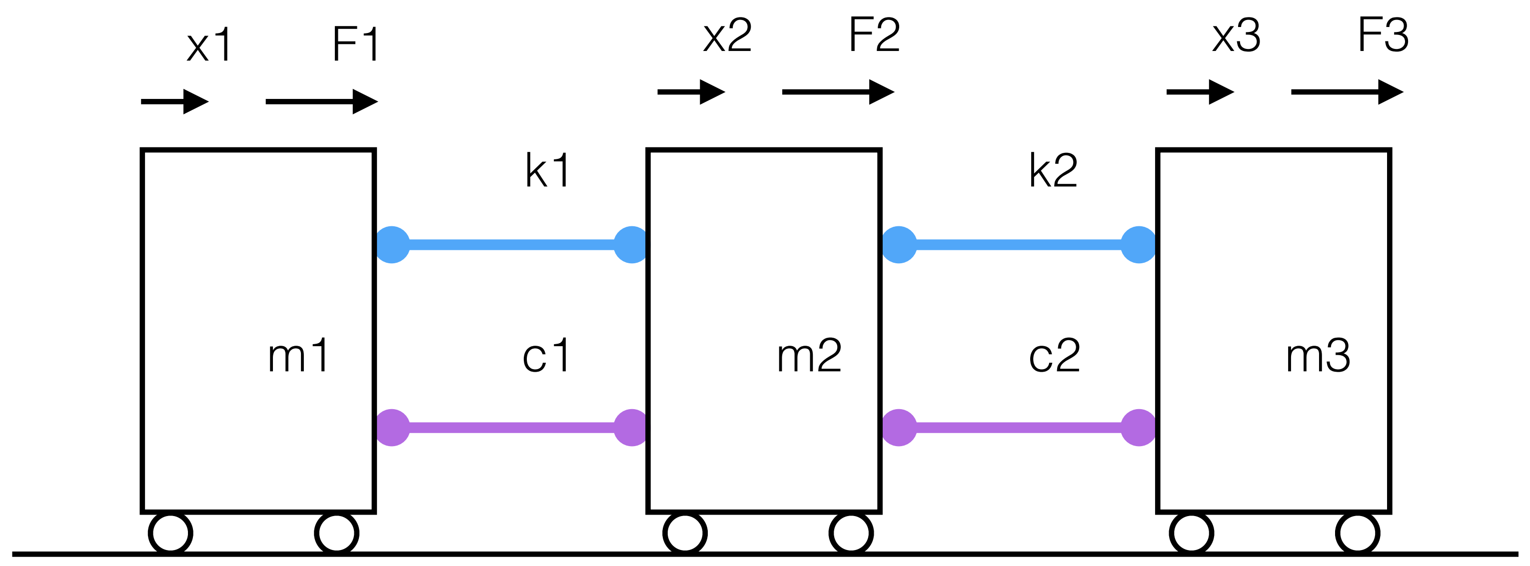
NB le righe della matrice [H] rappresentanti i punti di risposta, le colonne i punti di eccitazione!

NB gli elementi H_{ii} sono detti funzioni di risposta diretta
gli elementi H_{ij} funzioni di trasferimento

NB nelle funzioni di risposta diretta, si presentano risonanze e anti-risonanze in sequenza alternata

Queste FRF non sono attinenti all'esempio! provate a tracciarle voi!

Esempio sistema a 3gdl, smorzato, forzato



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = f_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_3 - x_2) = f_3 \end{cases}$$

equazioni del moto accoppiate!

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Verificare che le matrici siano simmetriche!

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s^2X_1 \\ s^2X_2 \\ s^2X_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

con la trasformazione di Laplace

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + sc_1 + k_1 & -sc_1 - k_1 & 0 \\ -sc_1 - k_1 & m_2s^2 + s(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 & -sc_2 - k_2 \\ 0 & -sc_2 - k_2 & m_3s^2 + sc_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

La struttura è la solita: $[Z(s)]\, X(s) = F(s)$

frequenza

$$
[H(s)] = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} \quad F_1 \quad & \quad F_2 \quad & \quad F_3 \quad \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\dfrac{X_1(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_3(s)} \\[2ex]
\dfrac{X_2(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_3(s)} \\[2ex]
\dfrac{X_3(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_3(s)}
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} X_1 \\[4ex] X_2 \\[4ex] X_3 \end{array}
\end{array}
$$

$$[H(s)] = [Z(s)]^{-1} = \frac{adj[Z(s)]}{\det[Z(s)]}$$

..il Determinante è un polinomio in s^6 (3gdlx2)

$$
Det[Z(s)] = s^2 \begin{bmatrix}
s^4 m_1 m_2 m_3 + s^3 (m_2 m_3 c_1 + m_1 m_3 c_1 + m_1 m_2 c_2 + m_1 m_3 c_2) \\
+ s^2 (m_1 m_3 k_1 + m_1 m_3 k_2 + m_1 m_2 k_2 + m_2 m_3 k_1 + m_2 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_2 + m_1 c_1 c_2) \\
+ s (m_3 c_1 k_2 + m_2 c_2 k_1 + m_1 c_2 k_1 + m_1 c_1 k_2 + m_3 c_2 k_1 + m_2 c_1 k_2) \\
+ (m_1 c_1 k_2 + m_2 k_1 k_2 + m_3 k_1 k_2)
\end{bmatrix}
$$

Due soluzioni sono a s=0

>..?

cosa significa?

>..?

Cosa si può dire della matrice [k]?

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che i termini delle matrici [m] [c] [k] siano uguali per ogni indice i (es $m_1=m_2=m_3=m$) l'espressione del determinante (equazione caratteristica) si semplifica:

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+\boxed{s^3\left(4m^2c\right)}+s^2\left(4m^2k+3mc^2\right)+\boxed{s\left(6mck\right)}+3mk^2\right]$$

esponenti di s pari e dispari

Nel caso in cui lo smorzamento [c]=0 il determinate (equazione caratteristica) diventa:

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]$$

solo termini pari

cosa succede alle radici del polinomio?

> ..

dove si spostano le radica nel piano di Laplace?

>..

$$\frac{X_1}{F_1}=\frac{s^4m^2+s^2\,3mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_2}=\frac{s^4m^2+s^2\,2mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_3}{F_3}=\frac{s^4m^2+s^2\,3mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_2}=\frac{X_2}{F_1}=\frac{s^2mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_3}=\frac{X_3}{F_1}=\frac{k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_3}=\frac{X_3}{F_2}=\dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} s_{1,2}&=0\\ s_{3,4}&=\pm j\\ s_{5,6}&=\pm j\sqrt{3}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_{1,2}&=\pm j0.618\\ z_{3,4}&=\pm j1.618\end{aligned}}$$

$$\boxed{z_{1,2}=\pm j}$$

$$\boxed{z_{1,2}=/}$$

Poli (uguali per tutte le FRF)

$$\frac{X_i}{F_j}=\frac{f(m,c,k)}{0}\rightarrow\infty$$

Zeri (dipendenti dall'FRF)

$$\frac{X_i}{F_j}=\frac{0}{f(m,c,k)}\rightarrow 0$$

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{s^4 m^2 + s^2 3mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2 k\right) + 3mk^2\right]}$$

Si analizzi $H_{1,1}[s]$, nell'ipotesi che m=k=1 c=0

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{adj\left[Z_{1,1}(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]} = \frac{s^4 + 3s^2 + k^2}{s^2\left[s^4 + 4s^2 + 3\right]}$$

Si ottiene il rapporto di due polinomi, le cui radici sono ottenibili con il comando Matlab "roots"

radici del numeratore> **Zeri**

```
>>num= [1 0 3 0 1];
>>roots(num)
ans =
  -0.0000 + 1.6180i
  -0.0000 - 1.6180i
  -0.0000 + 0.6180i
  -0.0000 - 0.6180i
>>
```

$[1s^4+0s^3+3s^2+0s^1+1]$

4 radici, puramente immaginarie (smorzamento nullo), a due a due complesse coniugate
> **anti-risonanze** (della specifica funzione $H_{1,1}$)

radici del denominatore > **Poli**

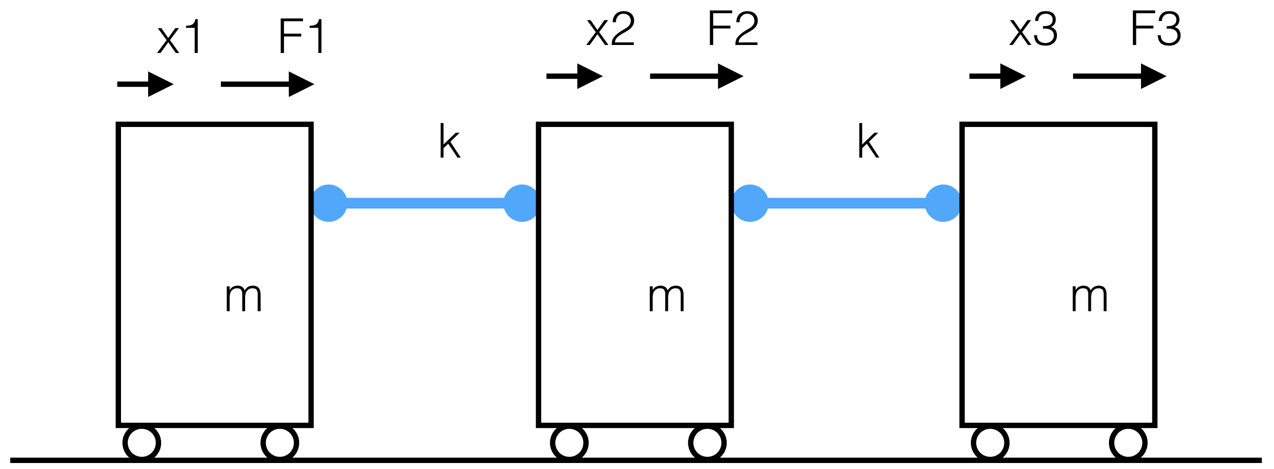
```
>> den=[1 0 4 0 3 0 0];
>>roots(den)
ans =
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.7321i
   0.0000 - 1.7321i
   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
>>
```

$[1s^6+0s^5+4s^4+0s^3+3s^2+0s^1+0]$

6 radici, puramente immaginarie (smorzamento nullo), a due a due complesse coniugate
> **risonanze** (di tutte le funzioni $H_{i,j}$)


```
plot(round(real(Rnum)),imag(Rnum),"go")
```

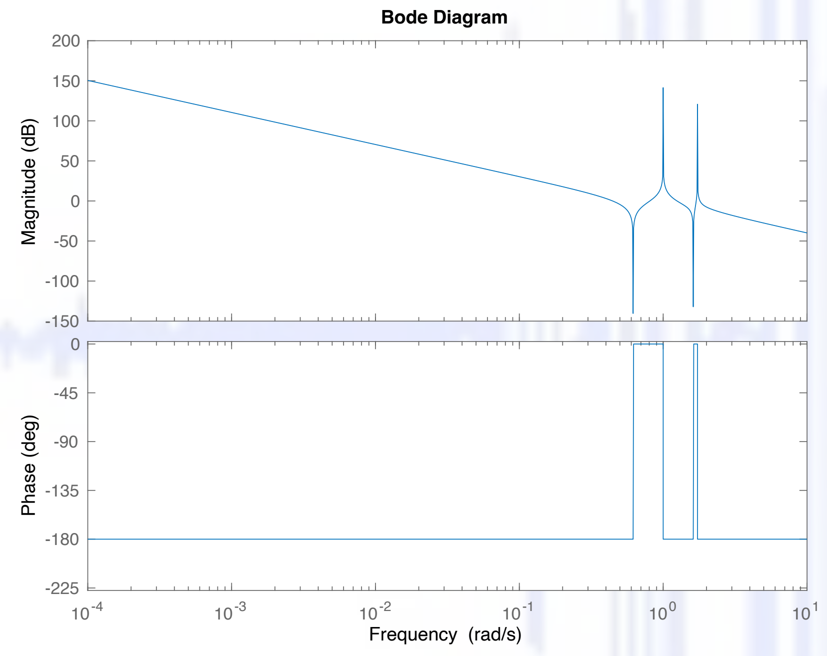
Le due radici a s=0 equivalgono ad un modo rigido in cui tutte le masse si muovono assieme (rigidamente) e non si deformano le molle!



