

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 5  
Analisi Macchinario Rotante

## Rotodinamica

La maggior parte delle macchine industriali ha organi rotanti!  
(molti di più di quelli traslanti!)

La rotodinamica si occupa di quelle macchine in cui una parte (rotore) ruota con un significativo momento angolare ed in particolare di come si comporta (deforma) il rotore ai vari regimi di funzionamento

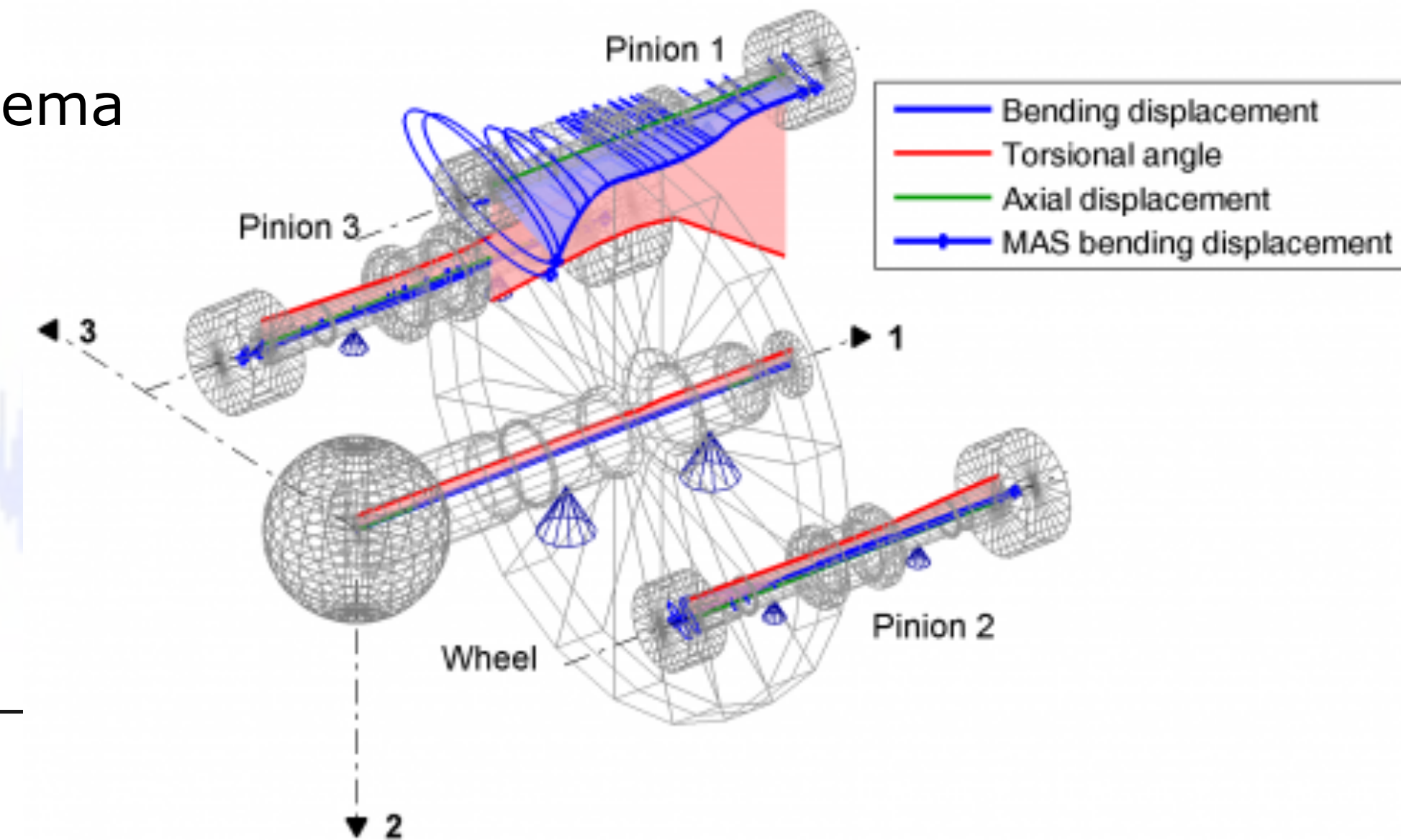
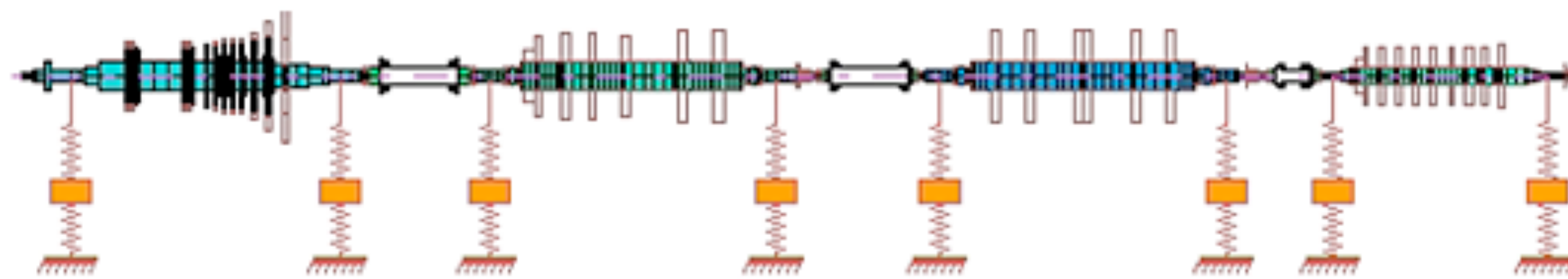
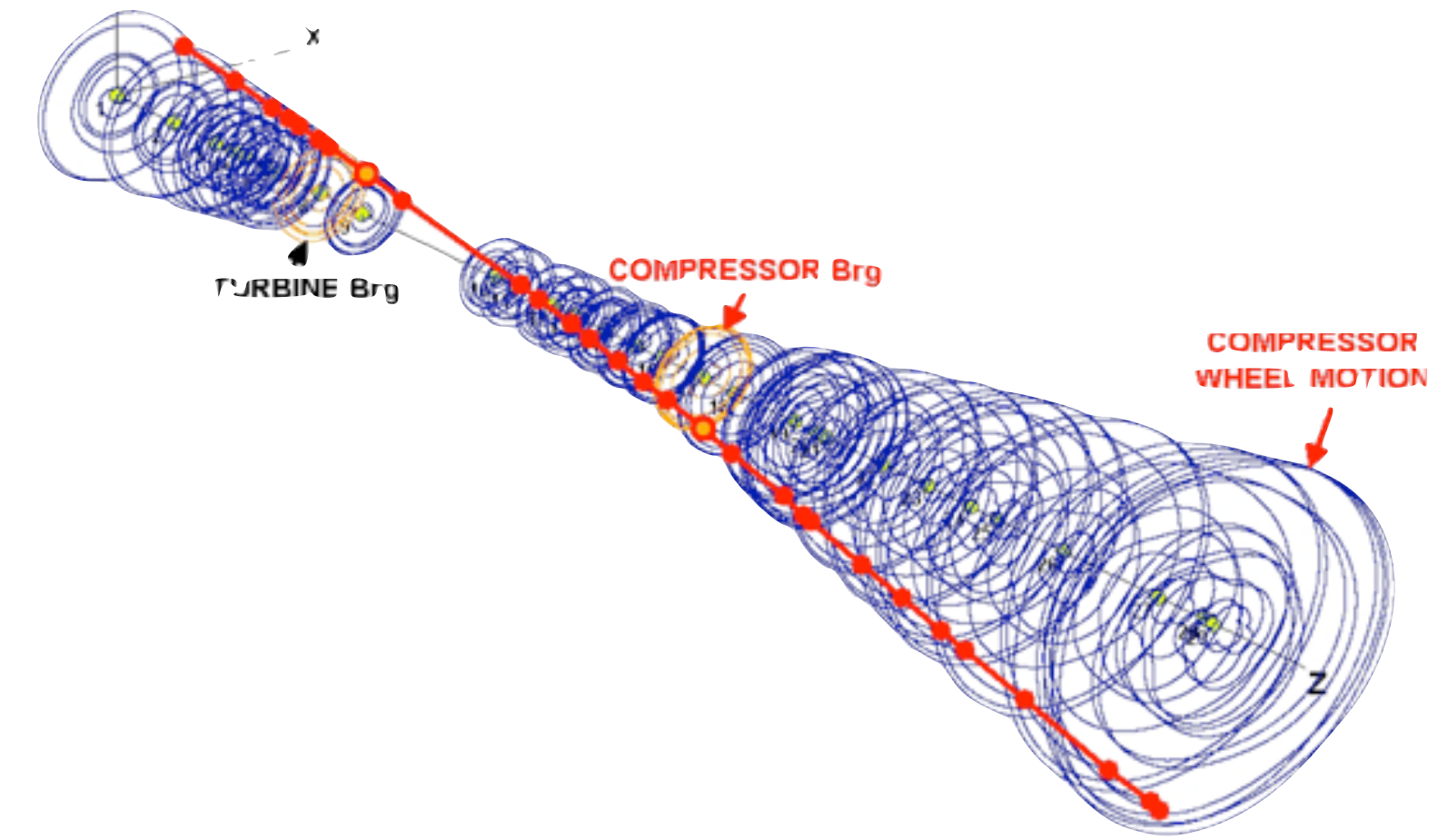
Si considerano acquisiti i concetti di squilibrio statico / dinamico / di coppia se non lo fossero ..  
riguardateli nel corso di Meccanica Applicata



# Rotodinamica

si occupa di:

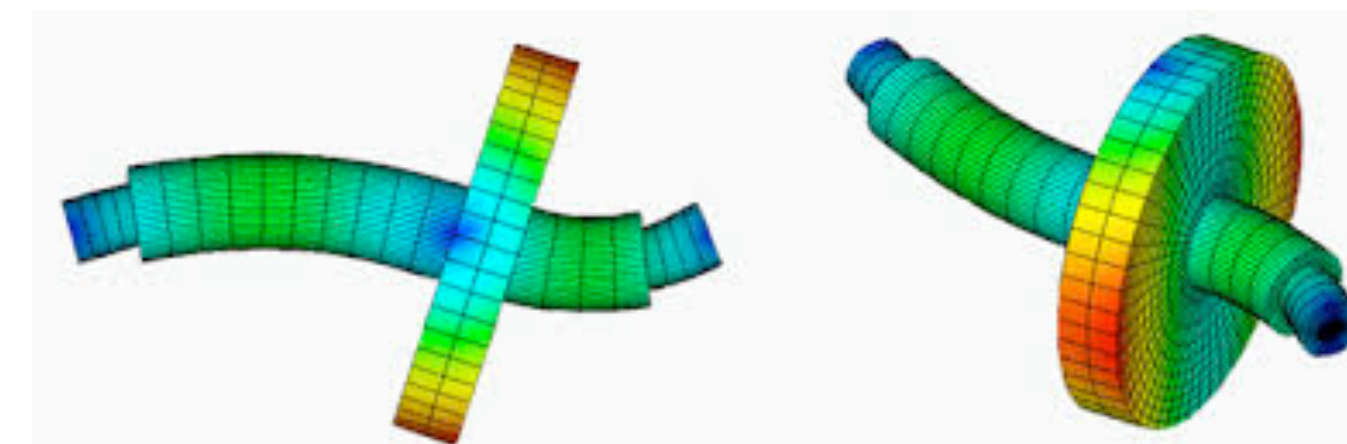
- predire le vibrazioni flessionali e torsionali
- predire le velocità critiche
- progettare/realizzare le modiche che cambiano le velocità critiche
- calcolare le correzioni di massa per i bilanciamenti
- predire le ampiezze di vibrazioni sincrone legate allo squilibrio
- predire le ampiezze di vibrazioni non sincrone legate alle instabilità del sistema
- progettare/realizzare le modiche che riducono le instabilità del sistema



## Rotodinamica - definizioni

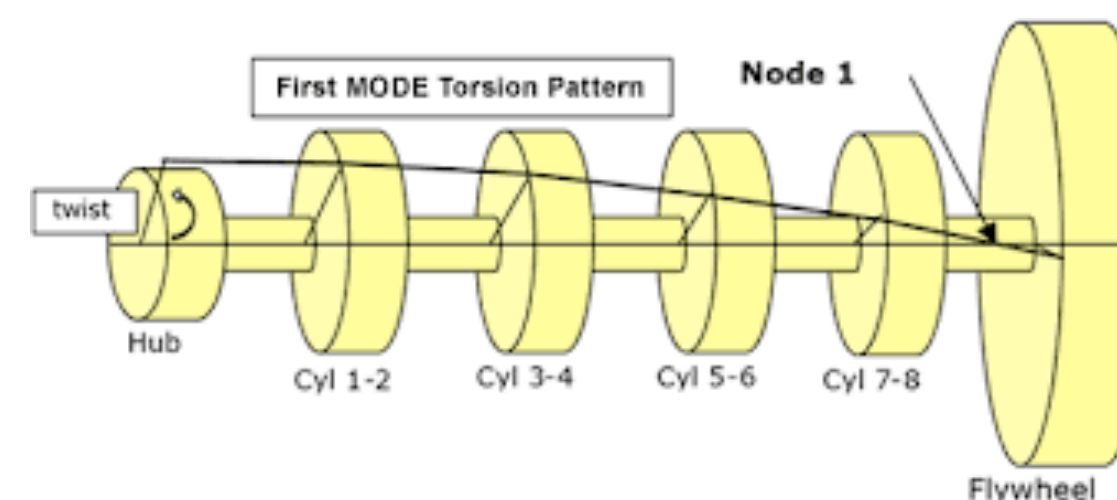
Vibrazioni Flessionali (-> risonanze flessionali)

l'asse del rotore si deforma su un piano (se non c'è smorzamento)



Vibrazioni Torsionali (-> risonanze torsionali)

l'asse del rotore resta coincidente a quello del sistema indeformato



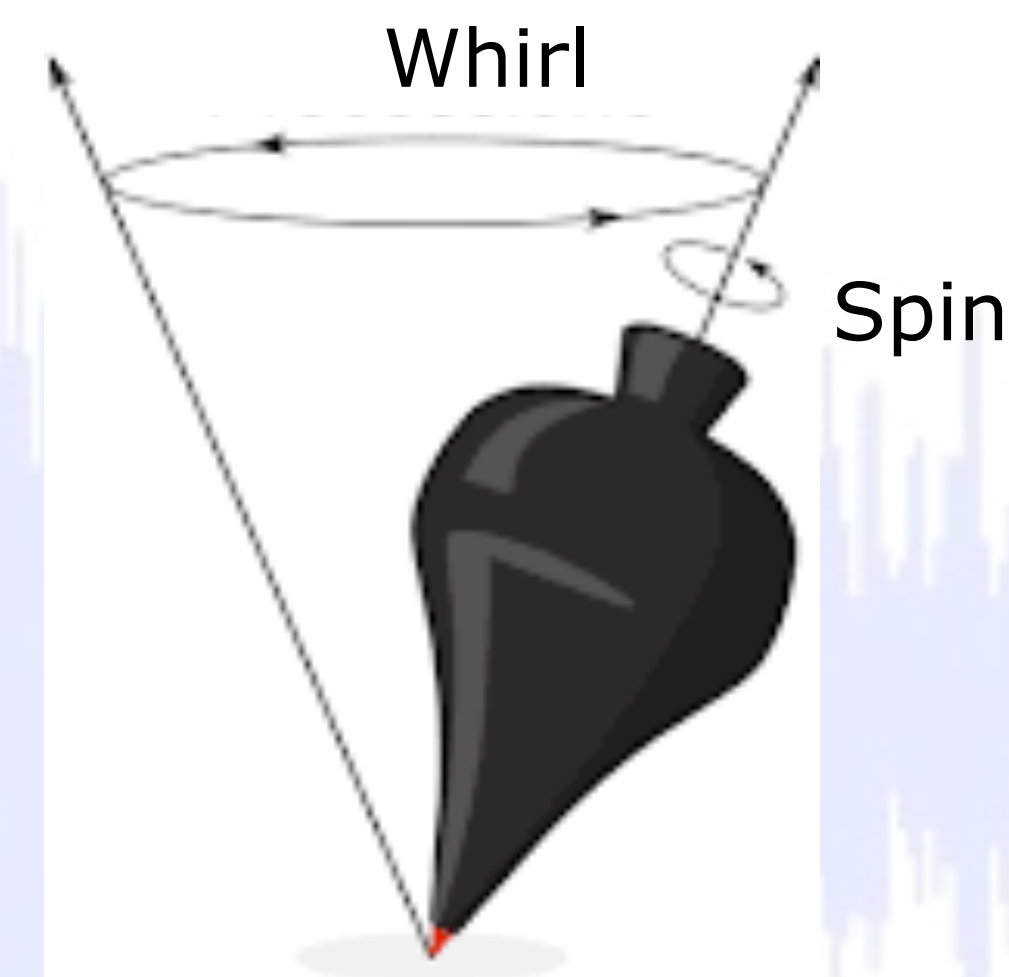
Velocità critiche

velocità di rotazione alle quali c'è il massimo della deformazione del rotore (modi di vibrare, legati alla distribuzione di massa e rigidezza)

Velocità di rotazione (spin) Velocità di precessione (whirl)

spin: rotazione attorno all'asse del rotore

whirl: variazione della direzione dell'asse di rotazione

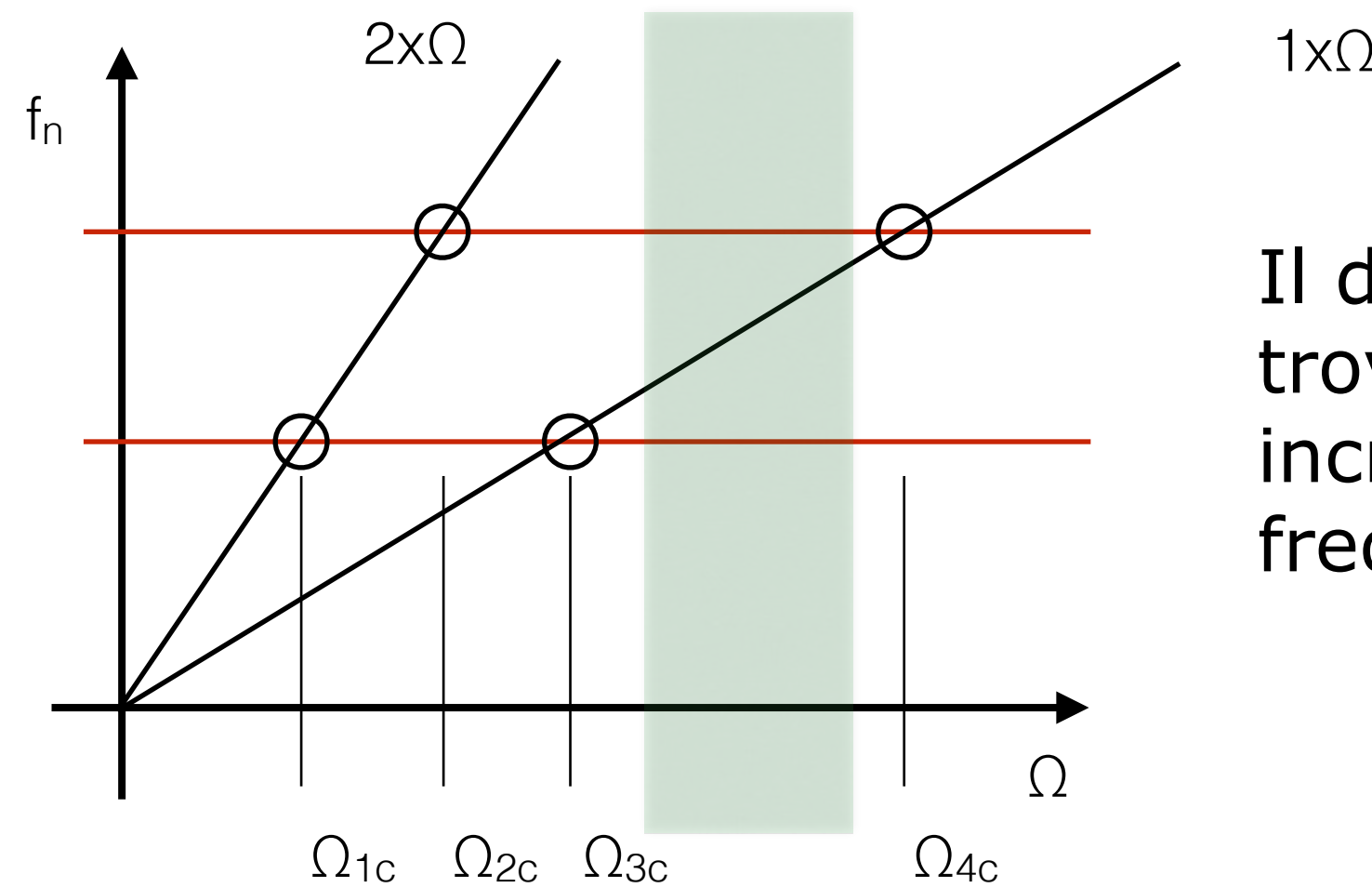


Vibrazioni sincrone alla velocità di rotazione (-> legate allo squilibrio)

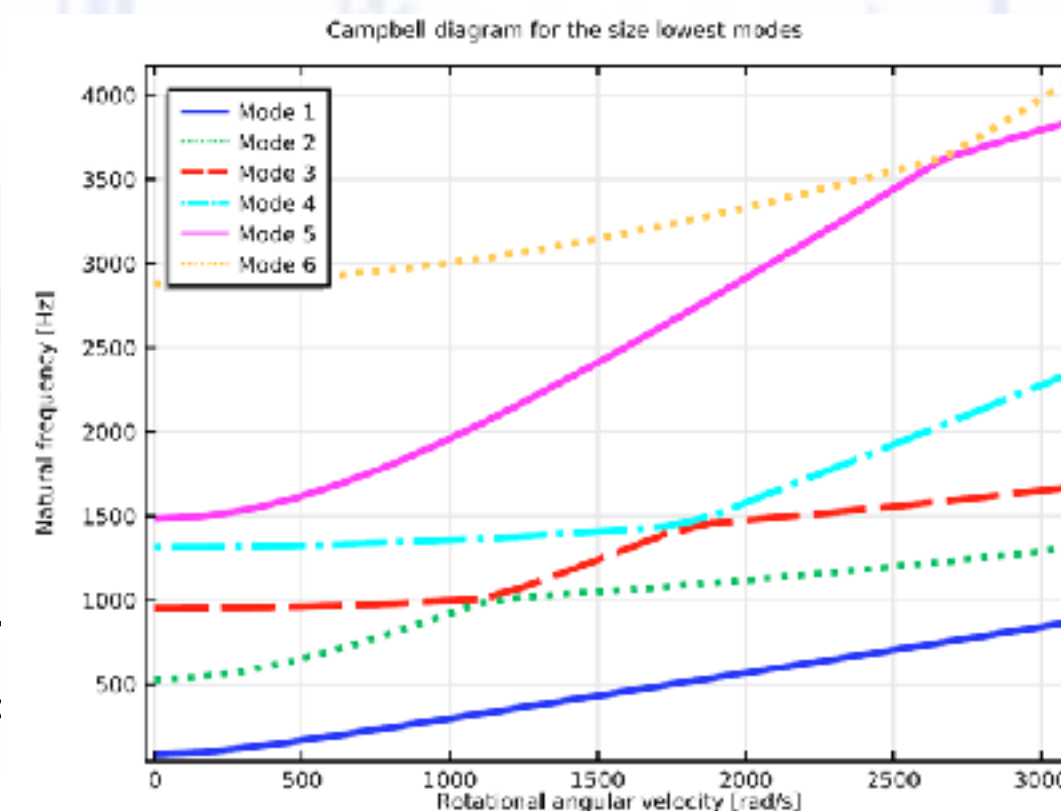
Vibrazioni non sincrone alla velocità di rotazione (-> legate alle instabilità)

Le vibrazioni vengono analizzate in maniera diversa se la macchina lavora in regime stazionario (turbina idraulica collegata ad alternatore) o in regime variabile-transitorio (motore autoveicolo)

Se il regime è variabile è possibile che questo ecciti le frequenze naturali (flessionali e torsionali) del sistema.  
Bisogna evitare di lavorare a quelle velocità!

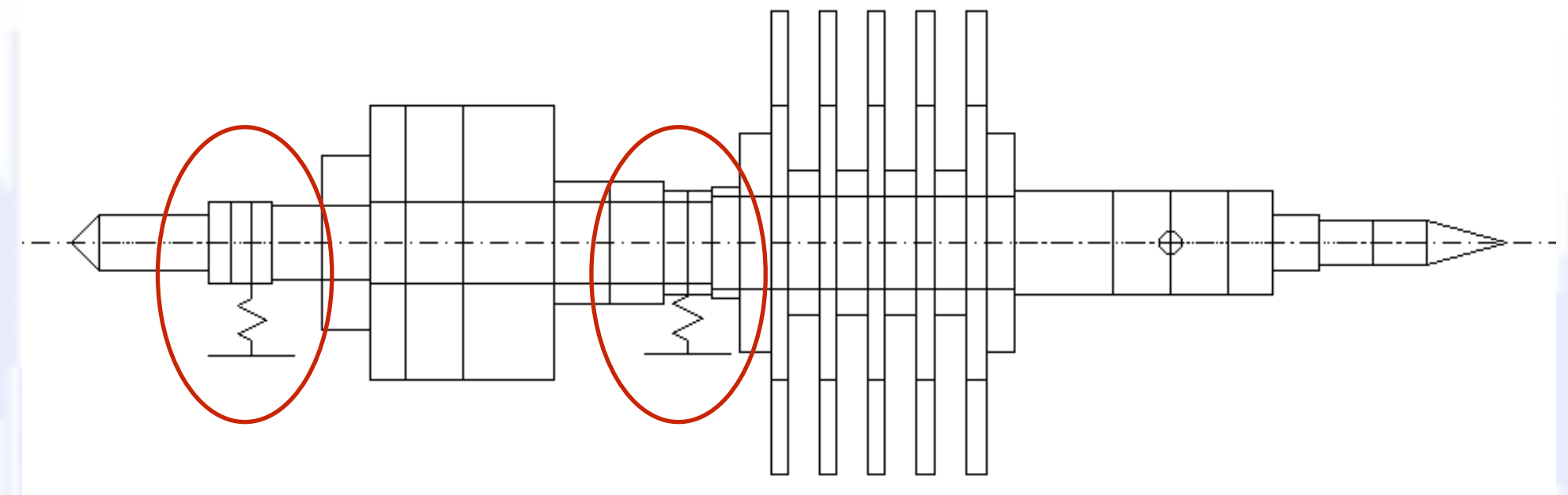
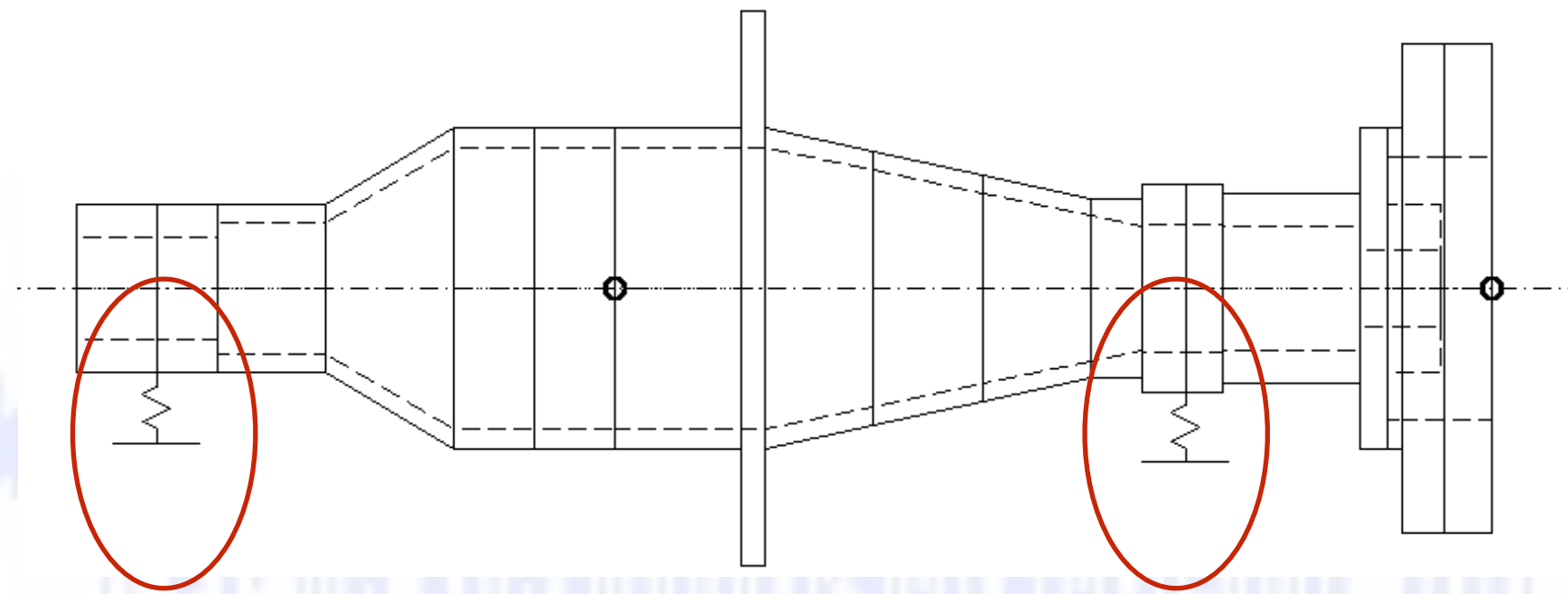
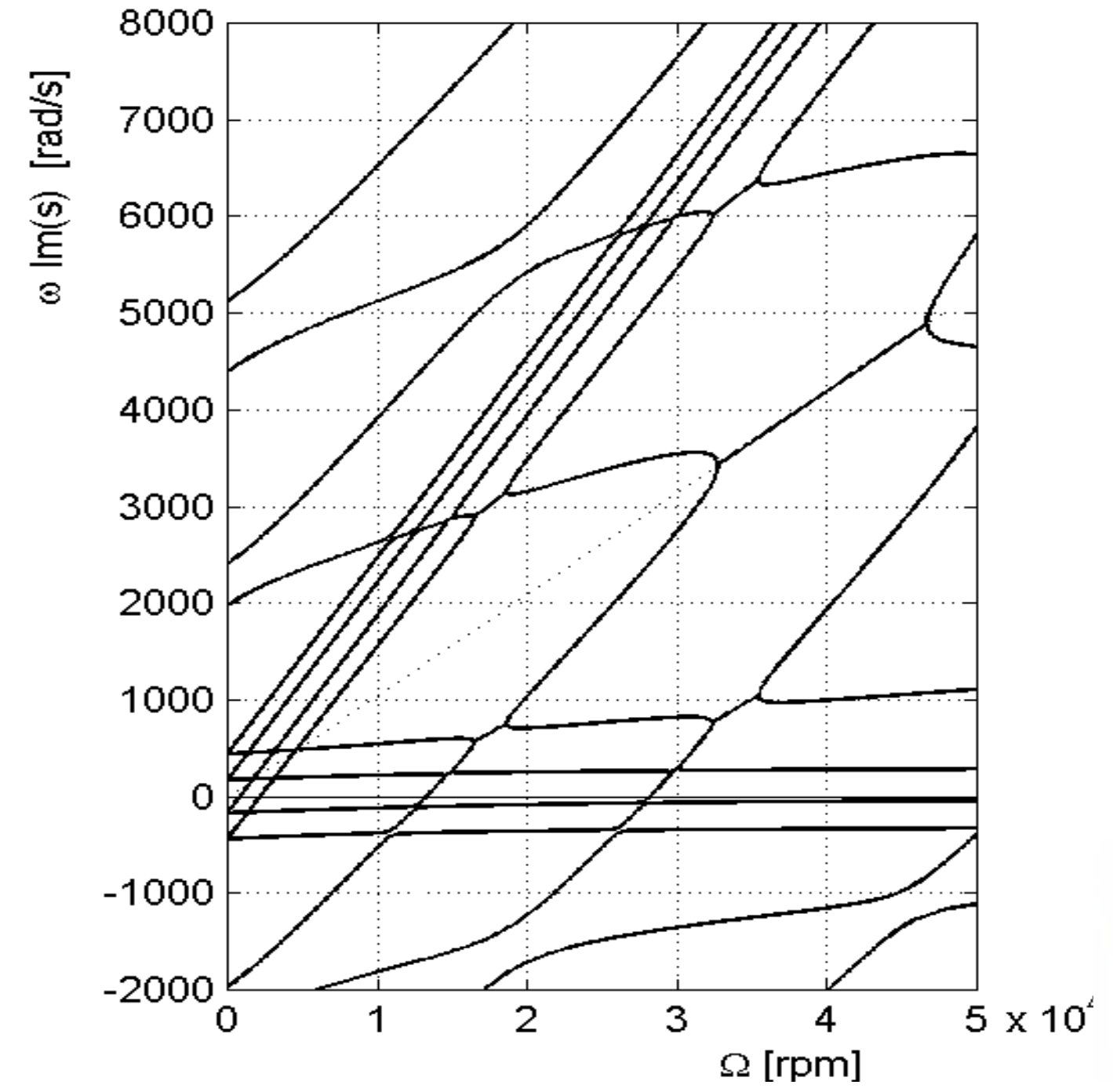
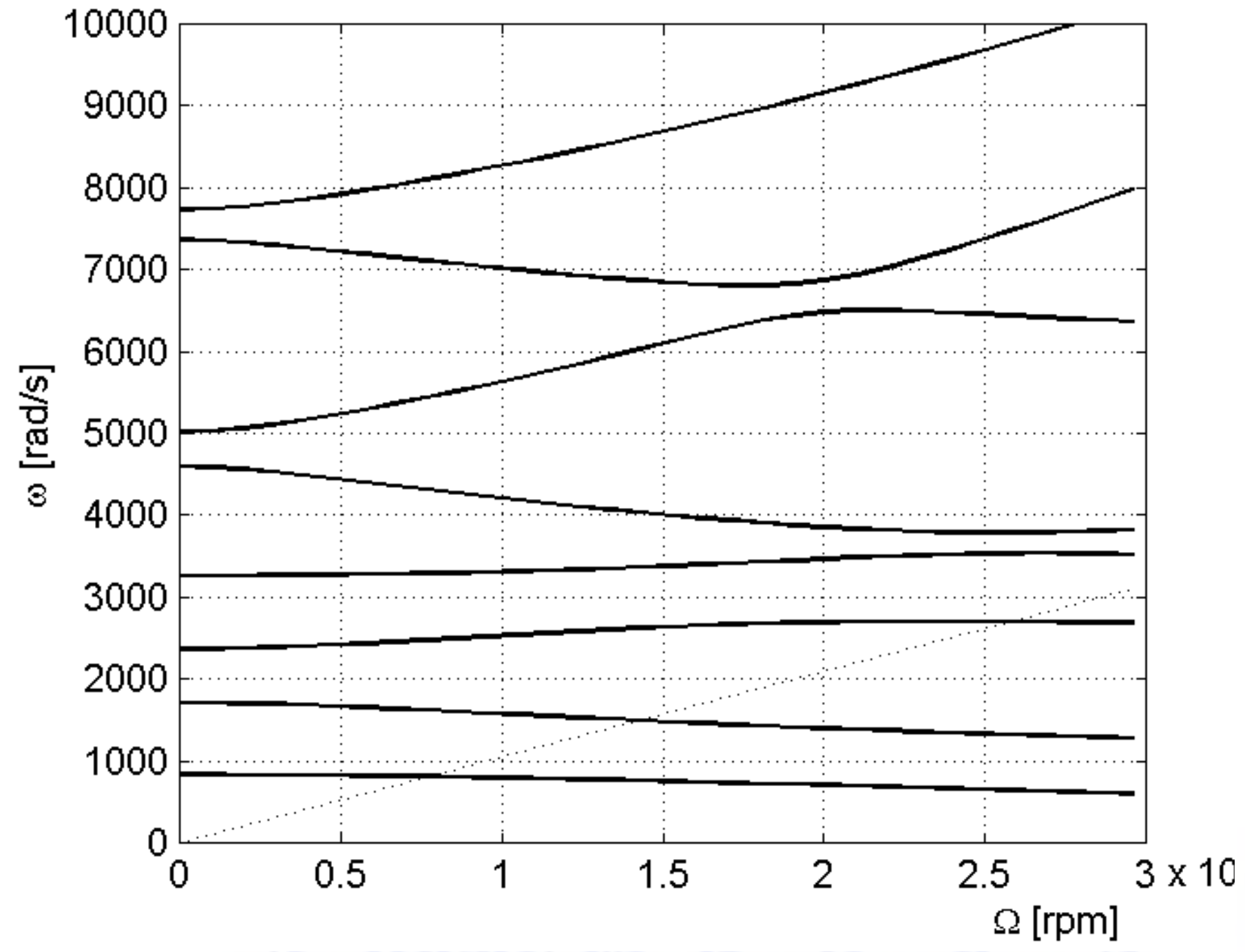


Il diagramma di Campbell permette di trovare tali velocità "critiche", incroci tra velocità di rotazione e frequenze naturali



se ci sono effetti "giroscopici" le cose si complicano!