Matrice [k] singolare, non ci sono vincoli con esterno!

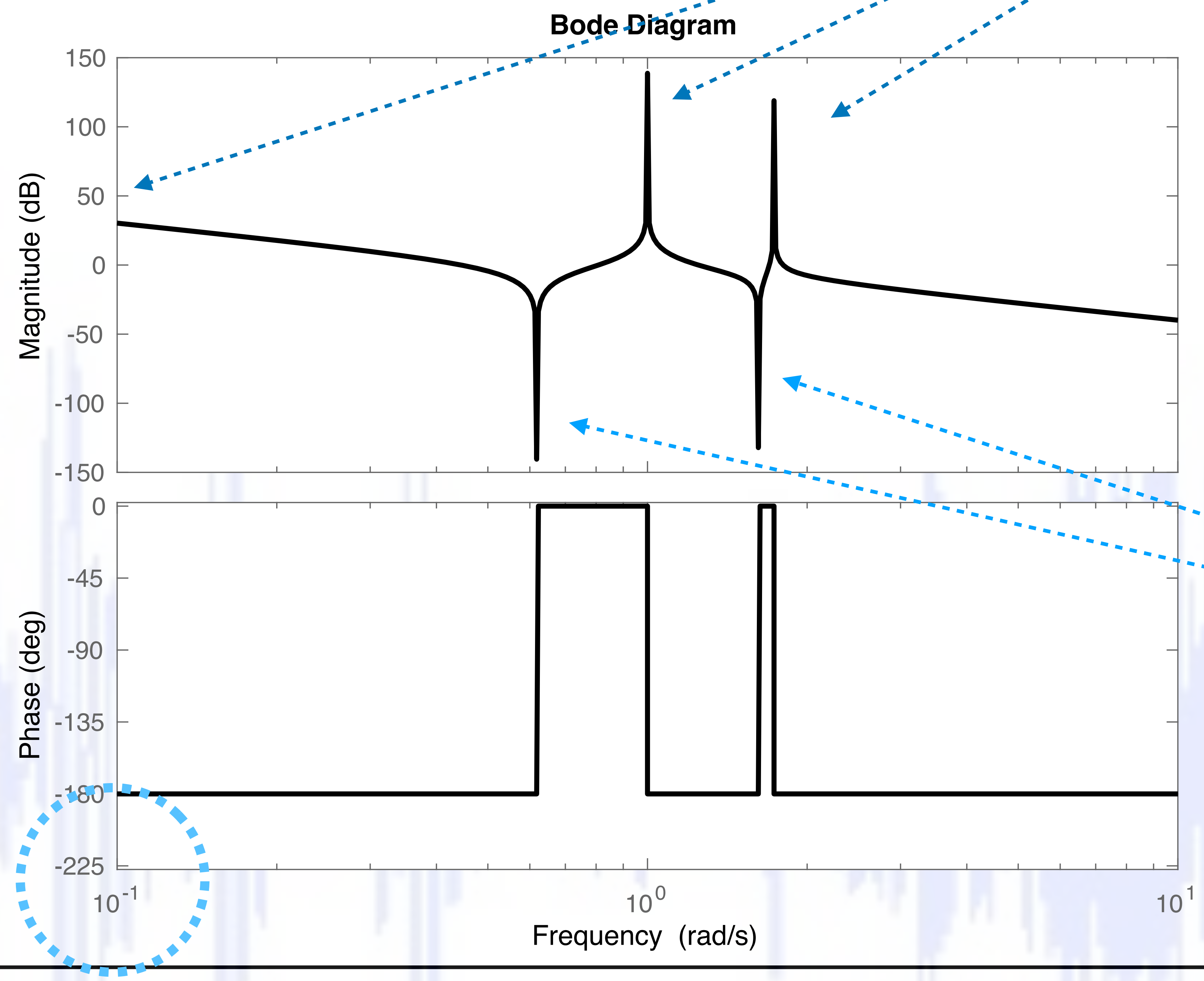
Per visualizzare la funzione di trasferimento, si possono usare i comandi Matlab “tf” e “bode"

```
>>sys=tf(num,den)
sys =

   s^4 + 3 s^2 + 1
  -------------------
  s^6 + 4 s^4 + 3 s^2

Continuous-time transfer function.
>> bode(sys)
```



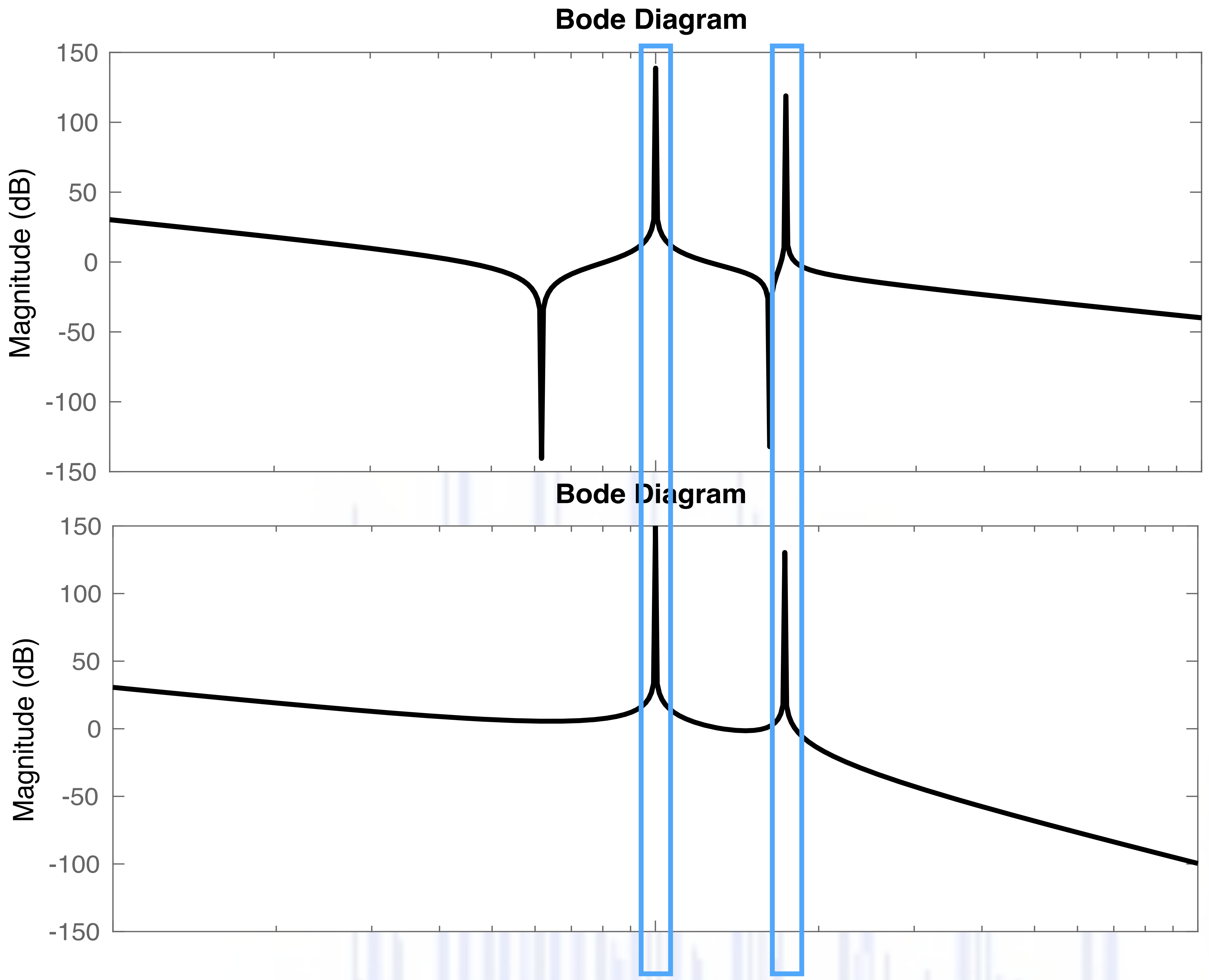
NB attenzione ai limiti dell’asse X

Risonanze



Anti-Risonanze

NB grafico è logaritmico sia sull’asse X che Y



$H_{1,1}$ funzione di trasferimento diretta

$H_{1,2}$ funzione di trasferimento

Come sono le altre $H_{i,j}$
>..?

Come cambia l'FRF con
altri formati di rappresentazione
>..?

La posizione delle risonanze non cambia!

Provate a calcolare $H_{i,j}$ e risposte di altri sistemi
non/vincolati non/smorzati non/forzati

★ Le funzioni di trasferimento di riducono ad un rapporto tra polinomi.
Da questa rappresentazione è possibile passare ad altre, in particolare alla ZPK (zero poli guadagno)
o a quella con i Residui

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = \frac{A_1 s^p + A_2 s^{p-1} + A_3 s^{p-3} \ldots}{B_1 s^q + B_2 s^{q-1} \ldots}$$

Polinomio in s ordine p

Polinomio in s ordine q

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots}$$

Guadagno

Zeri

Poli

$$H_{i,j}(s) = \frac{adj\left[Z_{i,j}(s)\right]}{det\left[Z(s)\right]} = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{i,j,r}}{s-p_r} + \frac{A^*_{i,j,r}}{s-p^*_r}$$

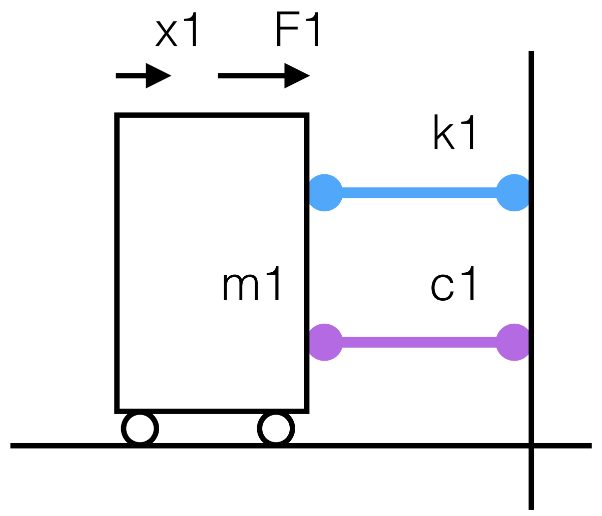
Residui

Poli

..più dettagli nella parte modale

..la scelta della rappresentazione dipende dall'analisi richiesta

Esempio sistema 1gdl, smorzato, forzato



Si ipotizzi:
m=1
c=.1
k=100

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(m_1 s^2+c_1 s+k_1\right)}=\frac{1}{\left(s^2+.1s+100\right)}$$

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(s+\underbrace{0.05-j*9.999}_{p_1}\right)\left(s+\underbrace{0.05+j*9.999}_{p_1^*}\right)}$$