## Rotodinamica - ipotesi semplificative

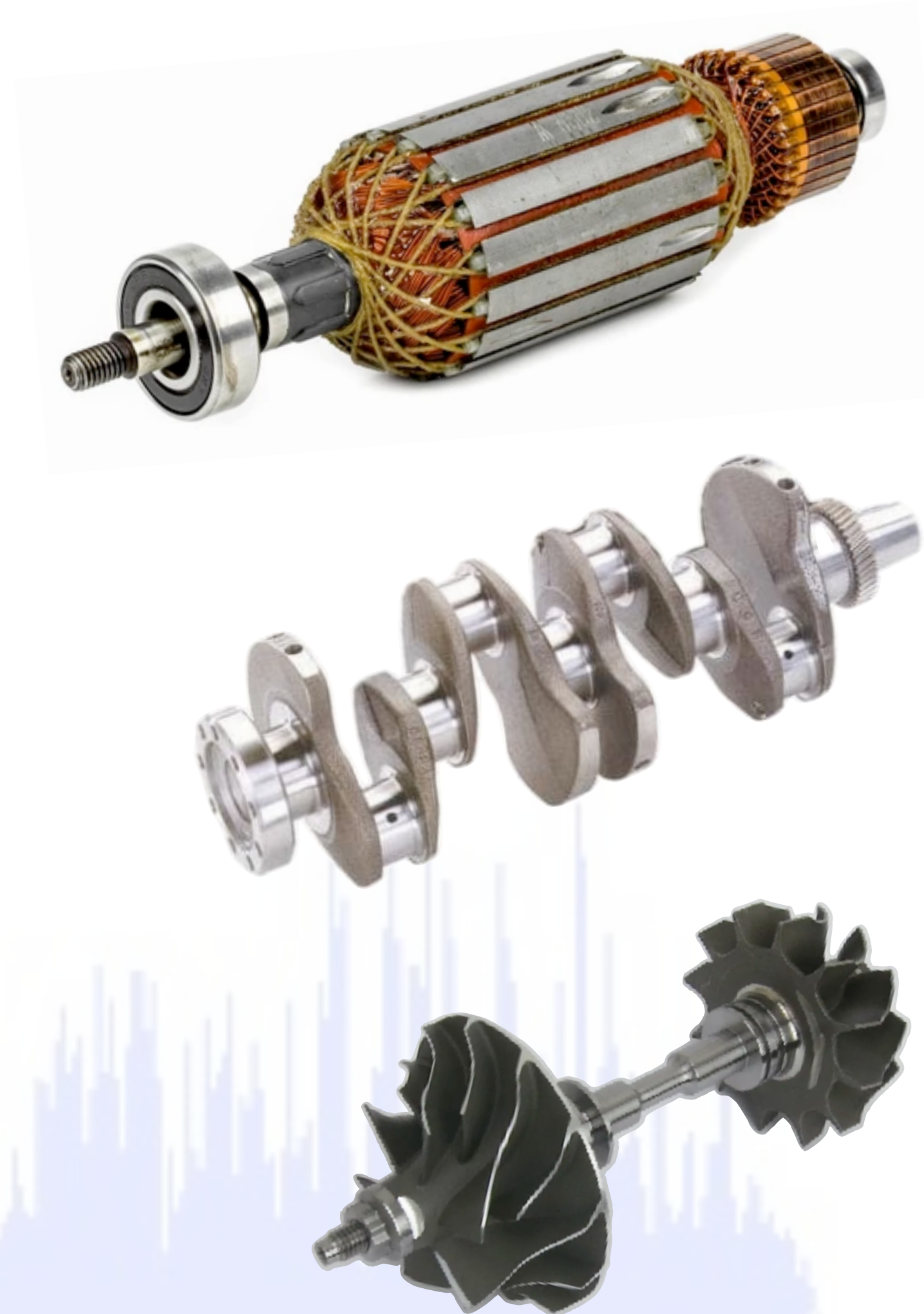
Si definisce un ROTORE un corpo sospeso tramite una serie di cerniere cilindriche che gli permettono di ruotare liberamente attorno ad un asse! (statore..non si muove)

Si ipotizza che l'asse di rotazione sia fisso nello spazio (non è vero nelle macchine semoventi automobili, aerei, navi..)

Si ipotizza che il rotore sia equilibrato (asse rotazione coincide asse principale d'inerzia), o se non lo è lo squilibrio e le deformazioni saranno piccole

Si ipotizza che il rotore sia assial-simmetrico (le equazioni son più semplici, e non serve lavorare con un sistema di riferimento solidale al rotore)

Si immagina che il rotore sia "mosso" dall'esterno

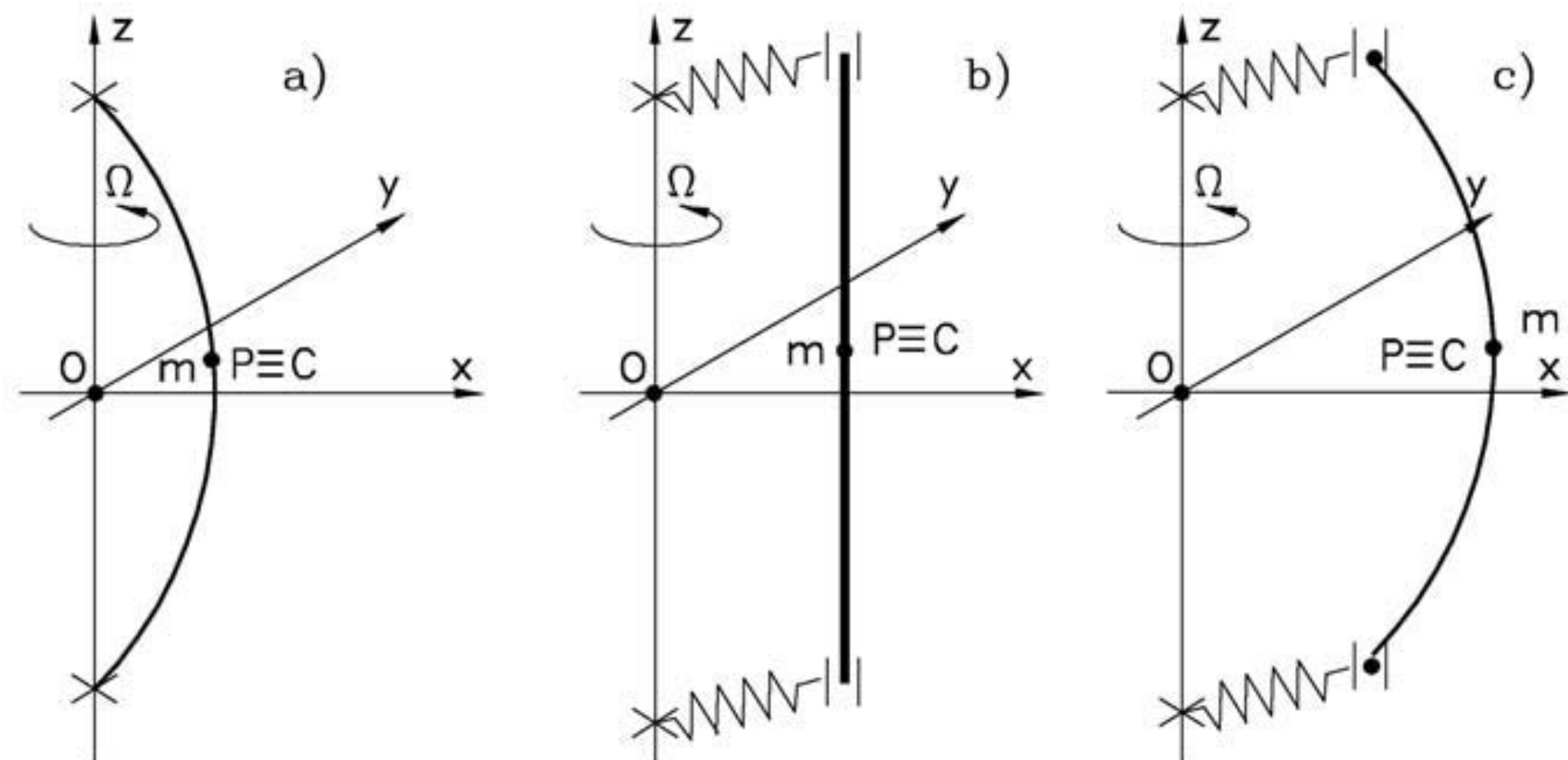


La rotodinamica si occupa di rotori e supporti che possono avere rigidità relative differenti, dando luogo a

- rotori flessibili con supporti rigidi
- rotori rigidi con supporti flessibili
- rotori flessibili con supporti flessibili

In considerazione che il moto è tridimensionale si possono studiare sistemi con supporti

- isotropi ( $K_x = K_y$ )
- anisotropi ( $K_x \neq K_y$ )

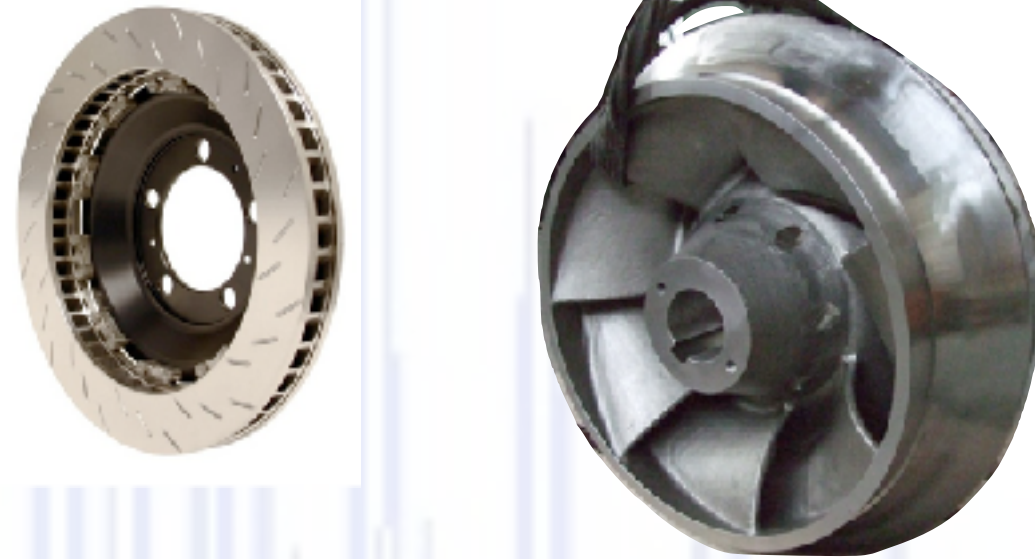




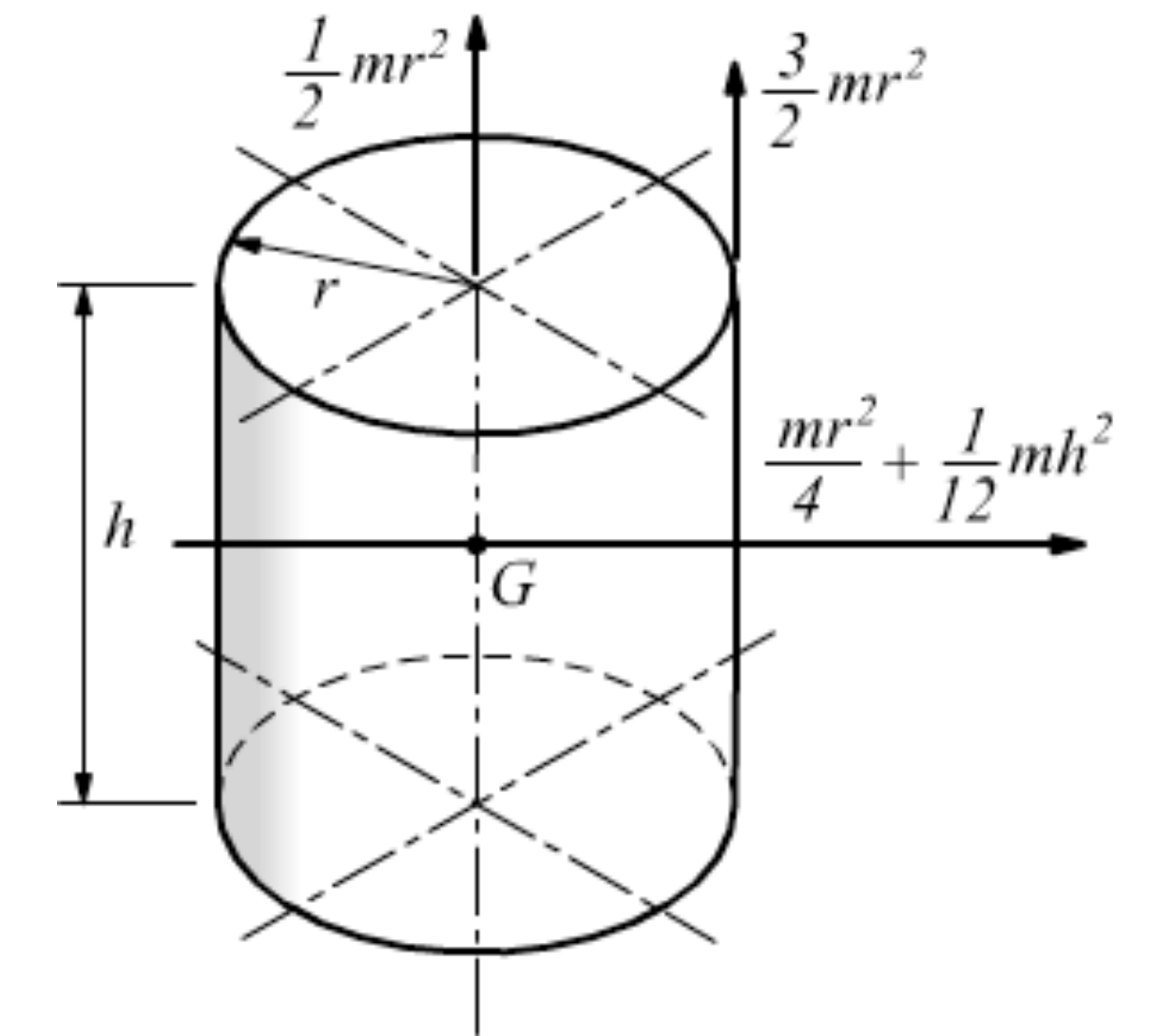
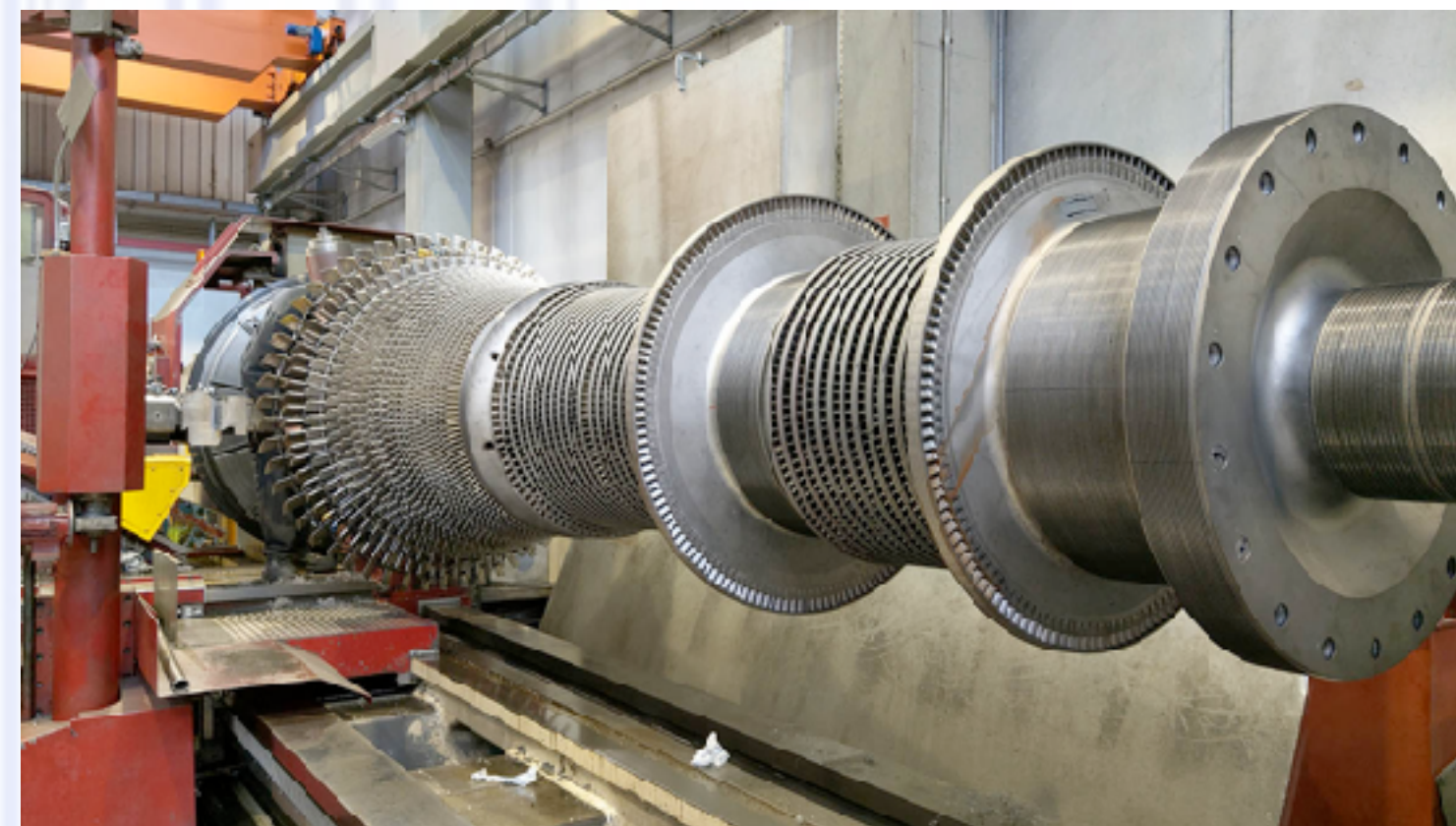
I rotori sono caratterizzati dal momento d'inerzia polare  $I_p$  e trasversale  $I_t$ . (riguardatevi come si calcolano!)