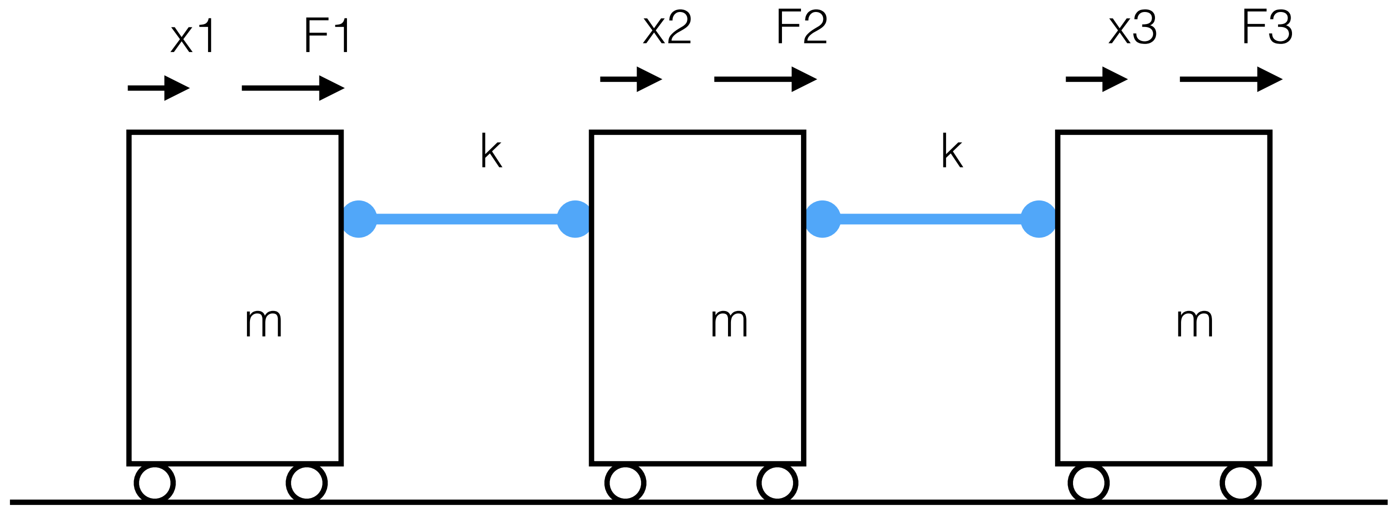
```
>>den=[1 .1 100]
>>roots(den)
```

p_1 -0.0500 + 9.9999i
p_1^* -0.0500 - 9.9999i

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{-j*0.05}{(s+\underbrace{0.5-j*9.999}_{p_1})}+\frac{+j*.005}{(s+\underbrace{0.5+j*9.999}_{p_1^*})}$$

Esempio sistema 3gdl, non smorzato, forzato

Si ipotizzi:
m=1
c=0
k=1



$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^2\left[s^4 + 4s^2 + 3\right]}$$

```
>>num=[1 0 3 0 1]
>>roots(num)
  0.000+1.6180i
  0.000-1.6180i
  0.000+0.6810i
  0.000-0.6810i
```

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{(s+j*1.618)(s-j*1.618)(s+j*0.618)(s-j*0.618)}{s^2(s+j*1.732)(s-j*1.732)(s+j)(s-j)}$$

```
>>den=[1 0 4 0 3 0 0 0]
>>roots(den)
  0.000+0.0000i
  0.000-0,0000i
  0.000+1.7321i
  0.000-1.7321i
  0.000+1,0000i
  0.000+1.0000i
```

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{-j*0.0481}{(s+j*1.732)} + \frac{j*0.0481}{(s-j*1.732)} + \frac{-j*0.25}{(s+j)} + \frac{j*0.25}{(s-j)} + \frac{0.33}{s}$$

Le equazioni del moto di sistemi MDOF sono solitamente accoppiate (matrici hanno termini fuori diagonali diversi da zero), questo richiede che la soluzione, soddisfi contemporaneamente tutte le equazioni del sistema. …potrebbe diventare difficile / oneroso trovarla in termini di tempo e computazionali!

E' possibile disaccoppiare le equazioni con un'opportuna trasformazione di coordinate, rendendo le N equazioni indipendenti ! => più facili da risolvere!!

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

La trasformazione di coordinate utilizzata è quella "modale" in cui le coordinate fisiche vengono mappate in quelle modali tramite le forme modali

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

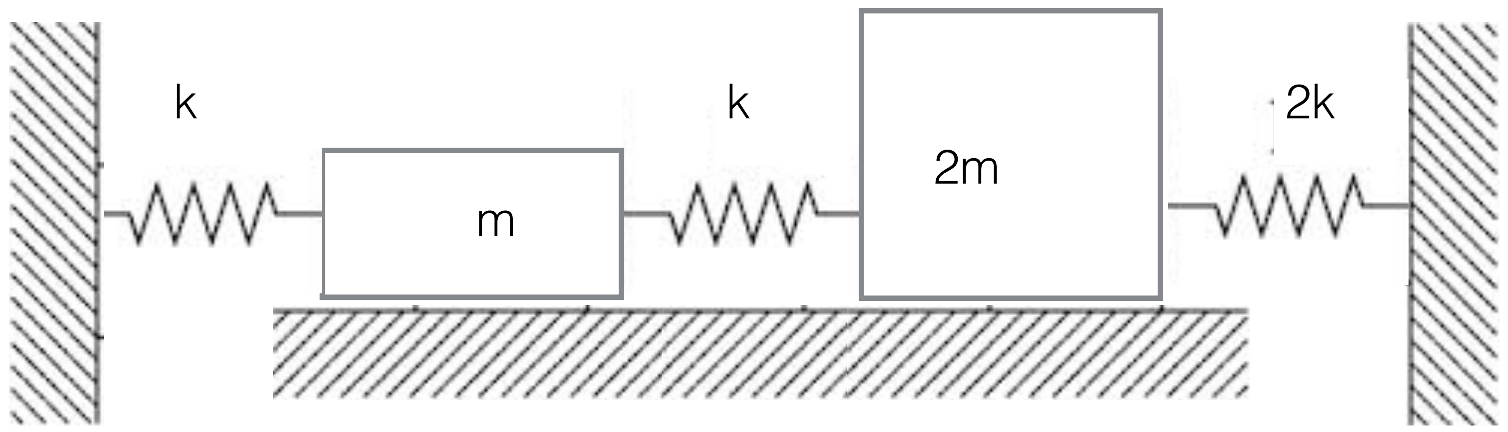
Coordinate Fisiche

Matrice Modale (colonne sono le deformate modali)

Coordinate Modali (virtuali)

Quello che manca è la definizione della deformata modale!

La deformata modale è la deformata del sistema associata ad una specifica frequenza naturale
(sistema di ordine N >> 2N frequenze naturali (complesse coniugate)
>> 2N deformate modali (complesse coniugate))



Esempio sistema 2dgl, non smorzato

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

le equazioni del moto

$$\left[k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \omega^2 m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

con la trasformazione di Laplace

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right]\{X\} = 0$$

L'equazione può essere moltiplicata* per $[k]^{-1}$ o per $[m]^{-1}$ per ottenere la struttura tipica del problema agli autovalori

$$\left[[k]^{-1}[k] - \omega^2[k]^{-1}[m]\right]\{X\} = 0 \qquad \left[[k]^{-1}[m] - \frac{1}{\omega^2}[I]\right]\{X\} = 0$$

$$\left[[m]^{-1}[k] - \omega^2[m]^{-1}[m]\right]\{X\} = 0 \qquad \left[[m]^{-1}[k] - \omega^2[I]\right]\{X\} = 0$$

* deve esistere l'inversa!!
..matrice non singolare

In entrambi i casi si ottiene una struttura del tipo: $\Big[[A]-\lambda[I]\Big]\{X\}=0$ $\quad [A]\{X\}=\lambda\{X\}$

Problema AutoValori - AutoVettori (si riguardi il corso di Geometria per i dettagli)

$$\Big[[k]-\omega^2[m]\Big]\{X\}=0$$

Di questa equazione non ci interessa la soluzione banale {X}=0 per la quale gli spostamenti sono nulli! ma quella in cui ω annulla la matrice a sx dell'equazione

$$\Big[[k]-\omega^2[m]\Big]=0$$

$$\Big|[k]-\omega^2[m]\Big|=0$$

Ciò equivale a trovare gli 0 del determinante della matrice! (matrice di rigidezza dinamica già vista)

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\omega^2 2m \end{vmatrix}=0$$

ossia gli zeri dell'equazione caratteristica!

$$(2k-\omega^2 m)(3k-\omega^2 2m)-(-k)(-k)=0$$

se m=1 e k=1..

$$2\omega^4-7\omega^2+5=0$$

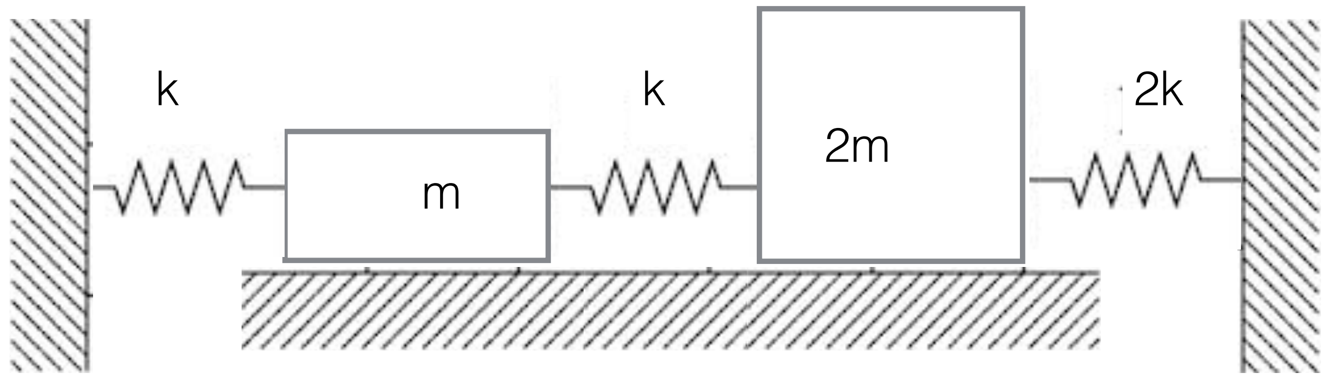
$$\omega^2_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm 3}{4}= \begin{cases} =1 \\ =\frac{10}{4}=2.5 \end{cases}$$

```
>> k=[2 -1; -1 3];
>> m=[1 0; 0 2];
>> [eig_vettori,eig_valori]=eig(k,m)
eig_vettori =
  -0.5774   -0.8165
  -0.5774    0.4082
eig_valori =
   1.0000        0
        0    2.500
>>
```

ricordarsi lo scalaggio

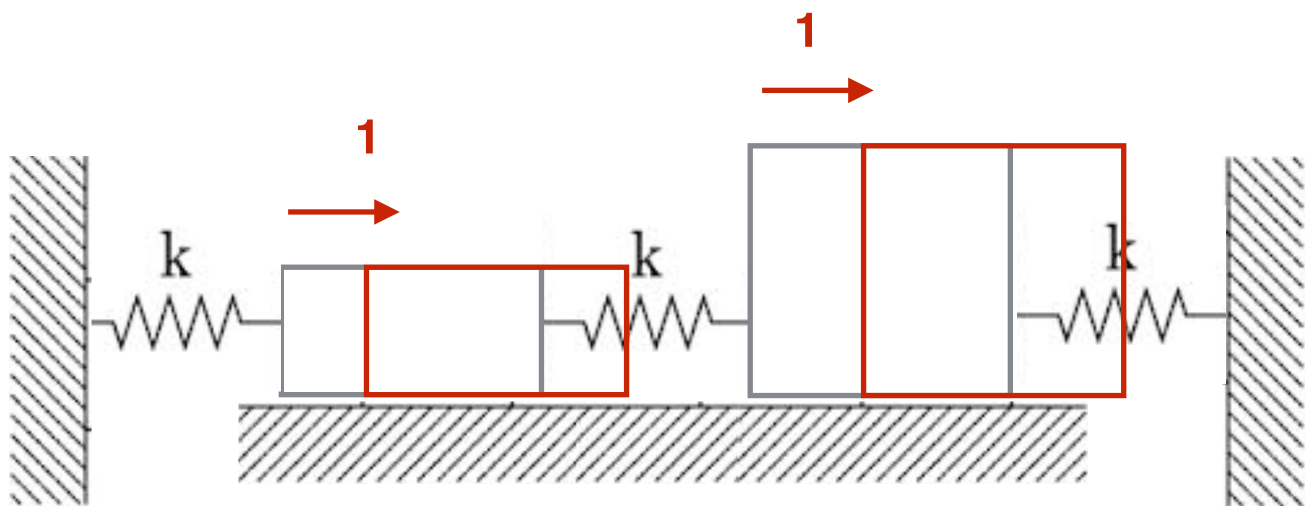
ricordarsi w²

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono gli autovalori del sistema e contemporaneamente le frequenze naturali.



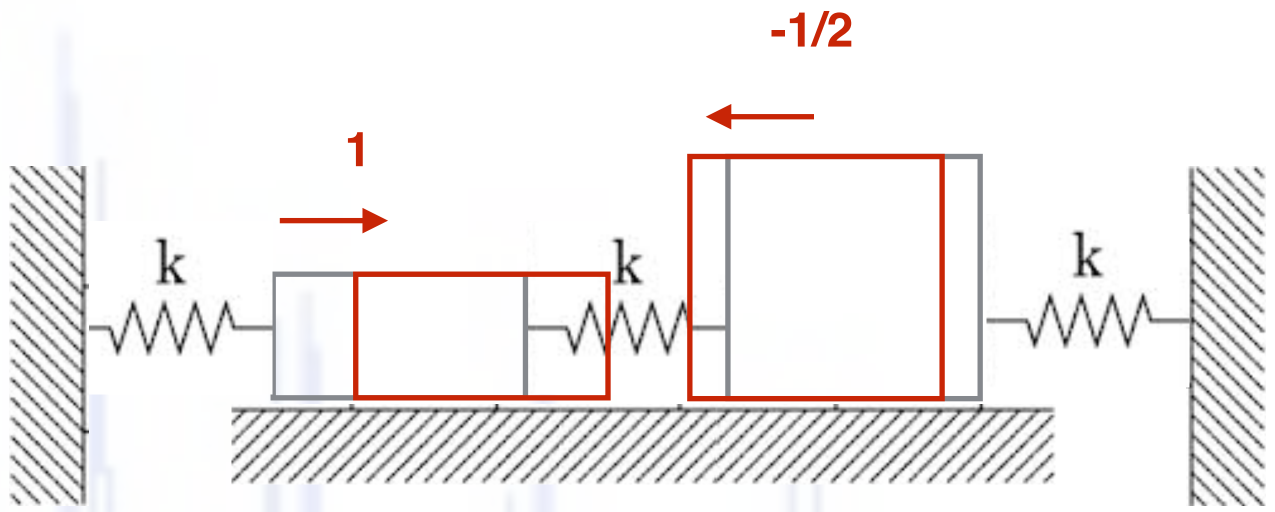
Gli autovettori associati a detti autovalori sono le deformate del sistema alle frequenze naturali…le deformate modali cercate!

@1rad/s $\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$



Le due masse si muovono in fase

@ 2.5rad/s $\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$



Le due masse si muovono in opposizione di fase

Ordinando per colonne le deformate modali in una matrice, si ottiene la matrice modale [Φ] alla base della trasformazione cercata!

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(NB il sistema ha 2DOF
>due pulsazioni naturali e due modi di vibrare
la pulsazione ha unità di misura, il modo di vibrare, no!)

Nota che sia la matrice modale è possibile disaccoppiare le equazione del sistema con la seguente procedura:

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

equazione del moto in coordinate fisiche (Accoppiate)

$$\{x\}=[\phi]\{q\}$$

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[c][\phi]\{\dot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{f\}$$

trasformazione di coordinate (vale anche per le derivate !)

$$[\phi]^t[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[\phi]^t[c][\phi]\{\dot{q}\}+[\phi]^t[k][\phi]\{q\}=[\phi]^t\{f\}$$

moltiplicazione per la matrice modale trasposta

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}$$

equazione del moto in coordinate modali (Disaccoppate)

$$[\phi]^t[m][\phi]=[M] \qquad [\phi]^t[c][\phi]=[C] \qquad [\phi]^t[k][\phi]=[K] \qquad [\phi]^t\{f\}=\{F\}$$

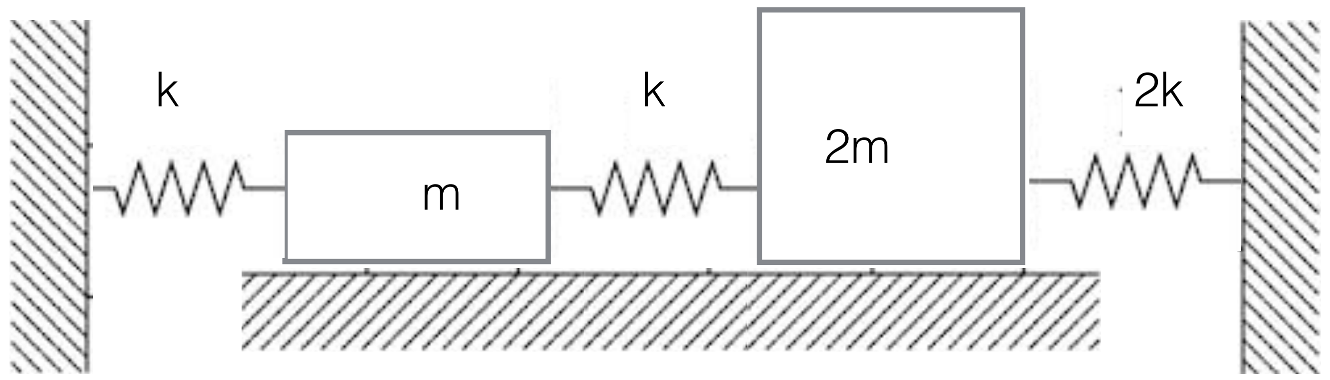
massa modale

smorzamento modale

rigidezza modale

forzante modale

Esempio
(ipotizzando m=1 e k=1..)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

equazione del moto in coordinate fisiche (Accoppiate)

$$\{x\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \{q\}$$

trasformazione di coordinate e
moltiplicazione per la matrice modale trasposta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \tfrac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \tfrac{15}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

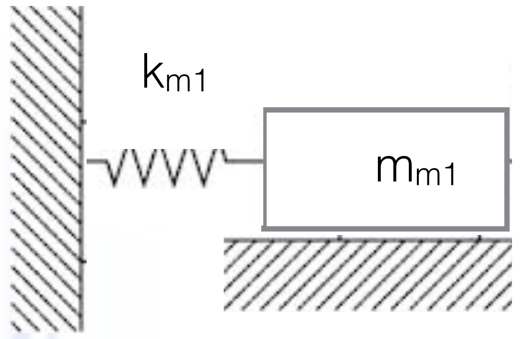
equazione del moto in coordinate modali (Disaccoppiate)

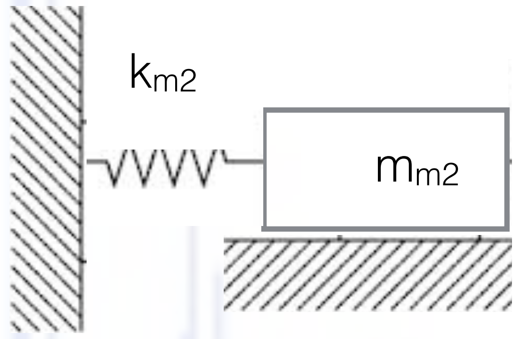
Luigi BREGANT
bregant@units.it

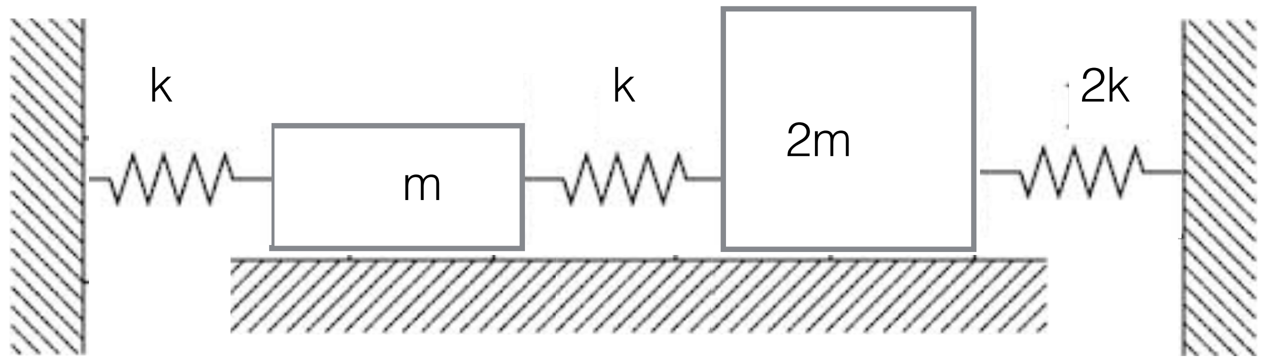
Si ottengono in questo modo due equazioni indipendenti, che descrivono due sistemi a 1 gdl! (facili facili da risolvere)

$$3\ddot{q}_1 + 3q_1 = 0$$

$$\frac{3}{2}\ddot{q}_2 + \frac{15}{4}q_2 = 0$$

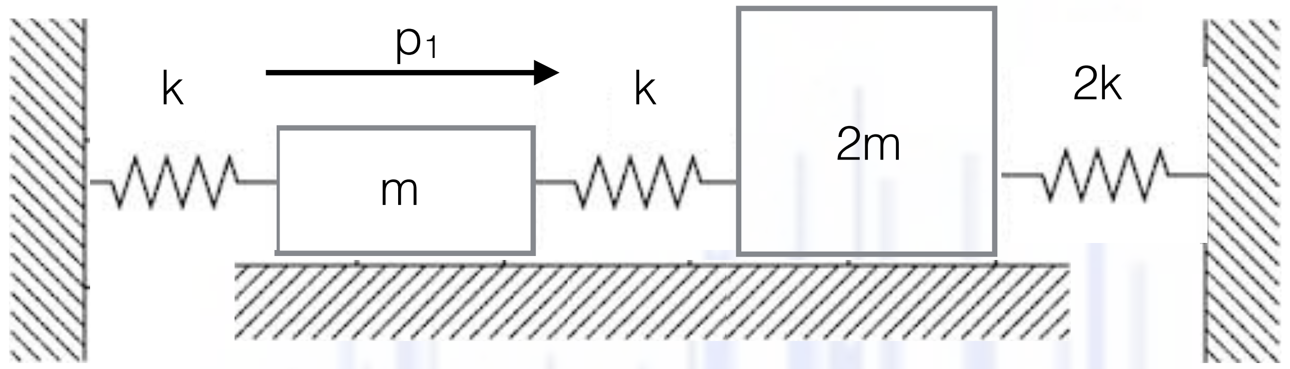






$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La trasformazione modale appena vista vale anche per le forzanti!



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

..e vale anche per le condizioni iniziali

..come si gestiscono le condizioni iniziali > parte 3

La risposta del sistema in coordinate fisiche si ottiene, per combinazione lineare, dalle risposte dei sistemi 1gdl in coordinate modali!