A seconda del rapporto tra queste grandezze di parlerà di

dischi ( $I_p > I_t$ )



rotori allungati ( $I_p < I_t$ )



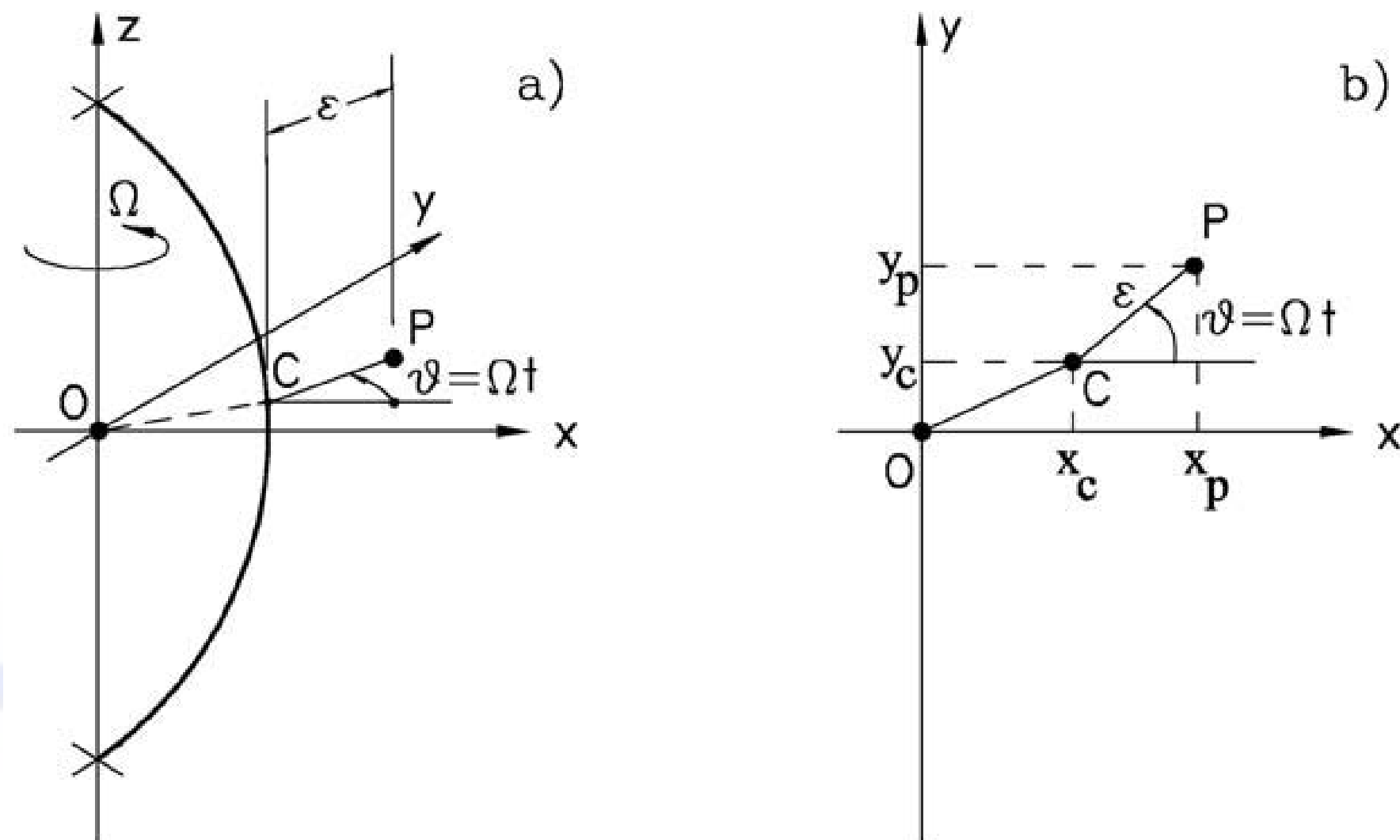
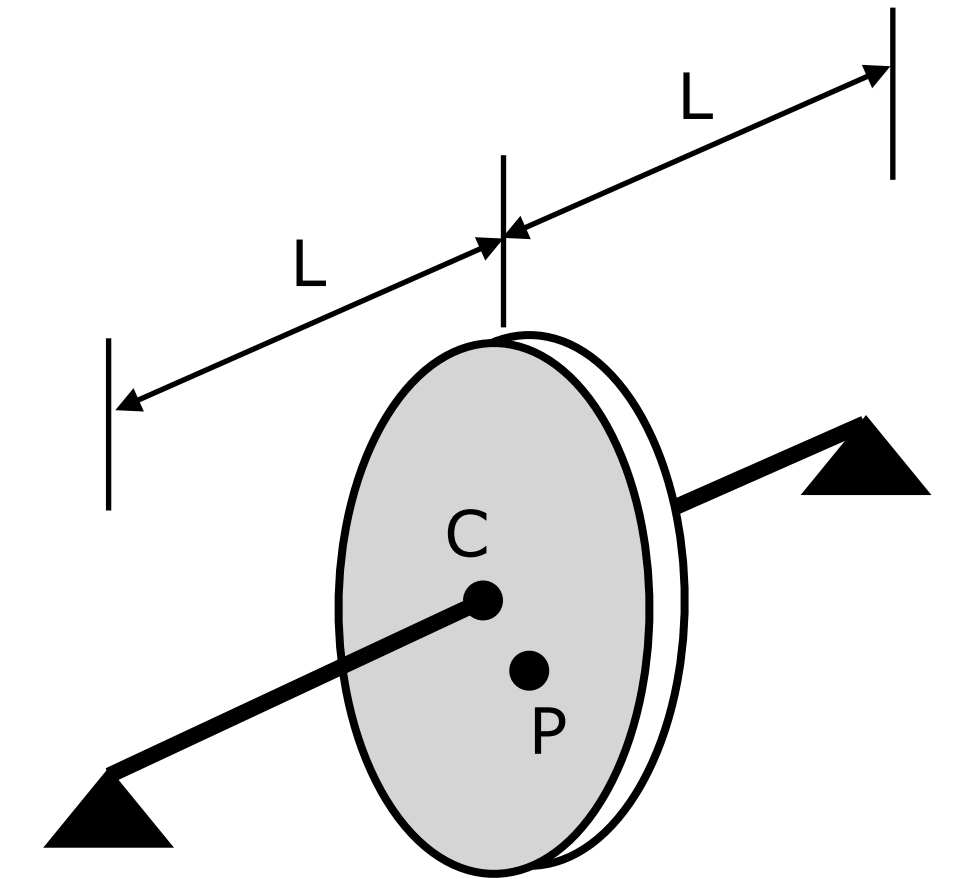
attenzione al caso in cui  $I_p \approx I_t$ ...

## Rotore di Jeffcott

Uno dei sistemi più semplici per capire il concetto di velocità critica è il rotore di Jeffcott

E' un rotore flessibile, con supporti rigidi, simmetrico, in cui il baricentro P coincide con l'asse di rotazione C (eccentricità  $\epsilon$ )

Il rotore ruota (spin) con velocità  $\Omega$ , creando una forza centrifuga  $F_c = m\epsilon\Omega^2$  che deforma l'albero, che ha una rigida flessionale  $k$  (questa dipende dalla sezione, lunghezza e vincolo)



Scriviamo le equazioni del moto partendo dalla posizione del punto P

$$\mathbf{r}_p(t) = \begin{Bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_c(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_p(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{y}_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_c(t) + \epsilon \Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_c(t) + \epsilon \Omega \cos(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

Con queste, scriviamo le equazioni dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale elastica U (tralasciando (t)):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) = \frac{1}{2}m \{ \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \epsilon^2\Omega^2 + 2\epsilon\Omega[-\dot{x}_c\sin(\Omega t) + \dot{y}_c\cos(\Omega t)] \}$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_c^2 + y_c^2)$$

Da queste con l'equazione di Lagrange  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = Q_i$  e le opportune derivate si arriva a:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = m\epsilon\Omega^2\cos(\Omega t) + F_x \\ m\ddot{y}_c + ky_c = m\epsilon\Omega^2\sin(\Omega t) + F_y \end{cases}$$

Senza squilibrio ( $\epsilon$  nullo) le equazioni si semplificano e tornano ad essere quelle di un sistema SDOF

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = F_x \\ m\ddot{y}_c + ky_c = F_y \end{cases}$$

perché due equazioni?

Risolviemo le equazioni nel caso con squilibrio tralasciando eventuali forze esterne  $F_i$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_c + ky_c = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

con una soluzione di primo tentativo  $\begin{cases} x_c = x_{c0} e^{st} \\ y_c = y_{c0} e^{st} \end{cases}$  con le sue derivate possiamo scrivere

$$\begin{cases} (k - m\Omega^2)x_{c0} = m\epsilon\Omega^2 \\ (k - m\Omega^2)y_{c0} = m\epsilon\Omega^2 \end{cases}$$

due equazioni uguali ed esprimono lo spostamento della massa squilibrata  $m$  nelle due direzioni coordinate

$$x_{c0} = y_{c0} = \epsilon \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \epsilon \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \epsilon \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} = \epsilon \frac{r^2}{1 - r^2}$$

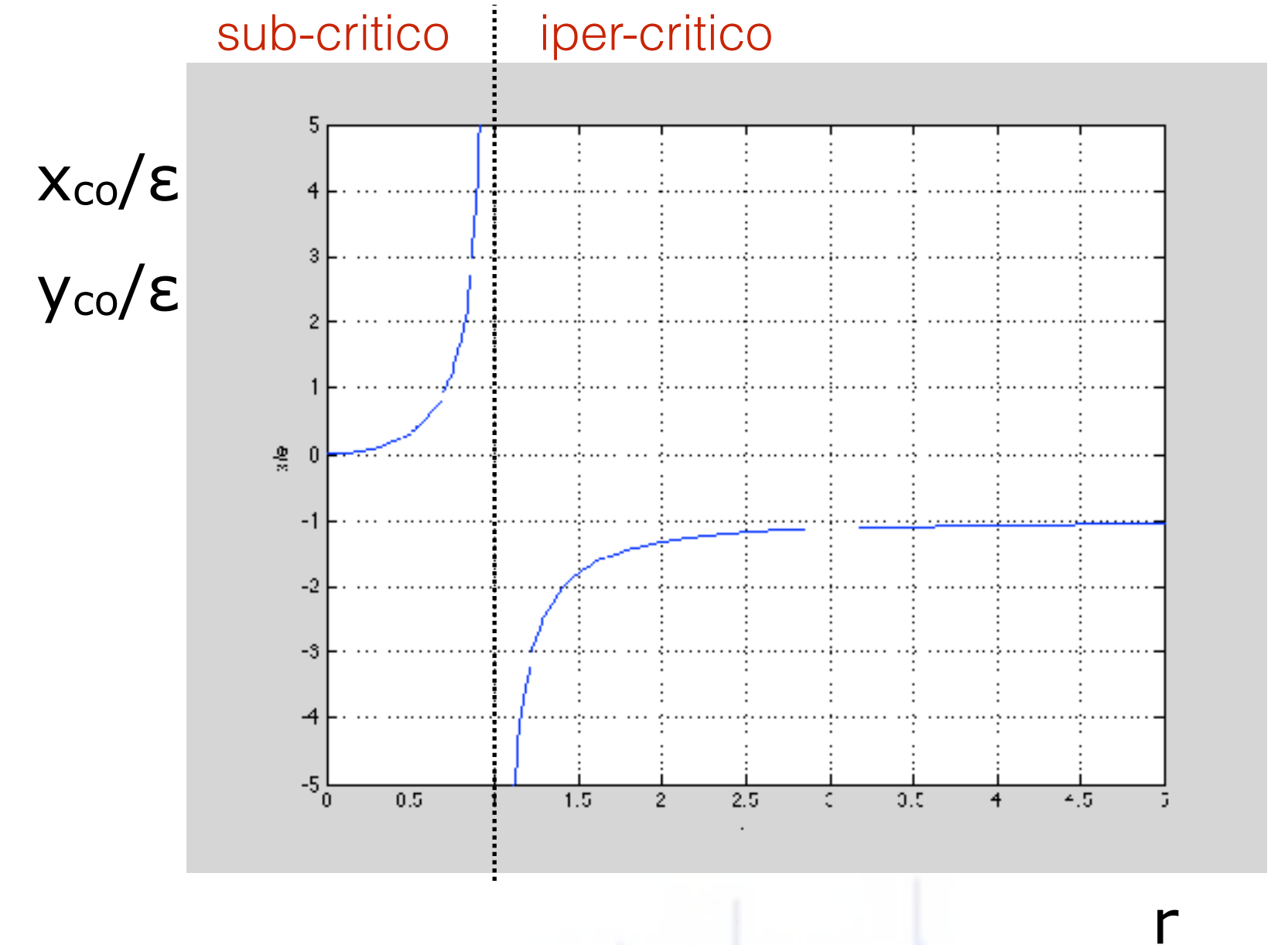
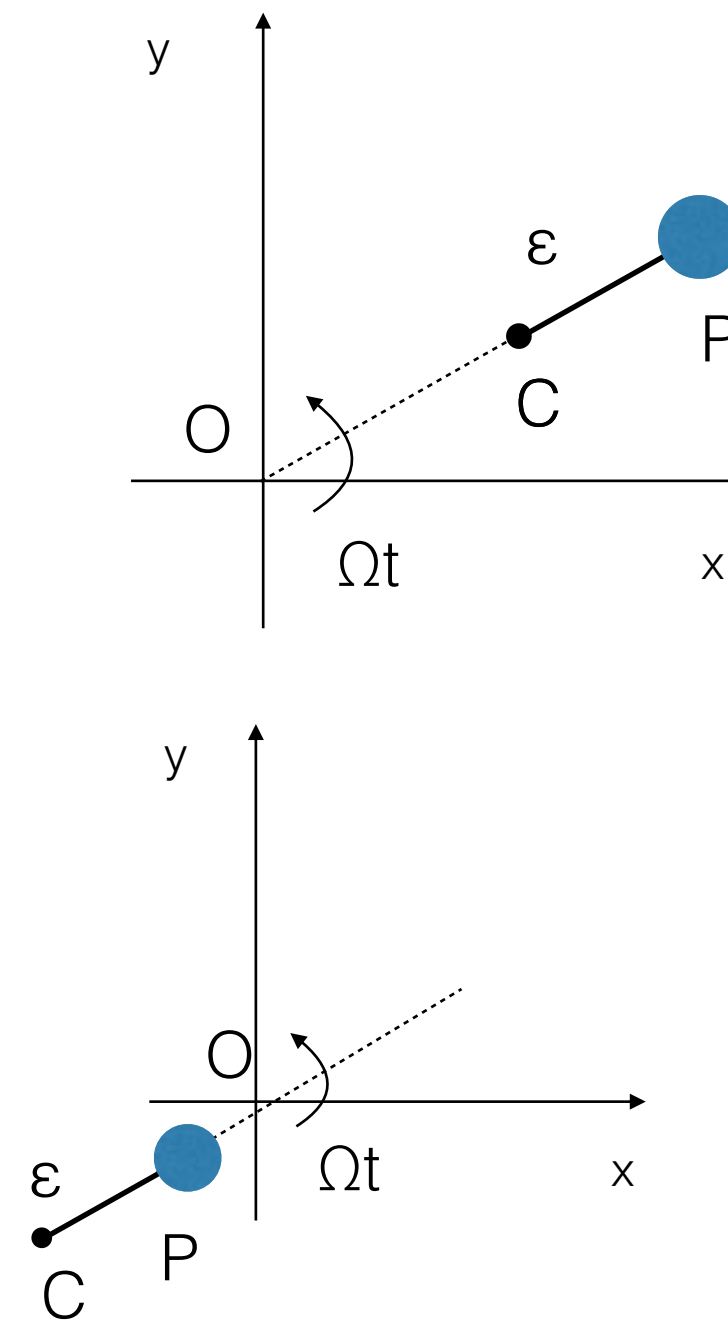
divido per  $m$ 
divido per  $\omega_n$

$\omega_n$  frequenza naturale del sistema  
 $r$  rapporto tra frequenza di rotazione  
 e frequenza naturale