$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \frac{1}{2} q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 + 3kq_1 = p_0 \cos \Omega t \\ 3/2\, m\ddot{q}_2 + 15/4\, kq_2 = p_0 \cos \Omega t \end{cases}$$

Con l'usuale soluzione armonica di primo tentativo: $q_i = Y_i \cos \Omega t$

$$\begin{cases} \left(3k - 3m\Omega^2\right) Y_1 = p_0 \\ \left(15/4\, k - 3/2\, m\Omega^2\right) Y_2 = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{p_0}{\left(3k - 3m\Omega^2\right)} = \dfrac{1/3\, kp_0}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \\ Y_2 = \dfrac{p_0}{\left(15/4\, k - 3/2\, m\Omega^2\right)} = \dfrac{4/15\, kp_0}{1 - \left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

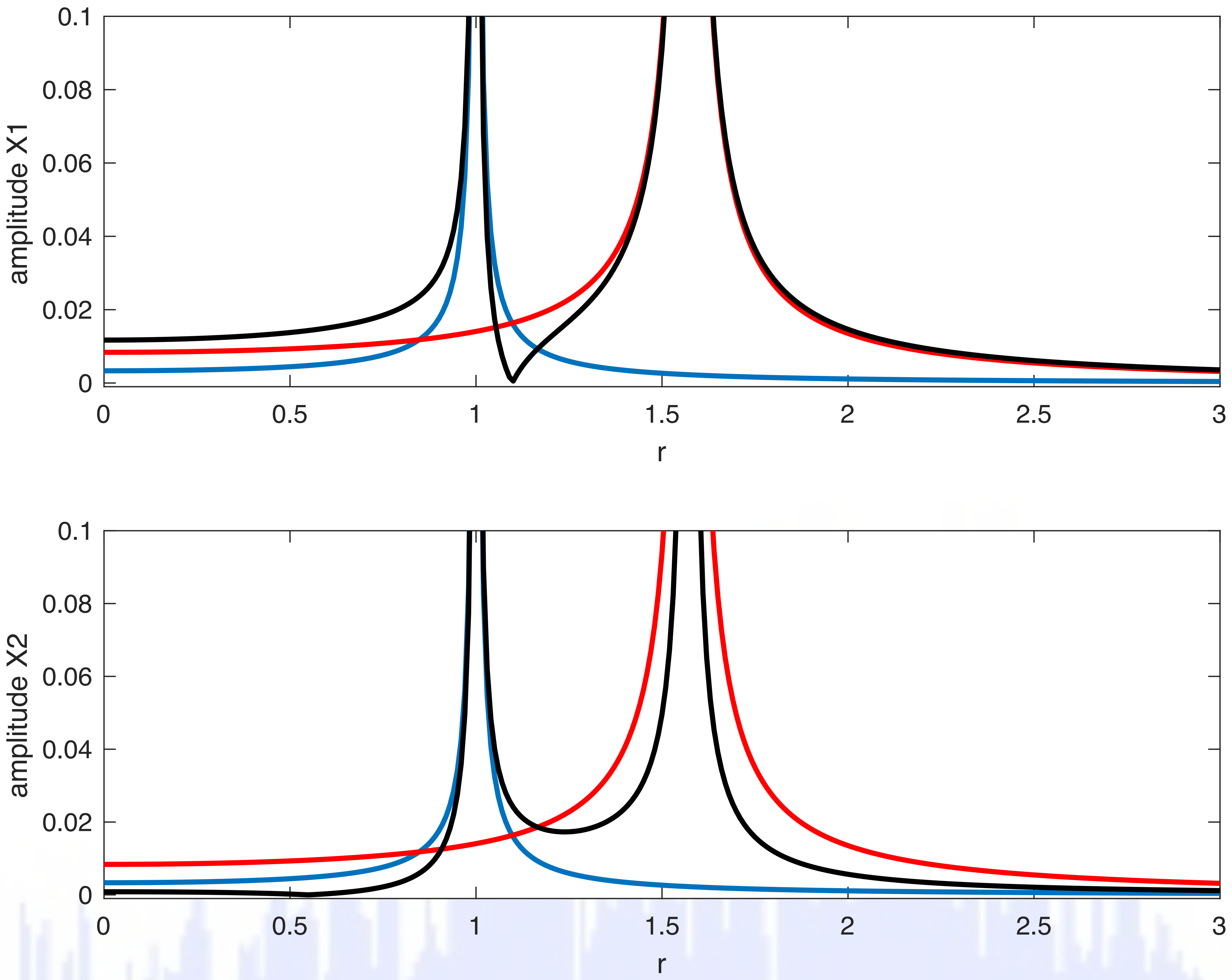
NB ci sono due risposte che dipendono dalle due frequenze naturali precedentemente identificate ω_1 e ω_2

La risposta del sistema in coordinate fisiche si ottiene combinando le risposte dei sistemi 1gdl in coordinate modali anche nel dominio della frequenza!

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 + Y_2 \\ Y_1 - \frac{1}{2} Y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\frac{1}{3} k p_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} + \dfrac{\frac{4}{15} k p_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \\[2ex] X_2 = \dfrac{\frac{1}{3} k p_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{4}{15} k p_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

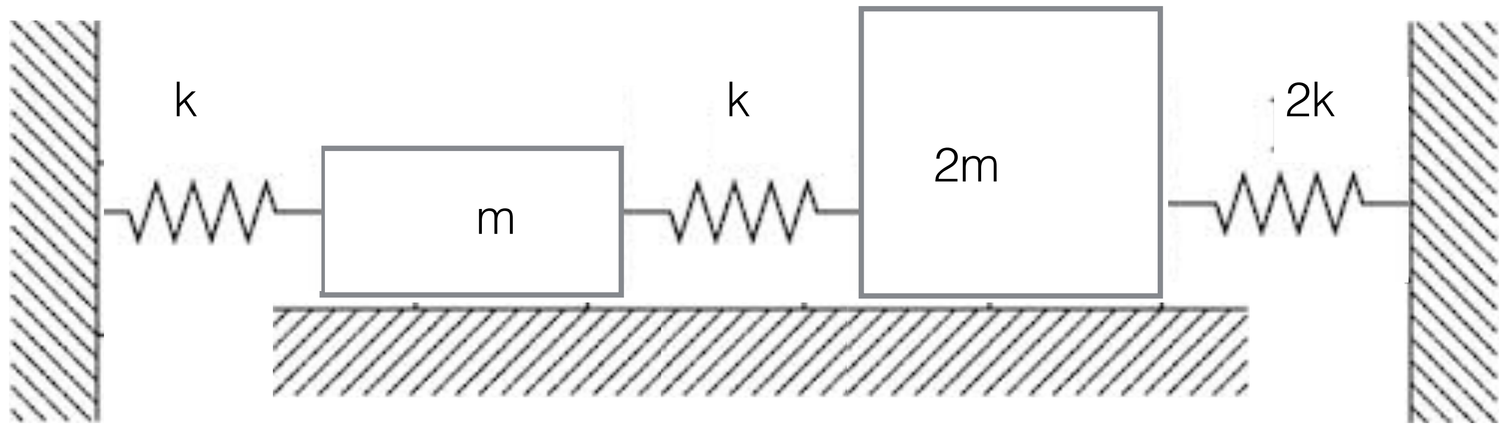
Si confronti questo con il grafico nella sezione Funzioni di Trasferimento



In un sistema a 2dgl ci sono due frequenze naturali (4, a due a due complesse coniugate) due forme modali (4, a due a due complesse coniugate)

Come si valutano gli autovettori associati ai diversi autovalori?
(gli autovalori sono gli zeri dell'equazione caratteristica..)

Si ipotizzi:
m=1
c=0
k=1



$$\left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\omega_i^2 & -1 \\ -1 & 3-\omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Sostituendo i valori di ω trovati ($\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=2.5$) ad esempio nella prima equazione:

$$(2-\omega_i^2)X_1 - X_2 = 0$$

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = (2-\omega_i^2)$$

$$\beta_1 = \frac{X_2}{X_1} = (2-1) = 1$$

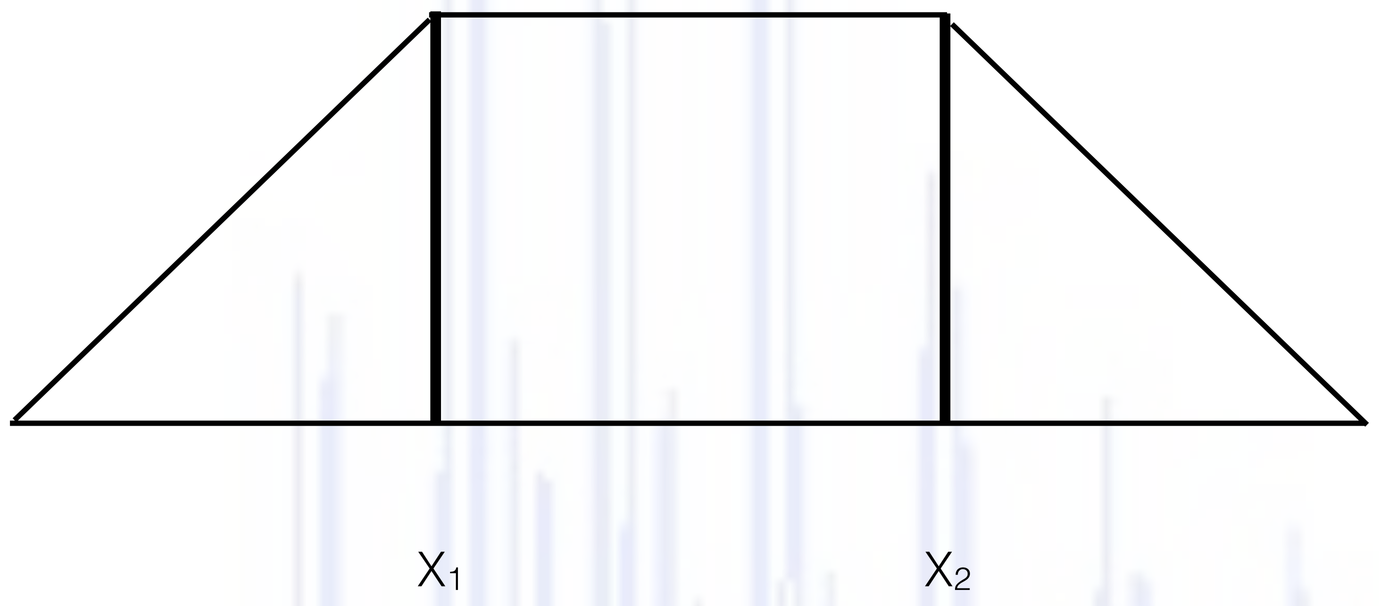
$$\beta_2 = \frac{X_2}{X_1} = (2-2.5) = -0.5$$

NB si trovano dei rapporti tra spostamenti, non valori assoluti!

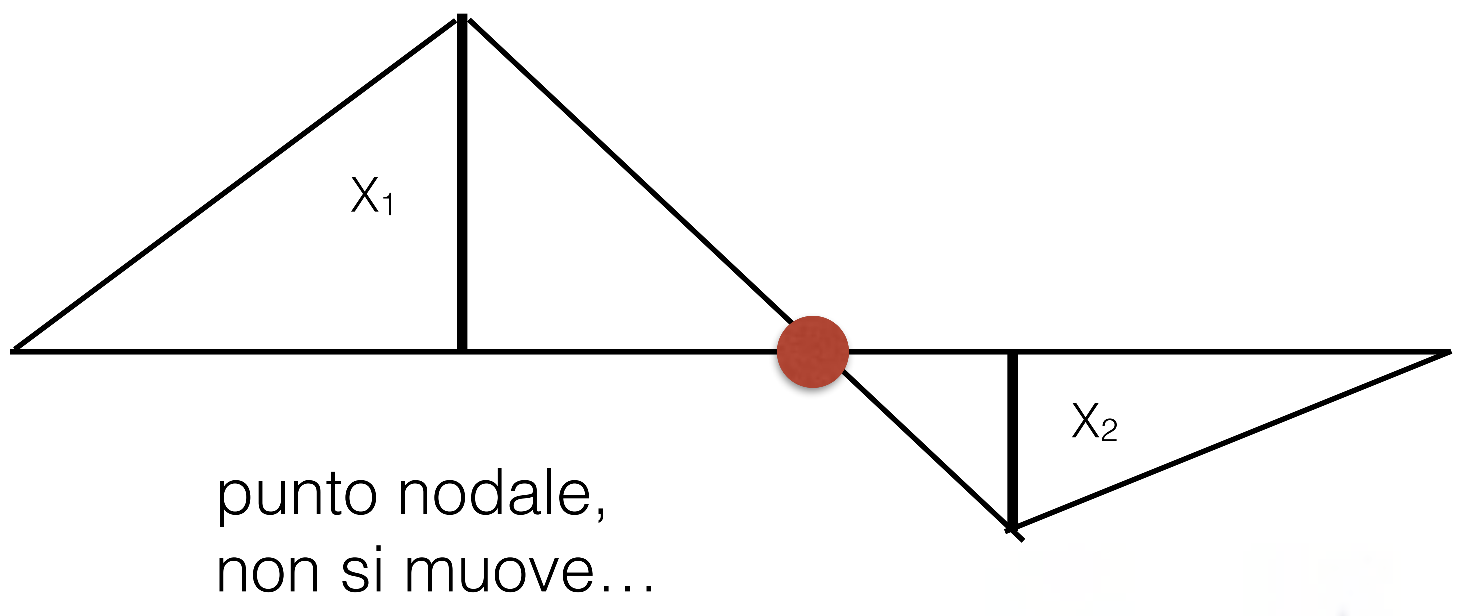
Perche?
>..?

Per valutare la deformata, si assegna un valore arbitrario a
X_1 e con il rapporto βi, si trova l’altro elemento dell’autovettore X_2

$$X_1 = 1 \quad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_2 X_1 = -0.5 * 1 = -0.5$$



Gli autovettori sono definito a meno di una costante moltiplicativa
(Si ricordi che gli autovalori annullano il deteminante del sistema! > matrice sistema rango (n-1))

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.34589 \\ 0.34589 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{271} \\ -\frac{3}{271} \end{Bmatrix}$$

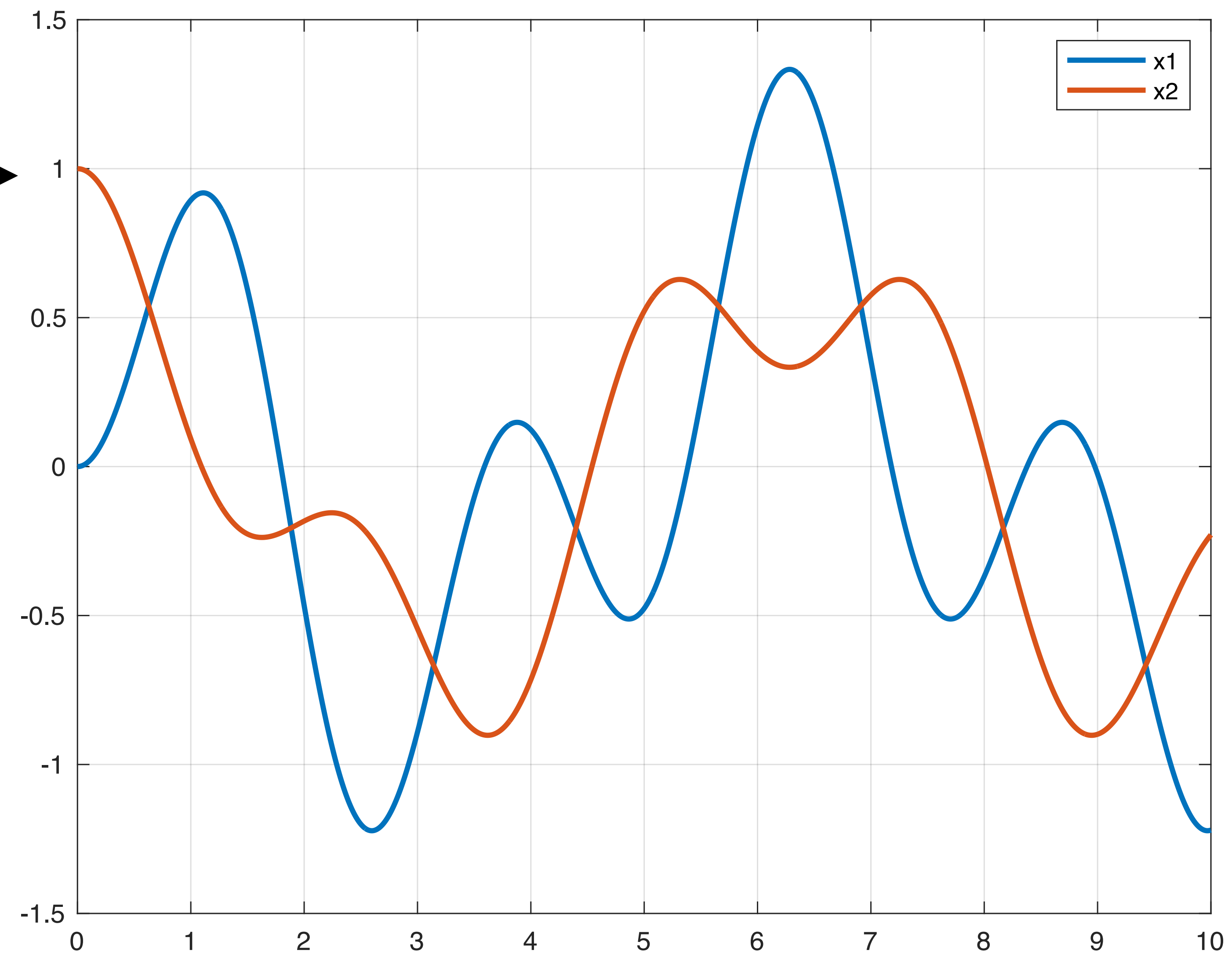
Questi vettori rappresentano tutti la stessa deformata!!

Come scalarli?

..come si scalano gli autovettori > parte 3

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Per calcolare la risposta del sistema in coordinate fisiche si sfruttano i coefficienti di scalaggio βi e le condizioni iniziali del sistema



$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = X_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t) + A_2 cos(\omega_2 t) + B_2 sin(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 sen(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

soluzione generica

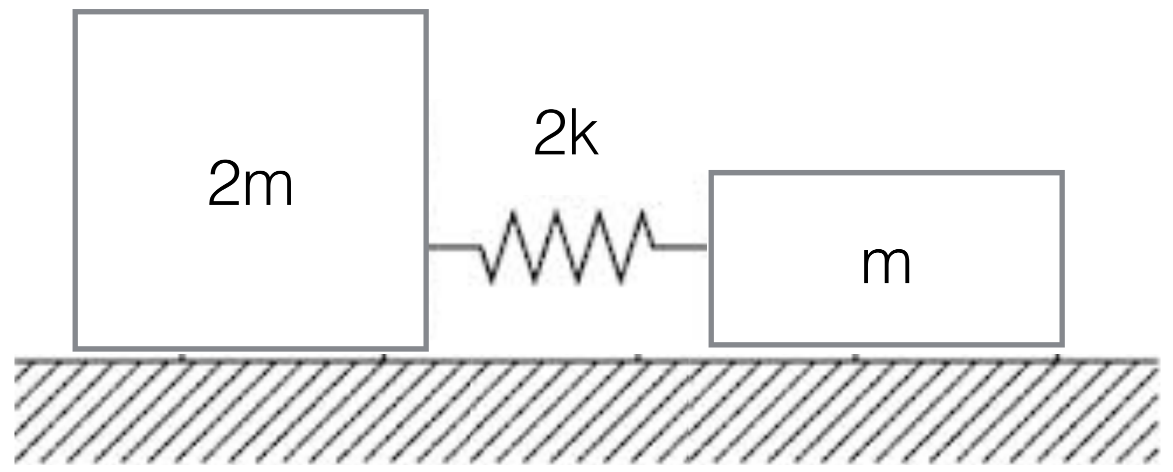
$$\begin{cases} x_1 = A_1 + A_2 = 0 \\ x_2 = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \beta_1 B_1 \omega_1 + \beta_2 B_2 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{2}{3} \quad A_2 = -\frac{2}{3} \quad B_1 = 0 \quad B_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} cos(\omega_1 t) - \frac{2}{3} cos(\omega_2 t) \\ x_2 = \frac{2}{3} cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

..cambiando m,k cambieranno le ω_i,
cambiando le C.I. cambieranno i coefficienti A_i e B_i

Esempio sistema 2gdl non vincolato



cosa succede alla matrice di rigidezza?
>..?

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 2m & -2k \\ -2k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_i^2 m\left(2m\omega_i^2 - 6k\right) = 0$$

equazione caratteristica

$$\omega_i^2 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

Una pulsazione nulla..
cosa significa?
>..?

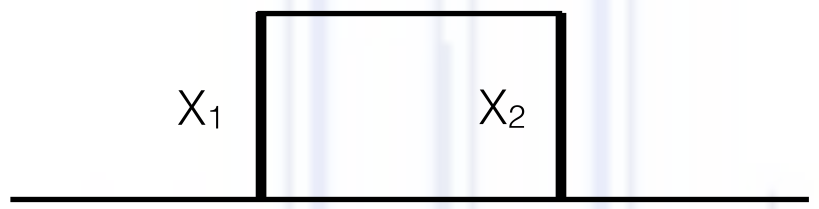
$$\left(2k - \omega_i^2 2m\right) X_1 - 2kX_2 = 0$$

dalla prima equazione, calcolo i rapporti βi

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - 2\omega_i^2 m}{2k} = 1 - \frac{\omega_i^2 m}{k} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

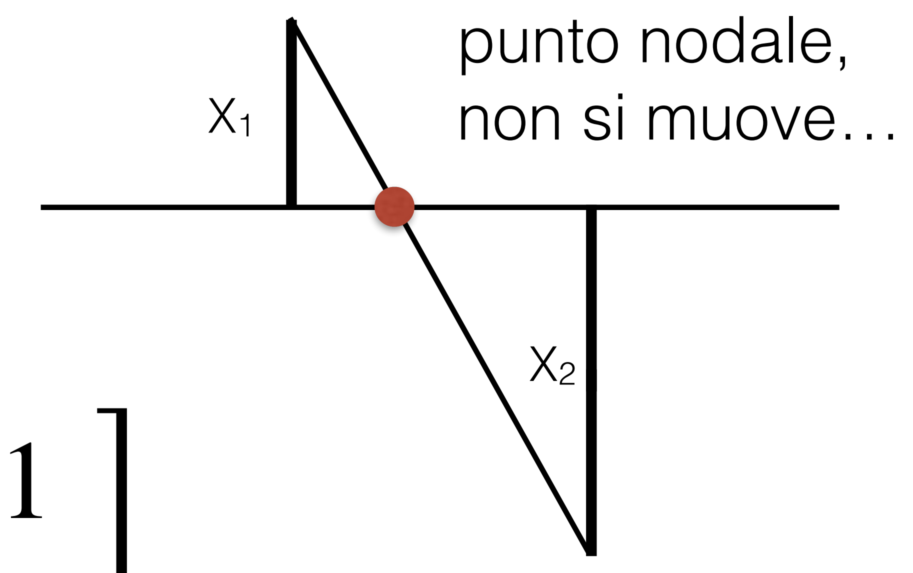
Con i rapporti βi descrivo le forme modali..

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



Moto Rigido!

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_2 X_1 = -\,2 * 1 = -\,2$$



Moto Elastico!

Con le forme modali si trova la matrice modale [Φ], da utilizzare per disaccoppiare le equazioni:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le equazioni sono disaccoppiate come desiderato!

Cosa succede se la matrice di smorzamento [c] è diversa da 0 ?