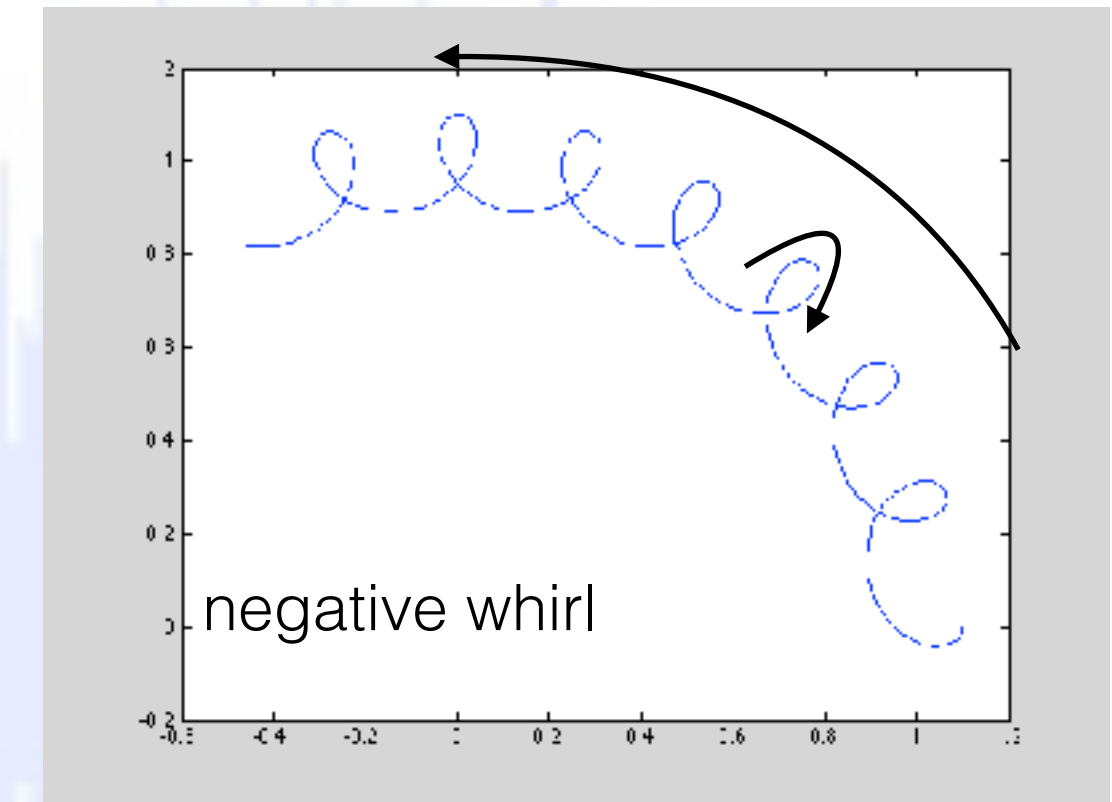
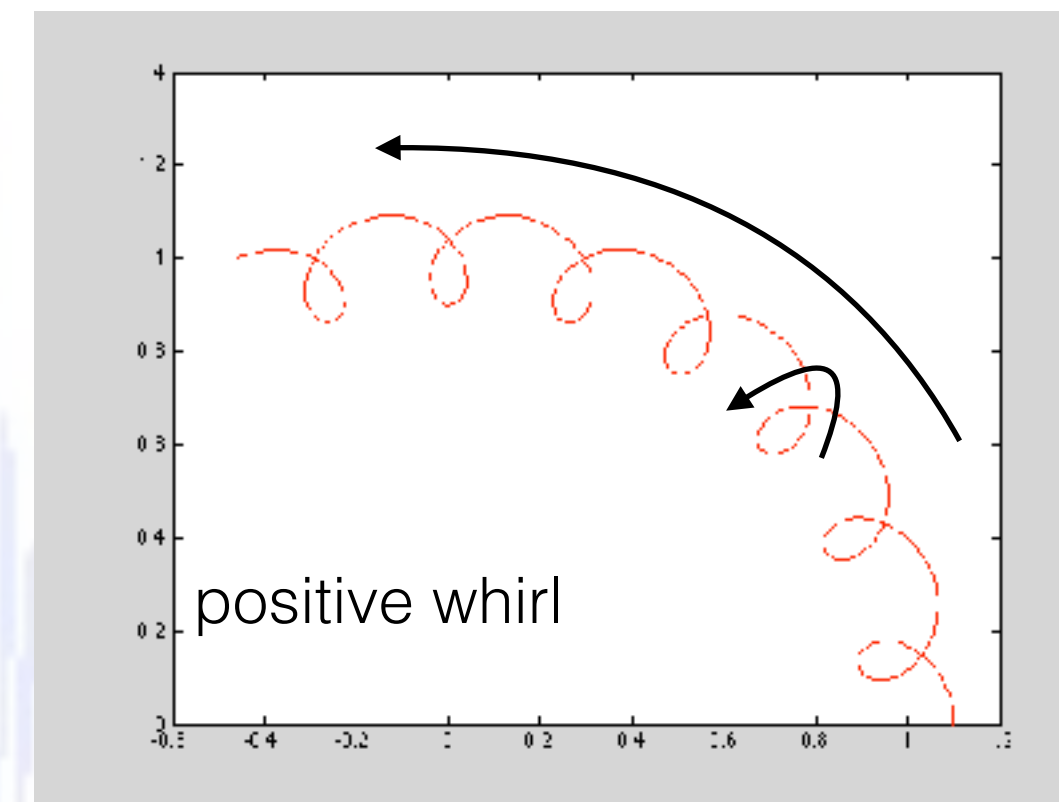
Si distinguono due condizioni..

$\Omega < \omega_n$  regime sub-critico  
la massa squilibrante ruote esternamente al centro geometrico del sistema

$\Omega > \omega_n$  regime iper-critico  
la massa squilibrante ruote internamente al centro geometrico del sistema

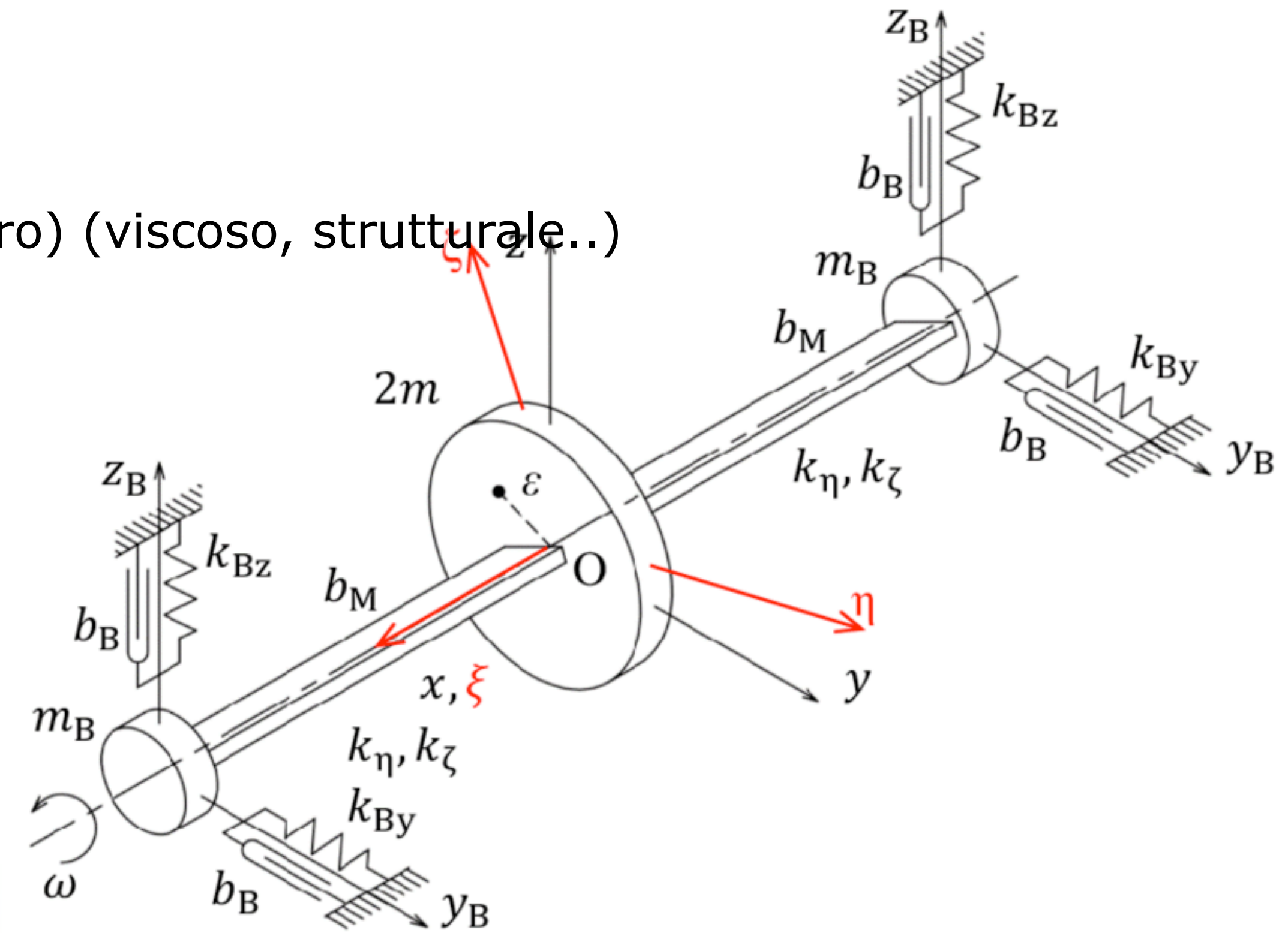
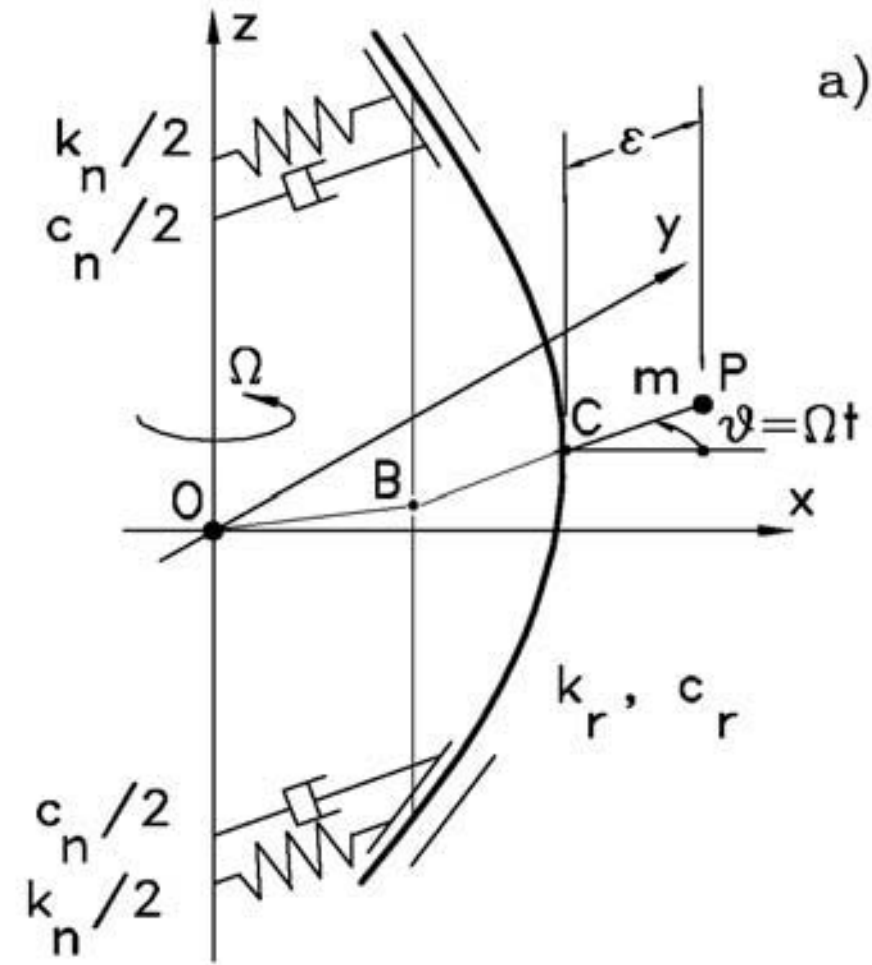
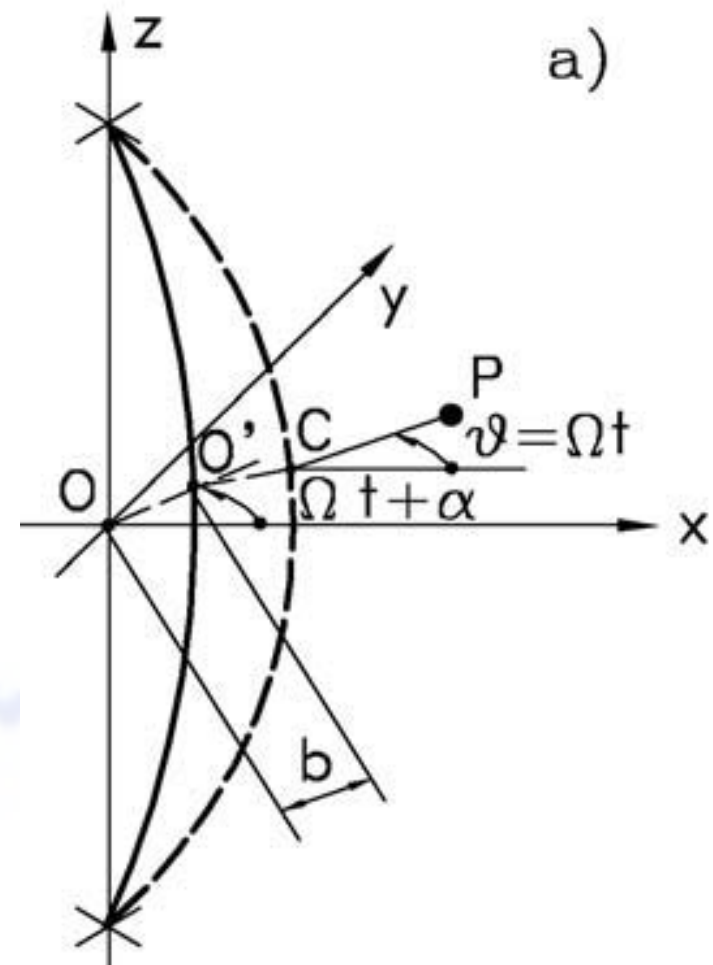


All'aumentare della velocità di rotazione  
la posizione della massa squilibrante  
tende a posizionarsi in corrispondenza  
del centro di rotazione geometrico O  
> auto-centratura



Oltre all'eccentricità si può studiare l'effetto

- ..della posizione non centrata del disco
- ..della piegatura (flessione statica) dell'albero
- ..dell'anisotropia (sezione non radial simmetrica) dell'albero (non necessariamente nel piano dello squilibrio)..
- ..della presenza di smorzamento (non rotating damping - fondazioni e rotating damping - albero) (viscoso, strutturale..)
- ..dell'anisotropia dei vincoli ..
- ..della variazioni di coppia dovute a resistenze interne (legati a fenomeni dissipativi dello smorzamento)..
- ..



- ..con coordinate solidali alla macchina (fisse)..
- ..con coordinate solidali al rotore (rotanti)..

## Rotodinamica - momento giroscopici

..principio di conservazione della quantità di moto  
se la forza risultante delle forze agenti sul sistema è nulla, la quantità di moto resta costante...

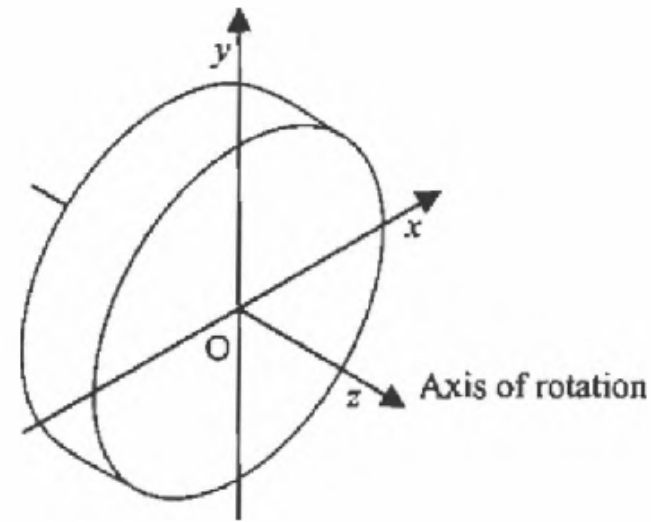
$$\sum \vec{F}_{ris} = m \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_{ris} = 0 \qquad \vec{p} = const \qquad \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

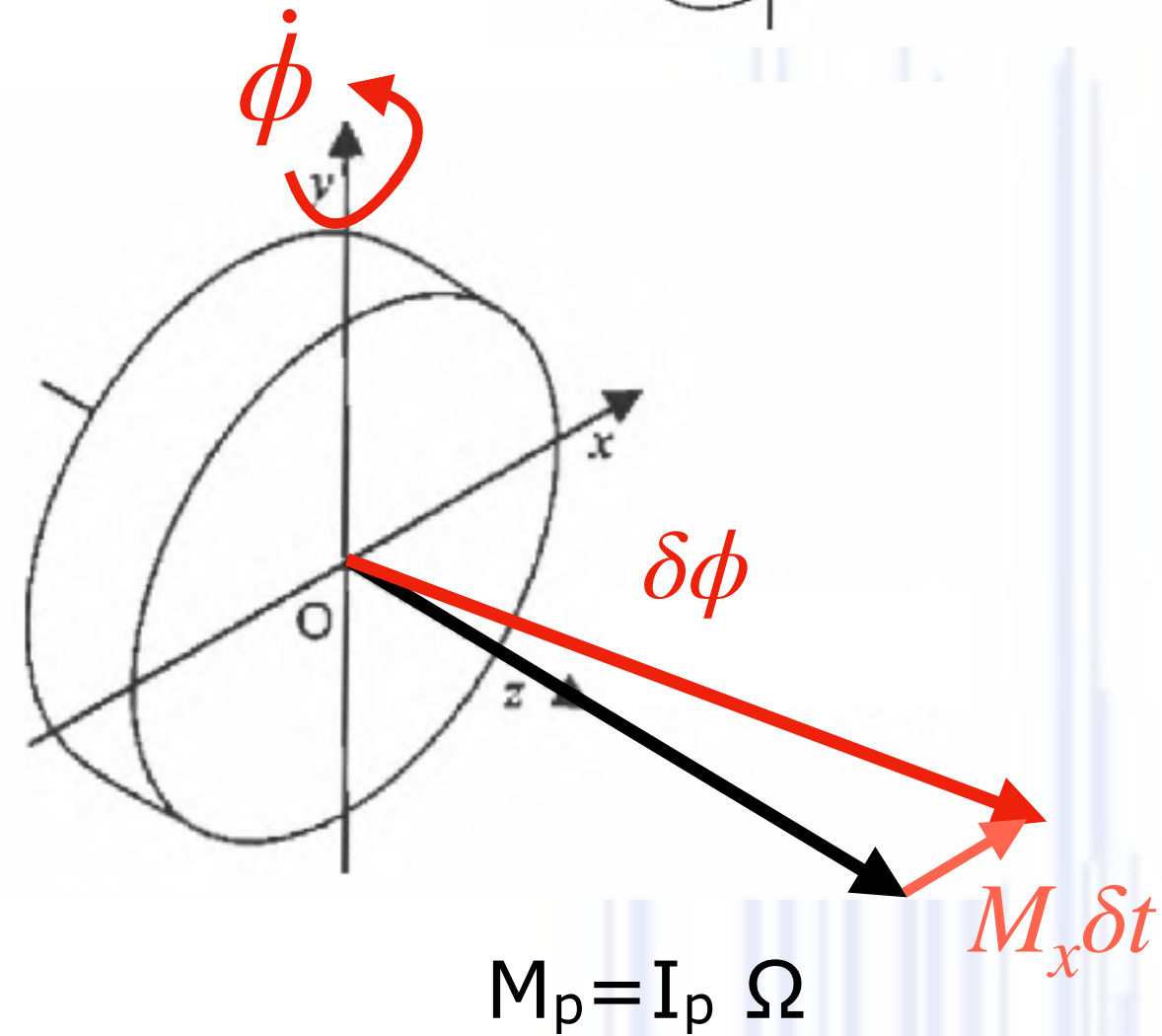
..principio di conservazione del momento angolare  
se la somma dei momenti delle forze agenti sui sistema è nulla, il momento angolare resta costante...

$$\sum \vec{M}_{ris} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\sum \vec{M}_{ris} = 0 \qquad \vec{L} = const \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$



Supponiamo di avere in disco con momento d'inerzia polare  $I_p$  e trasversale  $I_t$ .  
Se questo ruota con velocità  $\Omega$  attorno all'asse  $z$ , questo avrà un momento angolare pari a  $I_p \Omega$