Se è proporzionale alle matrici di massa e rigidezza,

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

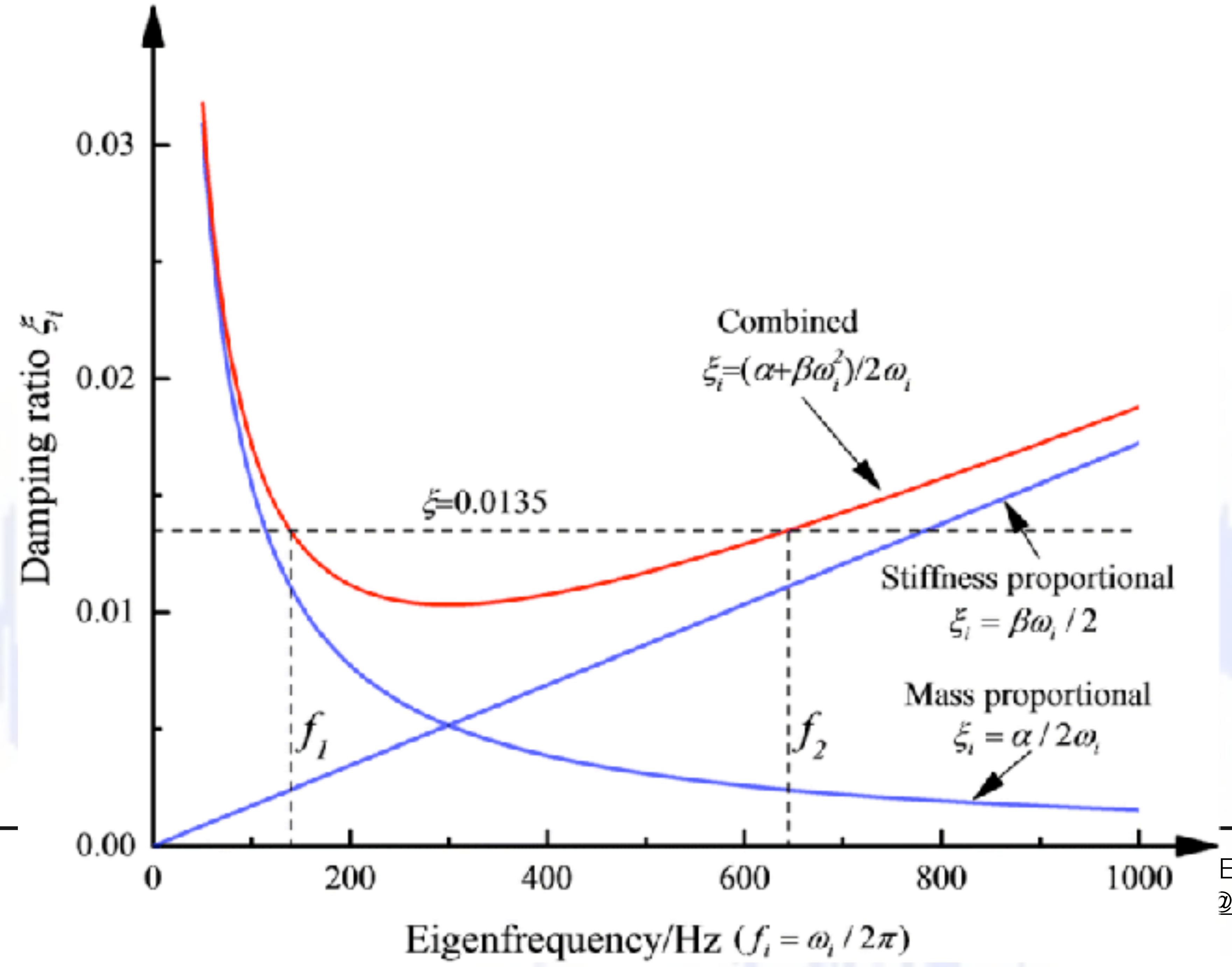
$$\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}\left[[m]^{-1}[k]\right]^{r} = \left[[m]^{-1}[k]\right]^{r}\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}$$ per ogni valore di r ed s

la trasformazione modale disaccoppia anche la matrice di smorzamento !

$$[\phi]^T[c][\phi] = \alpha[\phi]^T[m][\phi] + \beta[\phi]^T[k][\phi]$$

$$[\phi]^T[c][\phi] = \alpha[M] + \beta[K] = [C]$$

α e β sono comunemente usati nei codici FEM
per definire lo smorzamento del modello.
Agiscono differentemente in funzione della
frequenza! serve fare un po' di prove
per trovare i valori corretti per l'applicazione analizzata-
model updating!



..quale effetto hanno α, β sulle FRF calcolate con il FEM> parte 3

In sintesi i passaggi necessari per la trasformazione modale sono:

1. scrittura delle equazioni del moto (t)
2. applicazione della trasformazione di Laplace
3. scrittura equazioni del moto (s)
4. definizione matrice di rigidezza dinamica
5. identificazione zeri della matrice di rigidezza dinamica > autovalori λ_r
6. identificazione deformate in corrispondenza di λr > autovettori Φ_r
7. definizione della matrice modale [Φ]
8. calcolo matrici di massa smorzamento* rigidezza modale disaccoppiate

* *la matrice di smorzamento modale è diagonale se e sole se la matrice [c] è proporzionale alle matrici di massa [m] e rigidezza [k]*

Se ciò non accade il punto 8 non fornisce una matrice si smorzamento modale diagonale!
serve una procedura un po' diversa l'espazione di Duncan-Collar che richiede un passaggio ulteriore

1.1 scrittura delle equazioni del moto (t)
1.2 aggiunta di un identità
2. applicazione della trasformazione di Laplace
3. scrittura equazioni del moto (s)
…

$$[m]\dot{x} - [m]\dot{x} = 0$$

Cosi facendo all'orginale sistema di N equazioni se ne aggiunge un'altro di N equazioni

$$\begin{cases} [[m]p^2 + [c]p + [k]]\{X(p)\} = \{P(p)\} \\ [[m]p - [m]p]\{X(p)\} = 0 \end{cases}$$

passando da un sistema di ordine N in p^2

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

a un sistema di ordine 2N in p

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B]=\begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & -[k] \end{bmatrix} \quad \{Y\}=\begin{Bmatrix} p\{X\} \\ X \end{Bmatrix} \quad \{F\}=\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}$$

La matrice di rigidezza dinamica (punto 4) in questo caso è una matrice 2Nx2N ed i suoi zeri (punto5) saranno i 2N autovalori λ_r e λ_r^*

La matrice degli autovettori (punto 7) in questo caso è una matrice 2Nx2N in cui compaiano autovettori e autovettori moltiplicati per i rispettivi autovalori e tutti i complessi coniugati!

Qui riportate le nuove matrici degli autovalori e degli autovettori:

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_1^* & 0 & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & ... \end{bmatrix} \qquad [\Phi]=\begin{bmatrix} \lambda_1\{\phi_1\} & \lambda_2\{\phi_2\} & .. & \lambda_1^*\{\phi_1^*\} & \lambda_2^*\{\phi_2^*\} & .. \\ \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & .. & \{\phi_1^*\} & \{\phi_2^*\} & .. \end{bmatrix}$$

La nuova matrice [Φ] (2Nx2N) può essere utilizzata per disaccoppiare le equazioni del sistema (punto 8), con la seguente trasformazione

$$\{Y\}=[\Phi]\{Q\}$$

$$[p[A][\Phi]-[B][\Phi]]\{Q\}=\{F\}$$

$$[p[\Phi]^T[A][\Phi]-[\Phi]^T[B][\Phi]]\{Q\}=[\Phi]^T\{F\}$$

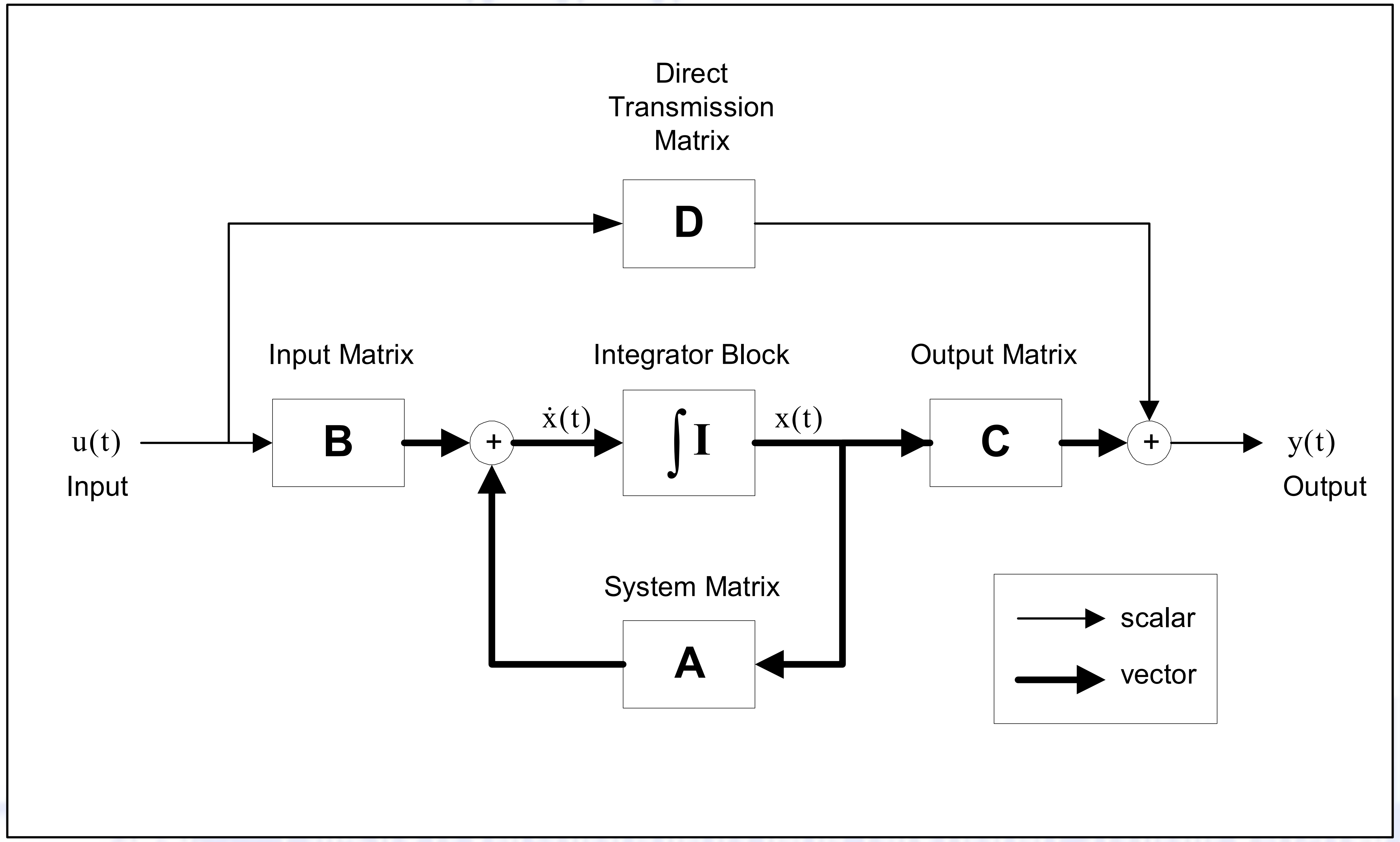
$$[p[a]-[b]]\{Q\}=[\Phi]^T\{F\}$$

essendo [a] e [b] matrici diagonali le equazioni sono disaccoppiate!

$[a]=[\Phi]^T[A][\Phi]$ modal a, è diagonale $\qquad [b]=[\Phi]^T[B][\Phi]$ modal b, è diagonale

Alla fine la rappresentazione stato-spazio.
Numericamente conviene lavorare con equazioni di ordine 1

Si trasforma nuovamente il sistema di N equazioni di grado 2
in un sistema di 2N equazioni di grado 1

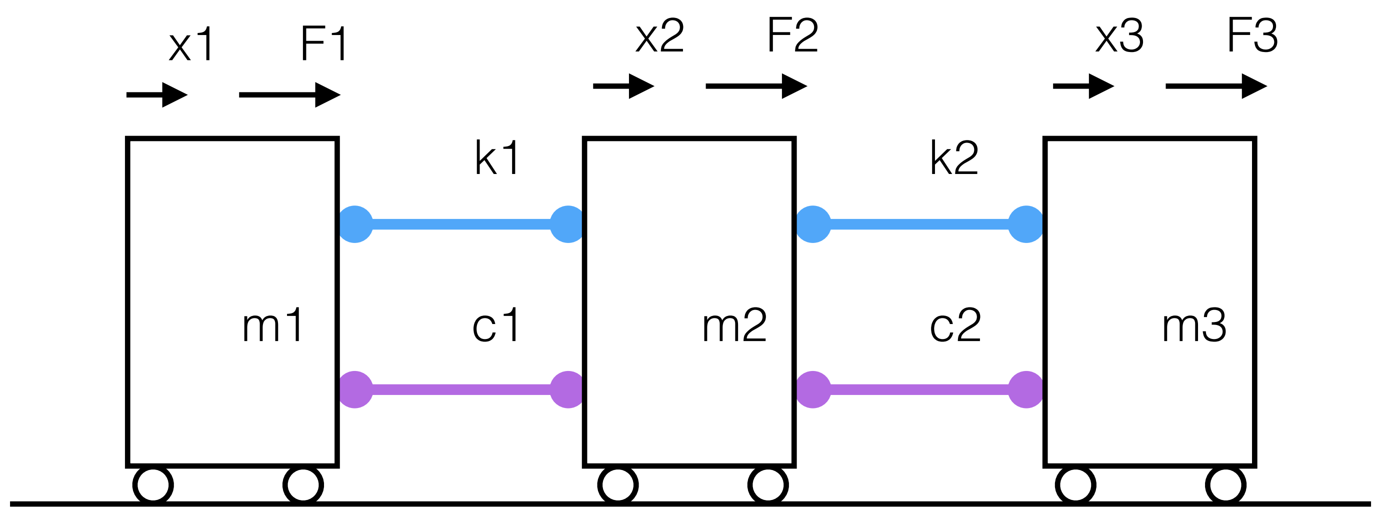


In questa rappresentazioni le matrici di sistema diventano 4: A, B, C, D queste permettono di descrivere più completamente il legame tra ingressi ed uscite del sistema

es. si può costruire variabile di uscita y_1 che descrive la differenza di velocità tra x_2 e x_4 che non sono tra loro fisicamente collegati

NB rifacciamo qualcosa di simile a quanto fatto
per l'espansione di Ducan Collar
e per l'integrazione numerica delle equazioni del moto

Esempio: sistema 3dgl, smorzato, forzato :



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

equazioni del moto

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \left(f_1 - c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 - k_1x_1 + k_1x_2\right)/m_1 \\ \ddot{x}_2 = \left(f_2 + c_1\dot{x}_1 - \left(c_1+c_2\right)\dot{x}_2 + k_1x_1 - \left(k_1+k_2\right)x_2 + k_2x_3\right)/m_2 \\ \ddot{x}_3 = \left(f_3 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_3 + k_2x_2 - k_2x_3\right)/m_3 \end{cases}$$

estrazione della derivata di ordine massimo

definizione
nuove variabili:
(vettore degli stati)

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = x_1 \\ \mathrm{x}_2 = \dot{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 = x_2 \\ \mathrm{x}_4 = \dot{x}_2 \\ \mathrm{x}_5 = x_3 \\ \mathrm{x}_6 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

riscrittura
equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_2 \\ \dot{\mathrm{x}}_2 = \left(f_1 - c_1\mathrm{x}_2 + c_1\mathrm{x}_4 - k_1\mathrm{x}_1 + k_1\mathrm{x}_3\right)/m_1 \\ \dot{\mathrm{x}}_3 = \mathrm{x}_4 \\ \dot{\mathrm{x}}_4 = \left(f_2 + c_1\mathrm{x}_2 - \left(c_1+c_2\right)\mathrm{x}_4 + k_1\mathrm{x}_1 - \left(k_1+k_2\right)\mathrm{x}_3 + k_2\mathrm{x}_5\right)/m_2 \\ \dot{\mathrm{x}}_5 = \mathrm{x}_6 \\ \dot{\mathrm{x}}_6 = \left(f_3 + c_2\mathrm{x}_4 - c_2\mathrm{x}_6 + k_2\mathrm{x}_3 - k_2\mathrm{x}_5\right)/m_3 \end{cases}$$

riordinando:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1/m_1 & -c_1/m_1 & k_1/m_1 & c_1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1/m_2 & c_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & -(c_1+c_2)/m_2 & k_2/m_2 & c_2/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2/m_3 & c_2/m_3 & -k_2/m_3 & -c_2/m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_1/m_1 \\ 0 \\ f_2/m_2 \\ 0 \\ f_3/m_3 \end{bmatrix} \{1\}$$

la struttura generale è: $\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$

$$\left(\lambda_i [I] - [A]\right) x_{m,i} = 0$$

La matrice di sistema è la [A], di dimensione 2Nx2N,
gli autovalori di questa matrice sono le frequenze naturali del sistema,
(la matrice sarà 2Nx2N con gli autovalori e i complessi coniugati)
gli autovettori, le deformate modali
(la matrice sarà 2Nx2N con gli autovettori, gli autovettori moltiplicati per i corrispettivi autovalori e tutti i loro complessi coniugati)

Da una rappresentazione si può passare ad un altra!..
Ad esempio dalla rappresentazione stato-spazio si può passare a quella delle risposte in frequenza:

$$\{\dot{\mathrm{x}}\} = [A]\{\mathrm{x}\} + [B]\{\mathrm{u}\}$$
$$\{\mathrm{y}\} = [C]\{\mathrm{x}\} + [D]\{\mathrm{u}\}$$

trascurando le C.I., con la trasformata di Laplace della prima equazioni:

$$s[I]\{X\} = [A]\{X\} + [B]\{U\}$$

$$\left(s[I] - [A]\right)\{X\} = [B]\{U\}$$

$$\{X\} = \left(s[I] - [A]\right)^{-1}[B]\{U\}$$

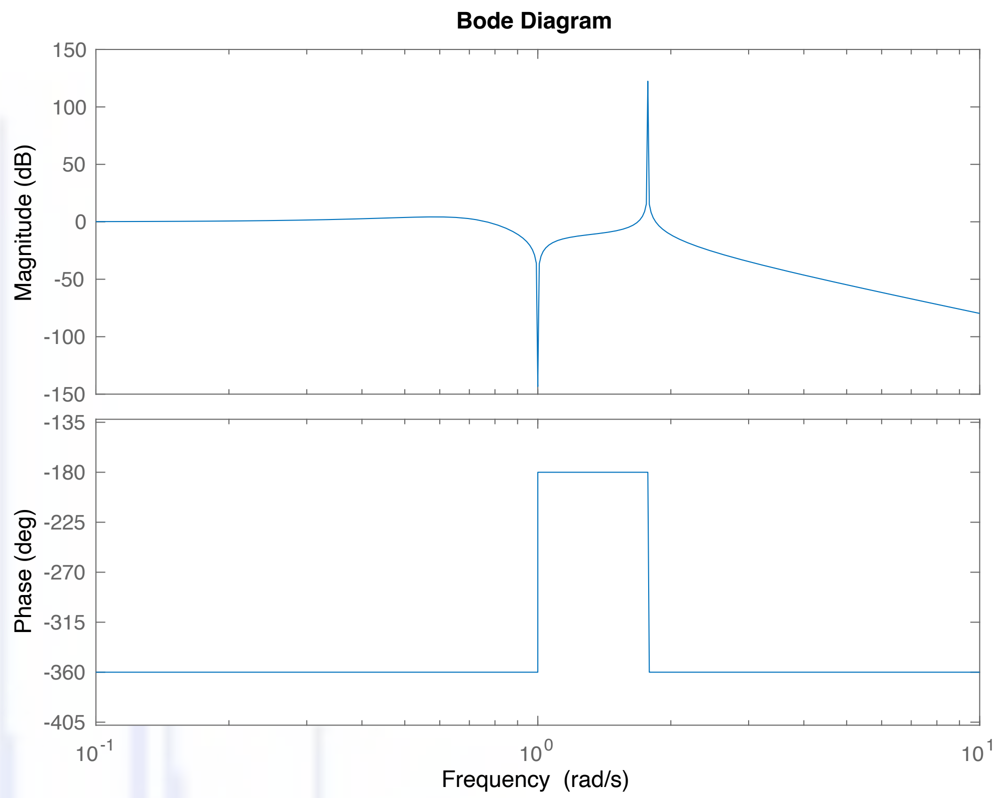
$$\{Y\} = [C]\left(s[I] - [A]\right)^{-1}[B]\{U\} + [D]\{U\}$$

$$\frac{\{Y\}}{\{U\}} = [C]\left(s[I] - [A]\right)^{-1}[B] + [D]$$

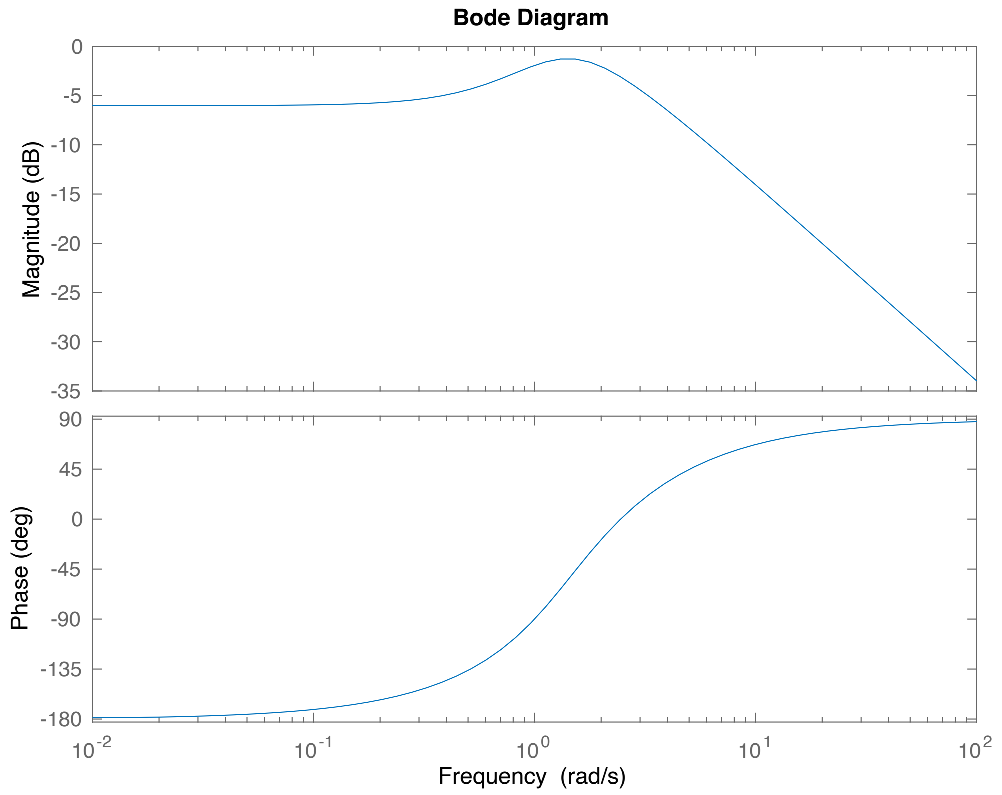
Quali sono le dimensioni di queste matrici e vettori?
>..?

Trasformazioni di rappresentazione
possono essere fatte direttamente in Matlab:

```
num= [1 0 1];
den=[1 0 4 0 3 0 1];
sys=tf(num,den)

sys =

        s^2 + 1
  -----------------------
  s^6 + 4 s^4 + 3 s^2 + 1
```




```
zeros = [1 -1];
poles = [1-1i 1+1i 2];
gain = -2;
sys = zpk(zeros,poles,gain)

sys =

    -2 (s-1) (s+1)
  --------------------
  (s-2) (s^2 - 2s + 2)
```




```
[z,p,k] = tf2zpk(num,den)

[num,den] = zp2tf(z,p,k)

[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```