Supponiamo ruoti attorno all'asse  $OY$  con velocità  $\dot{\phi}$  in un intervallo  $\delta t$   
il momento angolare ruoterà nel piano  $OX$  di una quantità  $\delta\phi = \dot{\phi}\delta t$

$$M_x \delta t = I_p \Omega \delta\phi$$

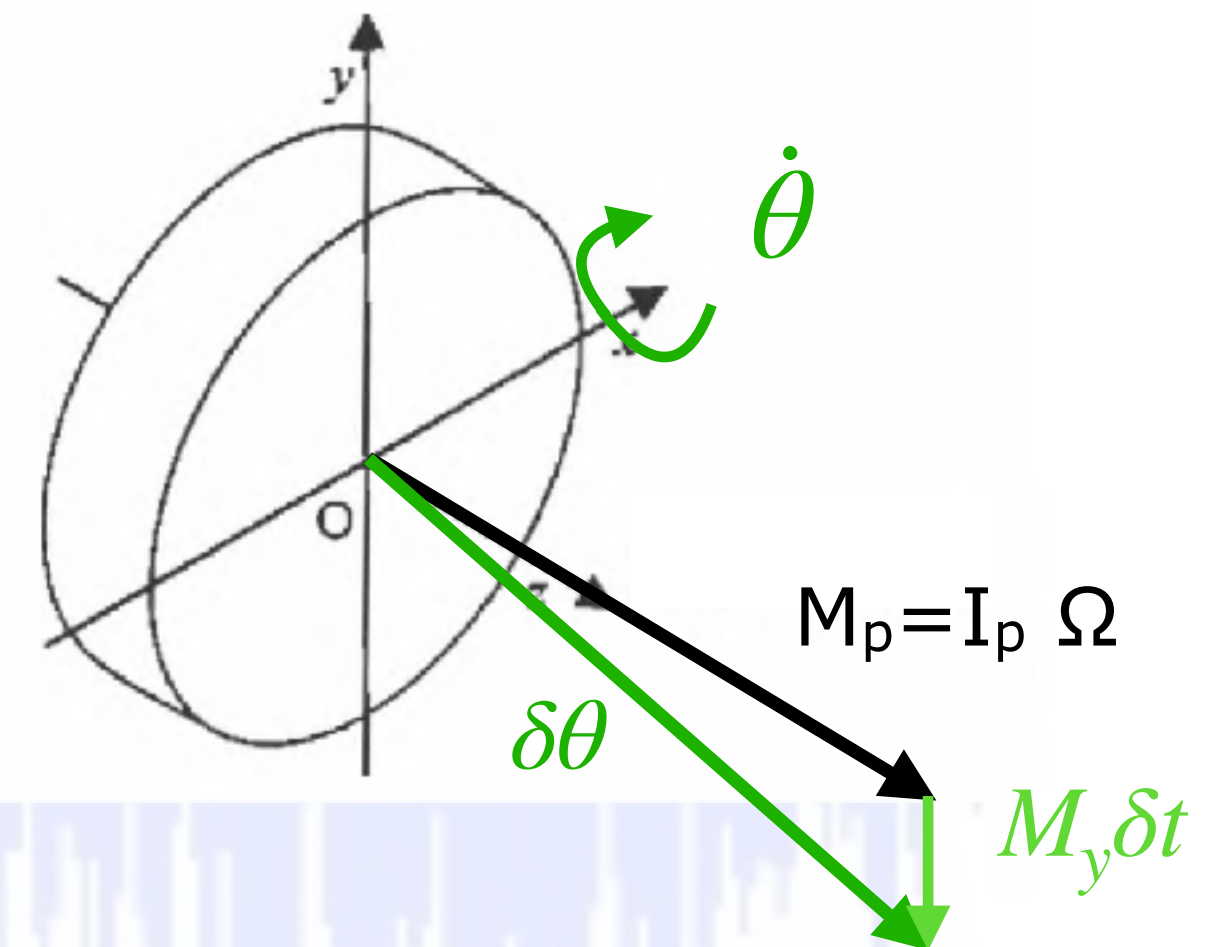
$$M_x = I_p \Omega \frac{\delta\phi}{\delta t} = I_p \Omega \dot{\phi} \quad \text{Momento torcente attorno all'asse } OX$$

*Attenzione alle direzioni ed ai segni!*

Supponiamo ruoti attorno all'asse  $OX$  con velocità  $\dot{\theta}$  in un intervallo  $\delta t$   
il momento angolare ruoterà nel piano  $OY$  di una quantità

$$-M_y \delta t = I_p \Omega \delta\theta$$

$$M_y = -I_p \Omega \frac{\delta\theta}{\delta t} = -I_p \Omega \dot{\theta} \quad \text{Momento torcente attorno all'asse } OY$$





Il rotore quindi può ruotare simultaneamente lungo gli assi OX e OY ed il contributo del momento trasversale d'inerzia deve essere considerato..

$$I_t \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} = M_x$$

$$I_t \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} = M_y$$

Si osservi che le equazioni sono accoppiate e che la matrice dei momenti giroscopici è skew simmetrica !

$$\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_p \Omega \\ -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$

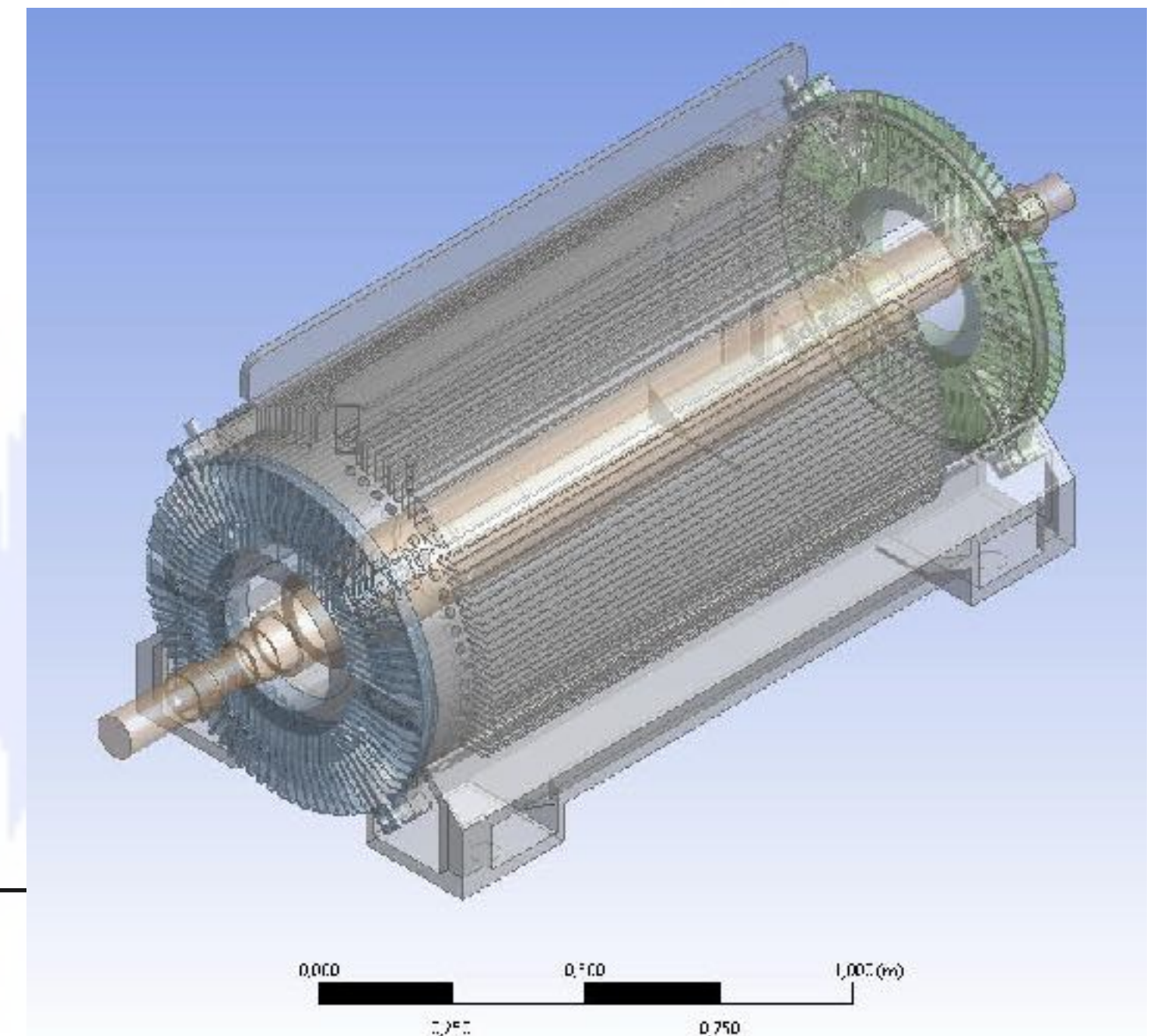
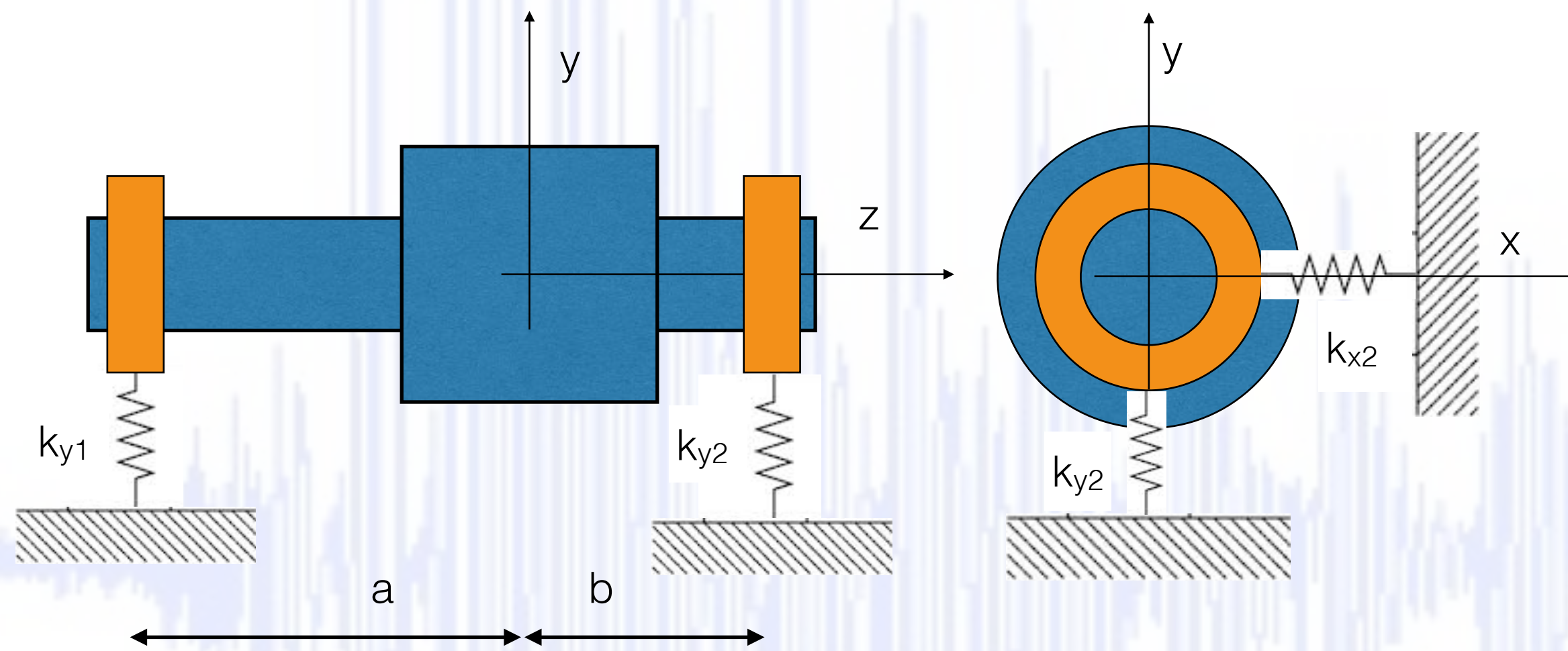
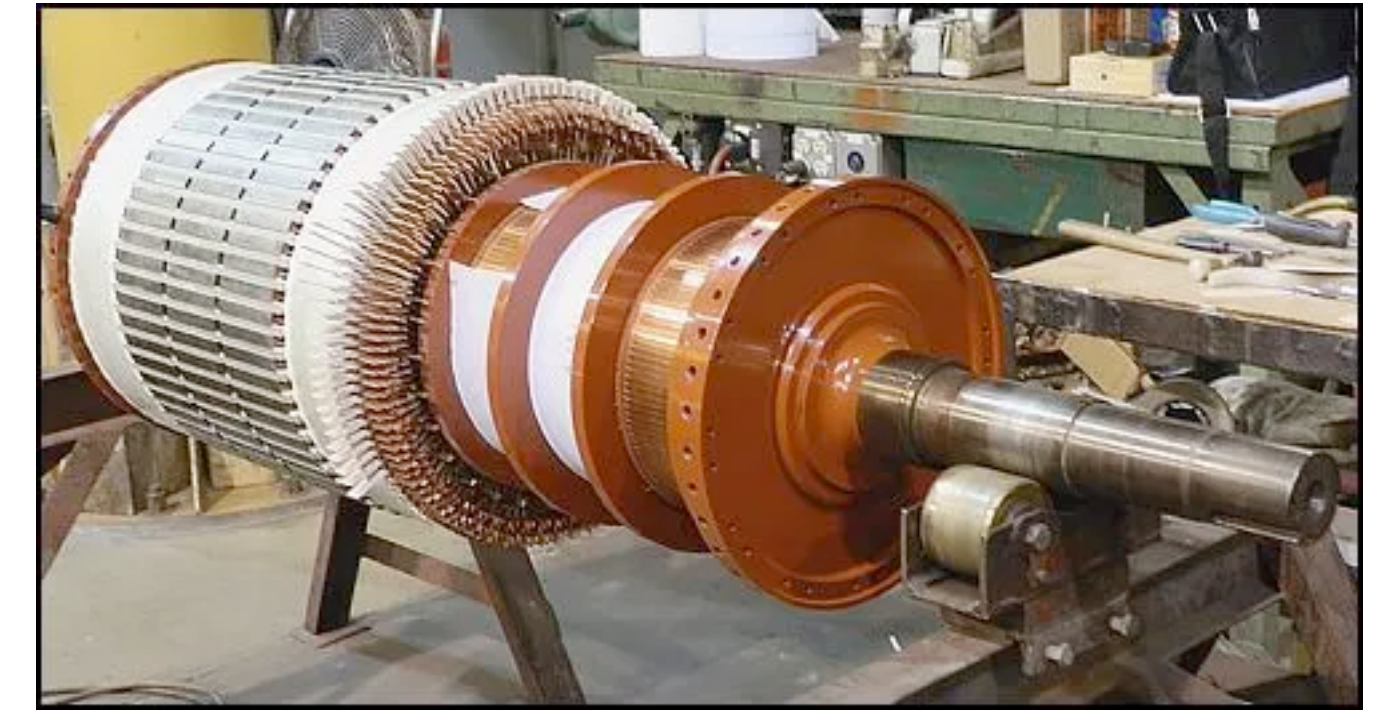
La matrice dei momenti giroscopici viene moltiplicata per il vettore delle velocità... potrebbe ricordare uno smorzamento viscoso... ma non ha effetti dissipativi!!

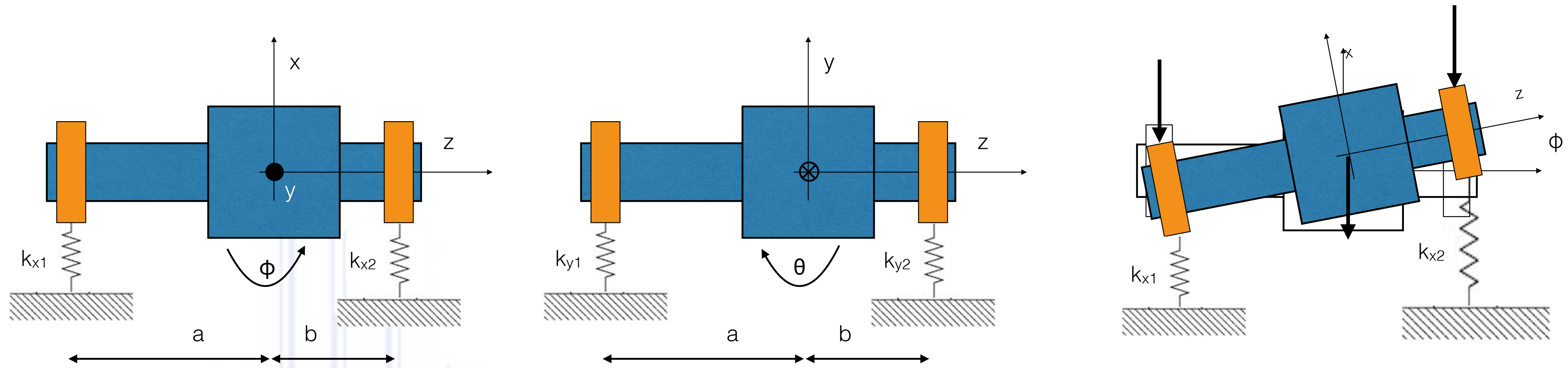
## Rotore rigido su supporti flessibili

Si concentri l'attenzione su un rotore rigido su supporti flessibili.

Questo sistema ha 4 gradi di libertà (due traslazioni e due rotazioni) rispettivamente nei piani orizzontale XZ e verticale YZ.

Ipotizzando che i cuscinetti non abbiano rigidità angolare (short bearings), che si possano muovere solamente nel piano orizzontale e verticale, e in queste direzioni abbiano rigidità indicate con  $k_x$  e  $k_y$  (possono essere uguali tra loro o diverse, sia all'interno del cuscinetto che tra i cuscinetti) diventa possibile scrivere le equazioni del moto con l'approccio Newtoniano o Lagrangiano





Si possono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione nei due piani, ipotizzando che il rotore sia equilibrato e ruoti con una velocità  $\Omega$  attorno all'asse  $z$  ..

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_{x1}(x - a\phi) + k_{x2}(x + b\phi) = 0 \\ m\ddot{y} + k_{y1}(y + a\theta) + k_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + ak_{y1}(y + a\theta) - bk_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} - ak_{x1}(y - a\phi) + bk_{x2}(x + b\phi) = 0 \end{cases}$$

Equilibrio forze in dir y

Equilibrio forze in dir x

Equilibrio momenti attorno  $\theta$

Equilibrio momenti attorno  $\phi$

momenti giroscopici

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oppure:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑

momenti giroscopici
accoppiamento tra i GDL y e θ
accoppiamento tra i GDL x e φ

avendo sostituito le seguenti espressioni compatte..

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

in forma condensata:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

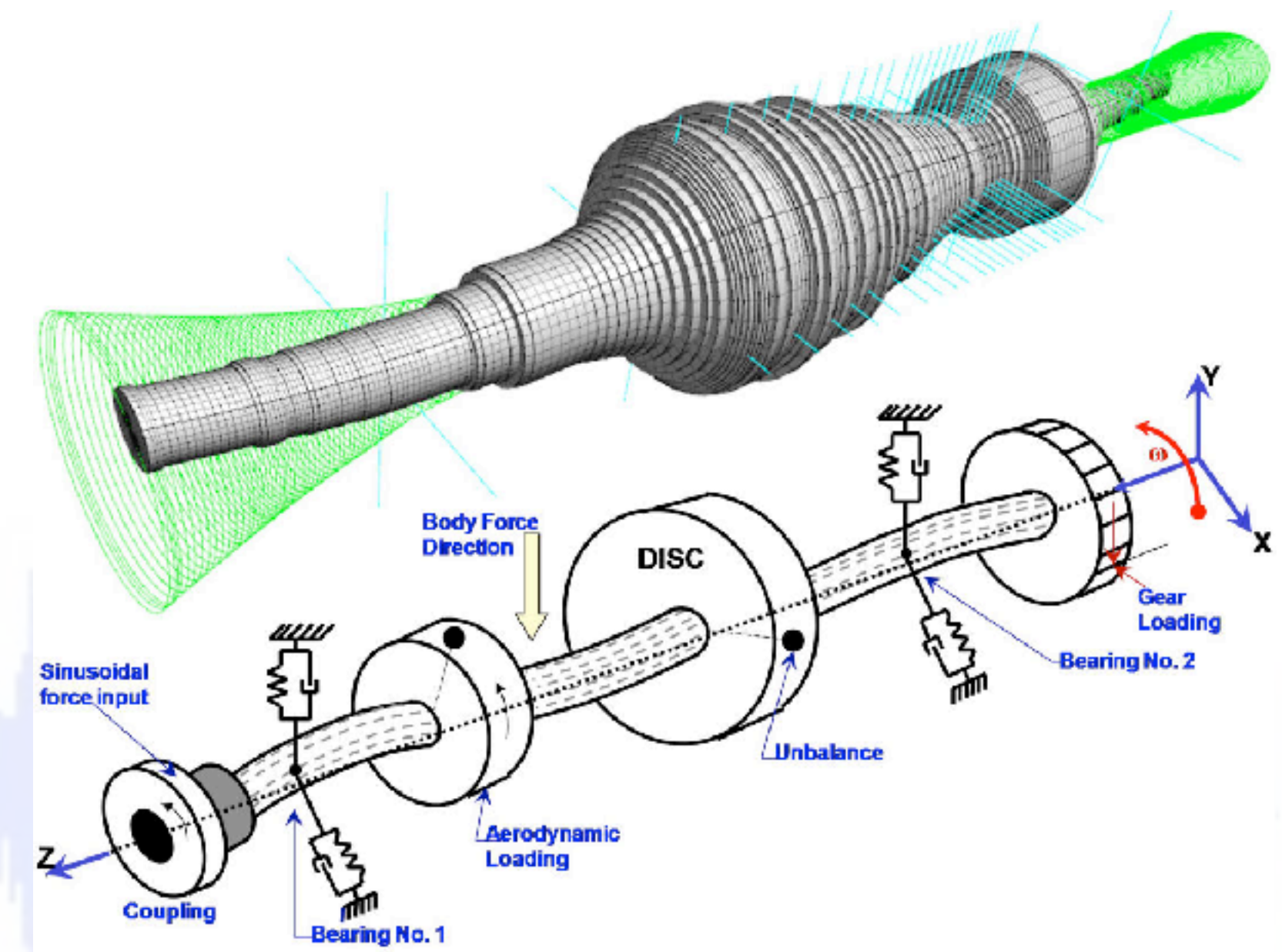
..l'accoppiamento elastico lega le coordinate della 1&4 e 2&3 equazione

..i momenti giroscopici quello della 3&4 equazione

Bisogna risolverle le equazioni con attenzione! e quelle accoppiate dovranno essere risolte simultaneamente (!)

Le coordinate che descrivono il sistema ( $x, y, \theta, \phi$ ) potranno perciò variare indipendentemente tra loro o simultaneamente, dando luogo a moti complessi!

Si analizzano di seguito alcune condizioni differenti..



## Caso 1 Rotore rigido su supporti isotropi

Per l'isotropia dei vincoli  $k_{xT} = k_{yT} = k_T$        $k_{xC} = k_{yC} = k_C$        $k_{xR} = k_{yR} = k_R$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Ipotizzando che il rotore sia fermo  $\Omega=0$   
oppure che  $I_p$  sia trascurabile

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Ipotizzando in più che  
il baricentro coincida con il centro elastico

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Caso 1.1 rotore rigido, fermo, vincoli isotropi, senza accoppiamento elastico..

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Le equazioni sono disaccoppiate !  
possono essere risolte  
indipendentemente

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica  
soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si arriva a:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 e^{st} = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 e^{st} = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 e^{st} = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 e^{st} = 0 \end{cases}$$

da eq. I e II

$$s^2 = -\frac{k_T}{m}$$

$$s_1 = s_2 = j\sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

$$s_3 = s_4 = j\sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

da eq. III e IV

$$s^2 = -\frac{k_R}{I_d}$$

$$s_5 = s_6 = -j\sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

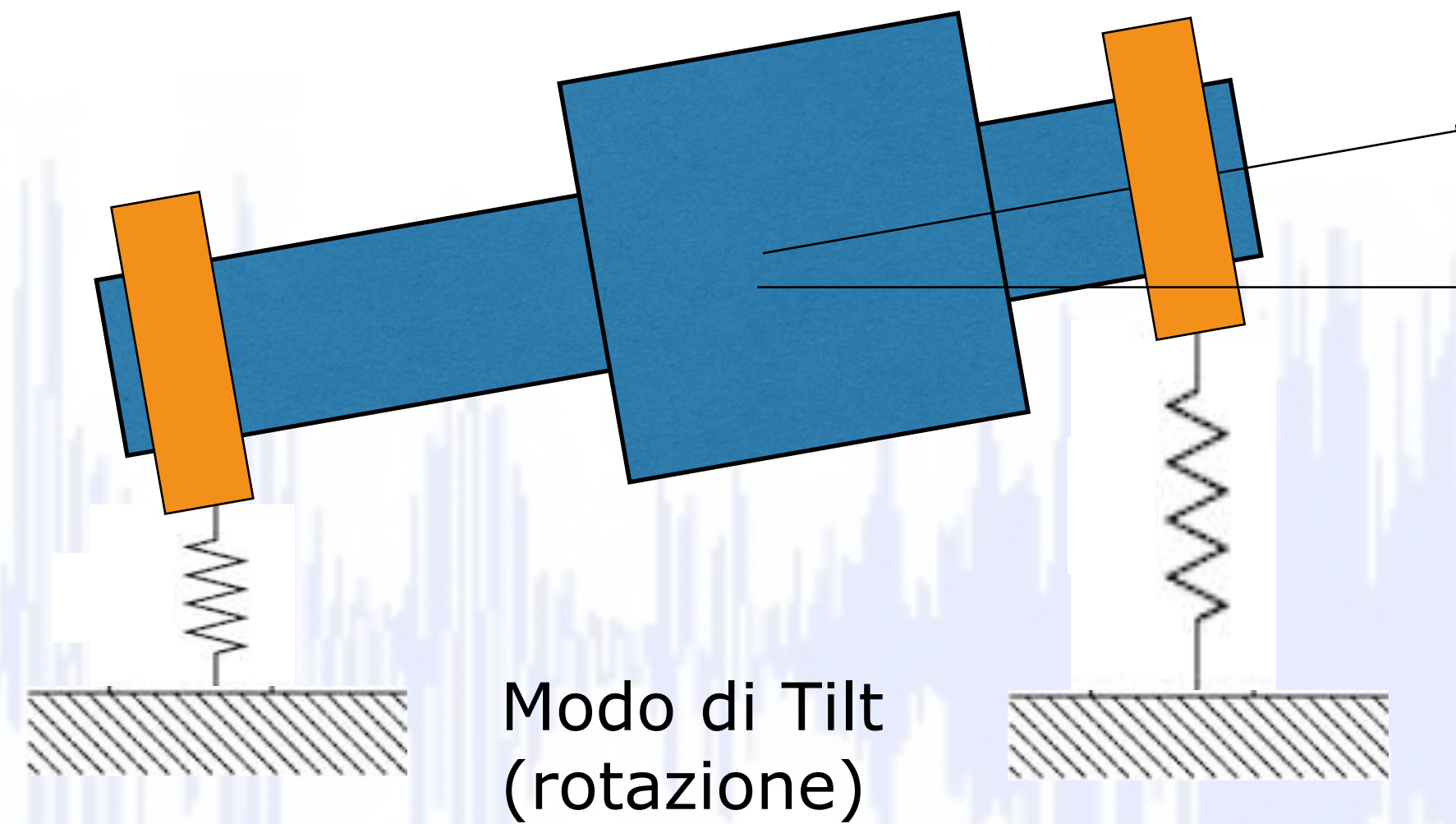
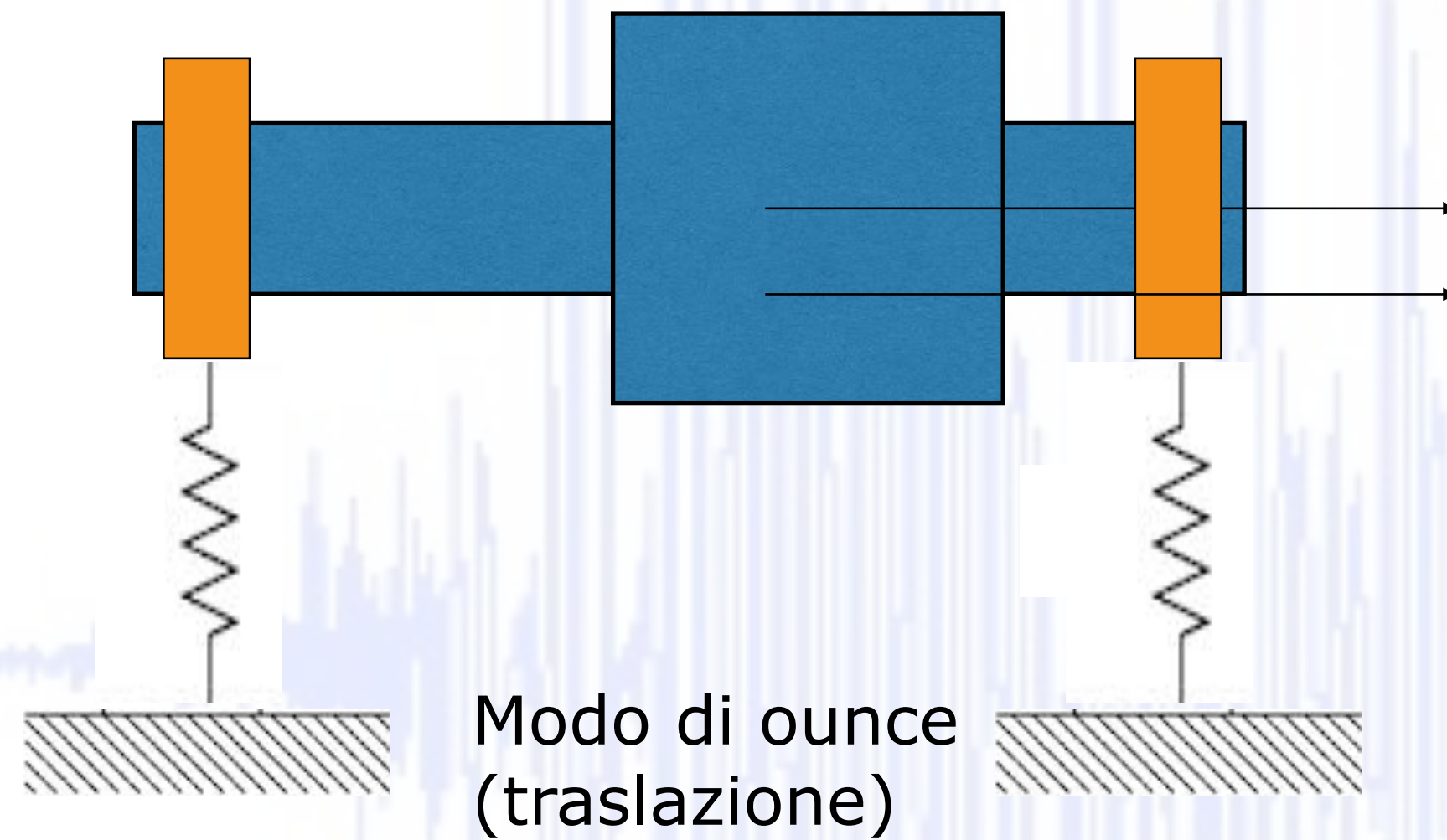
$$s_7 = s_8 = -j\sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

4 GDL > 8 soluzioni per le equazioni del moto!, a de a due, tra loro complesse coniugate!

Non c'è smorzamento, quindi sono puramente immaginarie!

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

$$\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

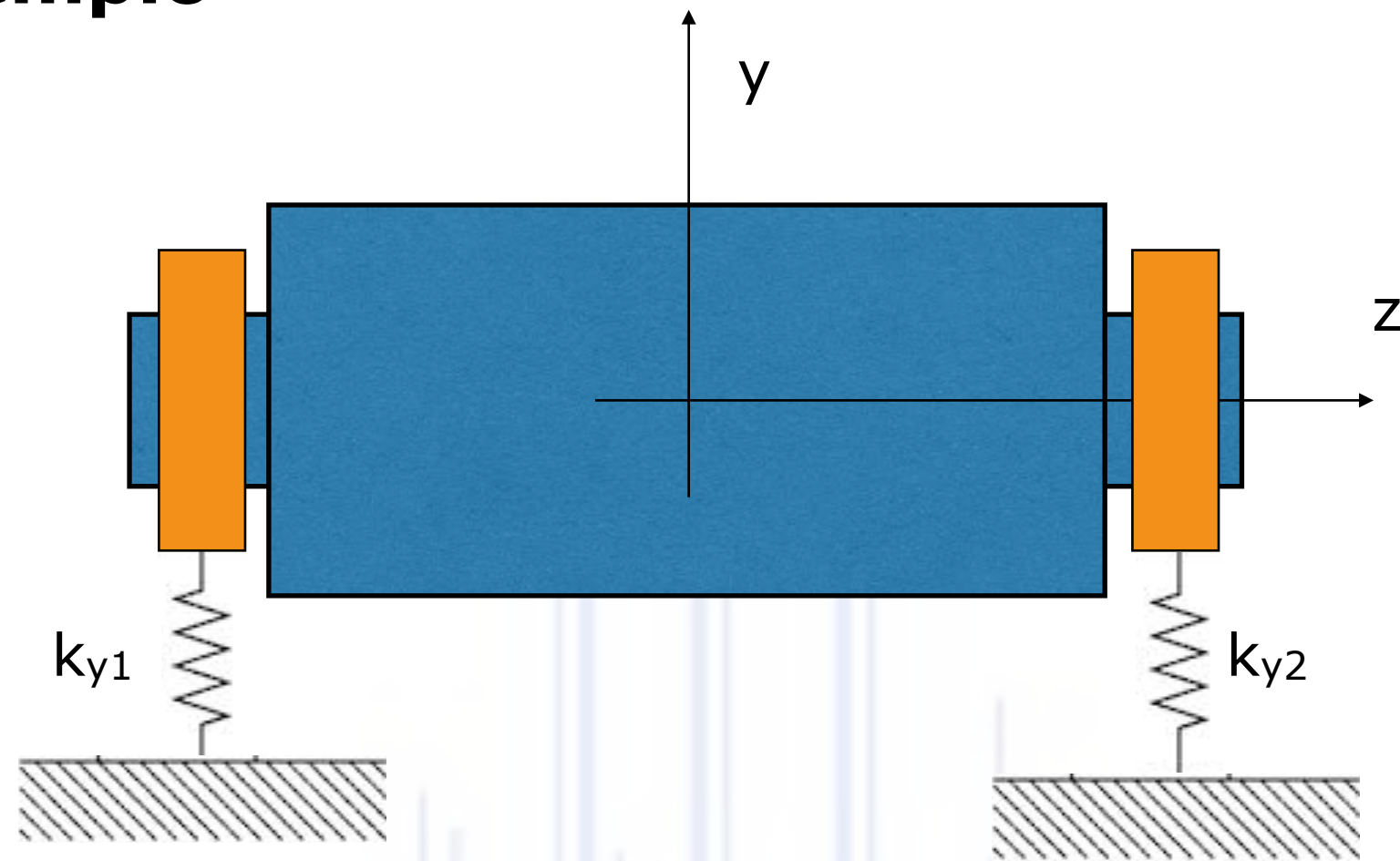


Dal valori dei parametri del sistema ci sarà prima un modo dell'altro.

La stessa cosa avviene sul piano XZ e YZ!



## Esempio



Si consideri un rotore rigido su supporti isotropi

### Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
 raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_x=k_y=1\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

### Condizioni Iniziali

$X_0=1\text{mm}$   
 $Y_0=0.5\text{mm}$   
 $V_{x0}=30\text{mm/s}$

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68\text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134\text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625\text{kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche:

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000\text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0\text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125\text{kNm}$$

Quali sono le Frequenze naturali ?  
 Come si calcola la risposta del baricentro del rotore?

Dalle formule viste:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s} \quad f_1 = f_2 = 20.32 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} = 208.97 \text{ rad/s} \quad f_3 = f_4 = 33.26 \text{ Hz}$$

Prima il modo di Bounce  
poi il modo di Tilt

Con le solite equazioni, sostituendo le CI per trovare i valori della costanti Ai e Bi si determinano le leggi del moto del baricentro (traslazioni x e y, analogamente per le rotazioni  $\theta$  e  $\varphi$ )

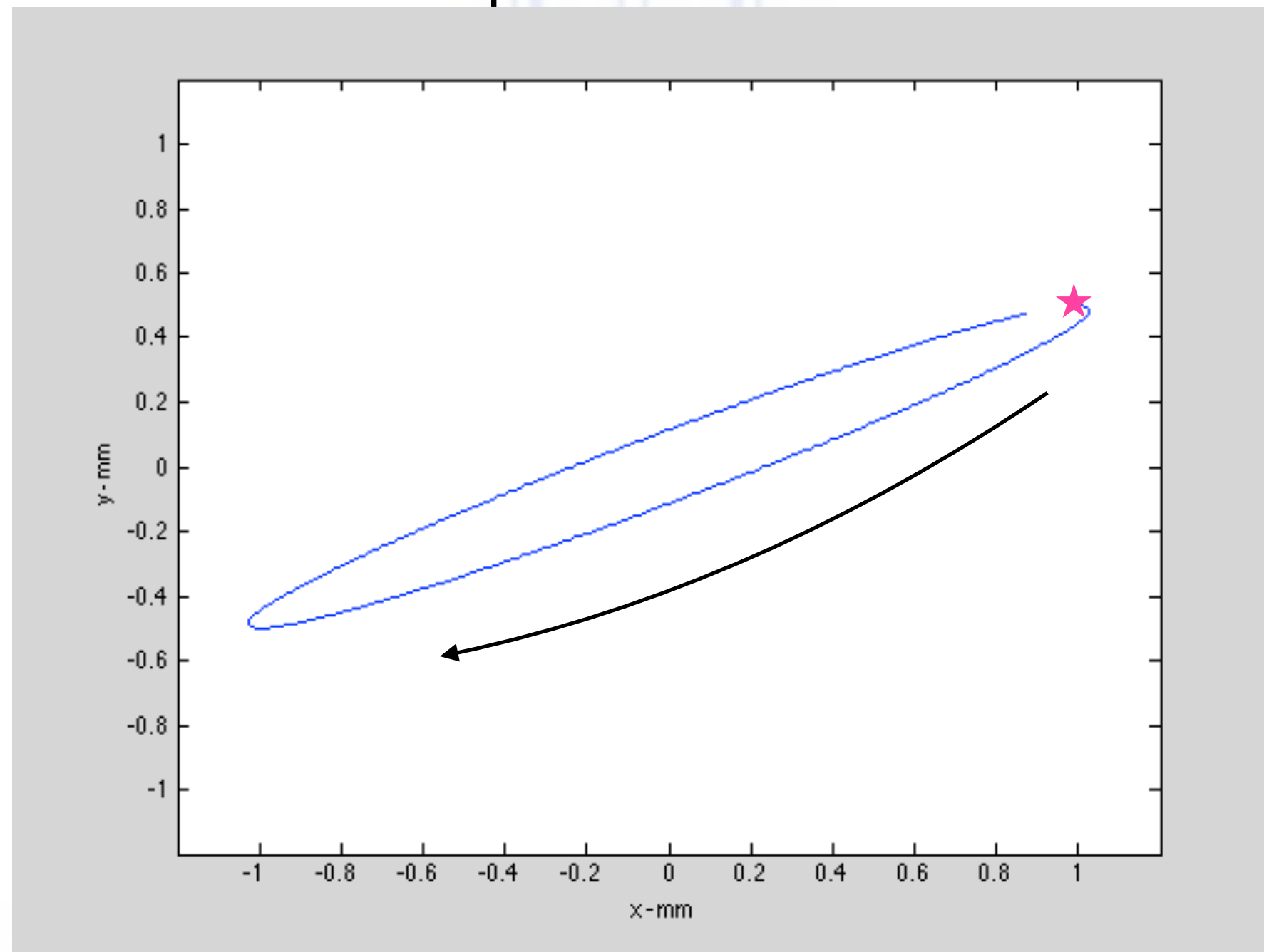
$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) \\ y = B_1 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 \cos \omega_1(\omega_1 t) - A_2 \sin \omega_1(\omega_1 t) \\ \dot{y} = B_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

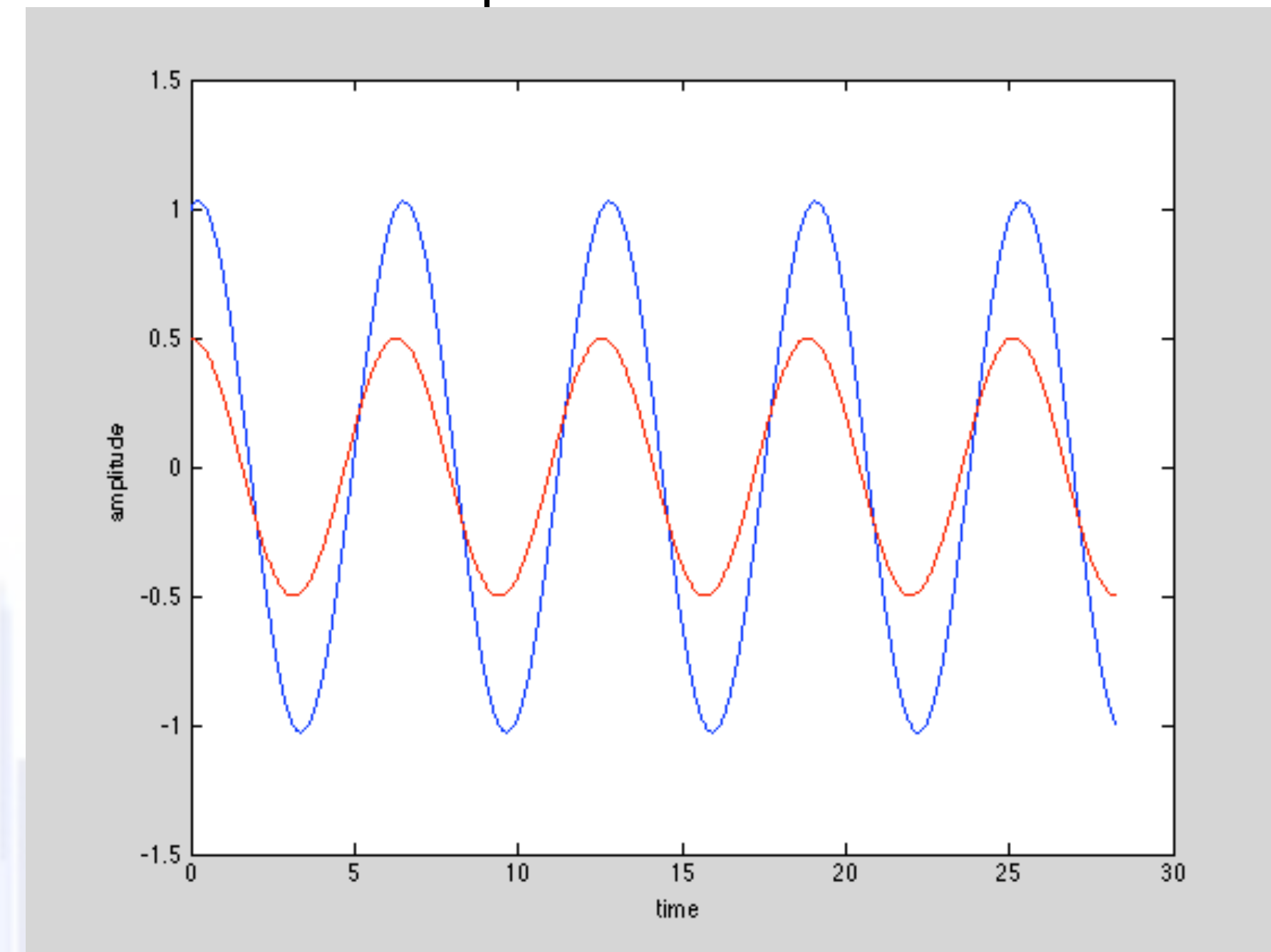
$$\begin{cases} x = \left( \frac{30}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \\ y = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

E' facile costruire un programma che calcoli e visualizzi la posizione del baricentro..

diagramma orbitale  
nel piano XY



spostamento XZ(blu) YZ(rosso)  
nel tempo t



★ posizione iniziale

Caso 1.2 rotore rigido, fermo, vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..

In questo caso è evidente l'accoppiamento tra le equazioni  $k_C$  sono diversi da 0

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

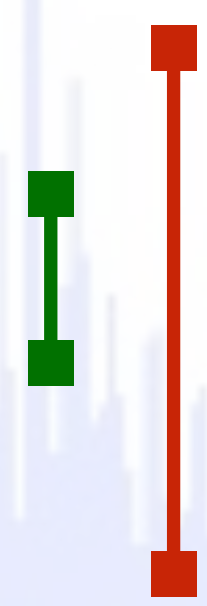
$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_T & 0 & 0 & k_C \\ 0 & k_T & -k_C & 0 \\ 0 & -k_C & k_R & 0 \\ k_C & 0 & 0 & k_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si arriva a:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C \Phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C \Theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 + k_C X_0 = 0 \end{cases}$$



bisogna risolvere le equazioni simultaneamente!

Estraendo  $X_0$  dalla I e IV equazione:

$$\bullet X_0 = -\frac{k_C \Phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \Phi_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_R^2 = 0$$

Estraendo  $Y_0$  dalla II e III equazione:

$$\bullet Y_0 = \frac{k_C \Theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \Theta_0}{k_C}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_R^2 = 0$$

NB equazioni uguali

sviluppando otteniamo l'equazione caratteristica..

$$s^4 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

..le cui radici in  $s^2$  sono:

$$s^2 = -\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}}$$

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}}$$

Nuovamente servono 8 radici..

$$s_1 = s_2 = j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma}$$

$$s_3 = s_4 = j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma}$$

$$s_5 = s_6 = -j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma}$$

$$s_7 = s_8 = -j \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma}$$

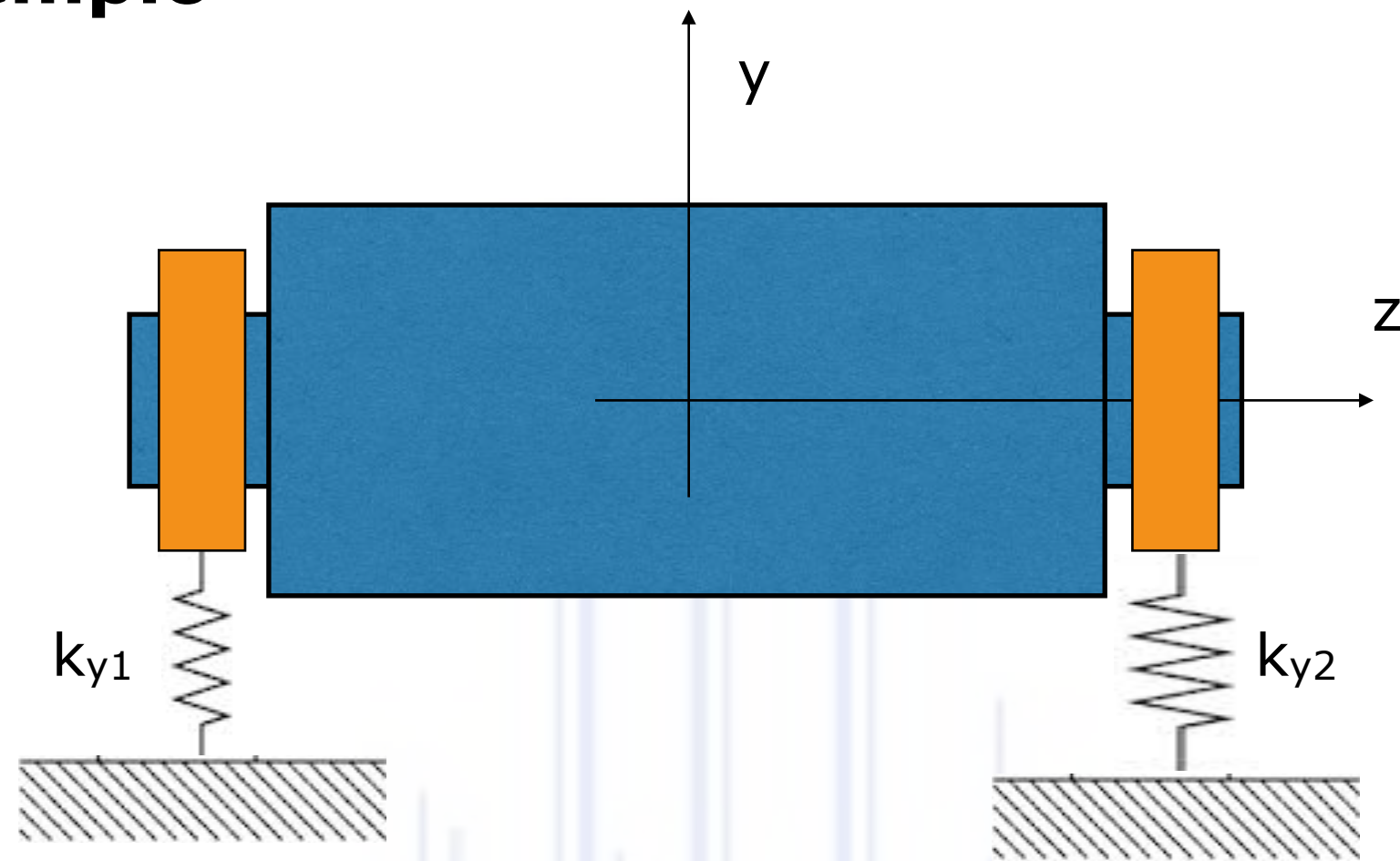
$$\omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma}$$

Analogamente al caso precedente, ci saranno modi di Bounce a Tilt, in questo caso traslazioni e rotazioni avverranno simultaneamente :

$$\left(\frac{X_0}{\Phi_0}\right)_{i=1,2} = -\frac{k_C}{(m\omega_i^2 + k_T)} = -\frac{(I_d\omega_i^2 + k_R)}{k_C}$$

$$\left(\frac{Y_0}{\Theta_0}\right)_{i=3,4} = \frac{k_C}{(m\omega_i^2 + k_T)} = \frac{(I_d\omega_i^2 + k_R)}{k_C}$$

## Esempio



## Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$

$k_{x2}=k_{y2}=1\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$

Calcolo proprietà elastiche:

Le proprietà inerziali restano uguali

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68\text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134\text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625\text{kgm}^2$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000\text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75\text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75\text{kNm}$$

Bisogna usare questa formula nelle sue declinazioni

$$s^2 = - \left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 135.08 \text{ rad/s}$$

$$f_1 = f_2 = 21.50 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma}$$

$$\omega_3 = \omega_4 = 225.21 \text{ rad/s}$$

$$f_3 = f_4 = 35.84 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = \omega_4 = -j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma}$$

che sono più alte del caso precedente, per la maggiore rigidità!

Con questi valori si ricavano i rapporti di spostamento dei diversi GDL.  
Nel piano XZ

modo1  $\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=1} = -1.220$

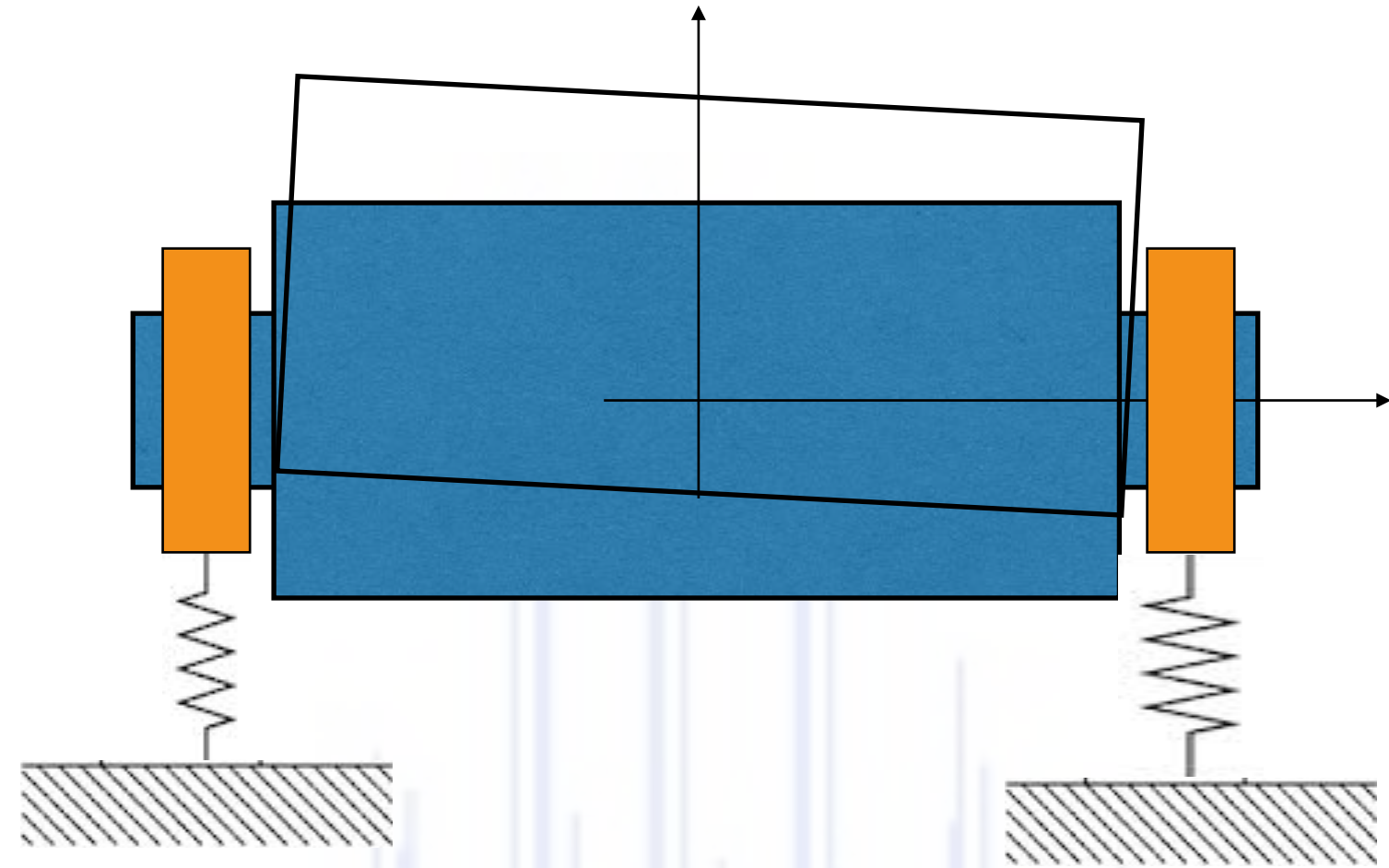
Con uno spostamento lineare  $X_0$  di 1 mm ruoterà di un angolo  $\Phi_0$  pari a  $-1.220e^{-3}$  rad

modo2  $\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=3} = 0.0191$

Con uno spostamento lineare  $X_0$  di 1 mm ruoterà di un angolo  $\Phi_0$  pari a  $0.199e^{-3}$  rad

..analogamente nel piano YZ

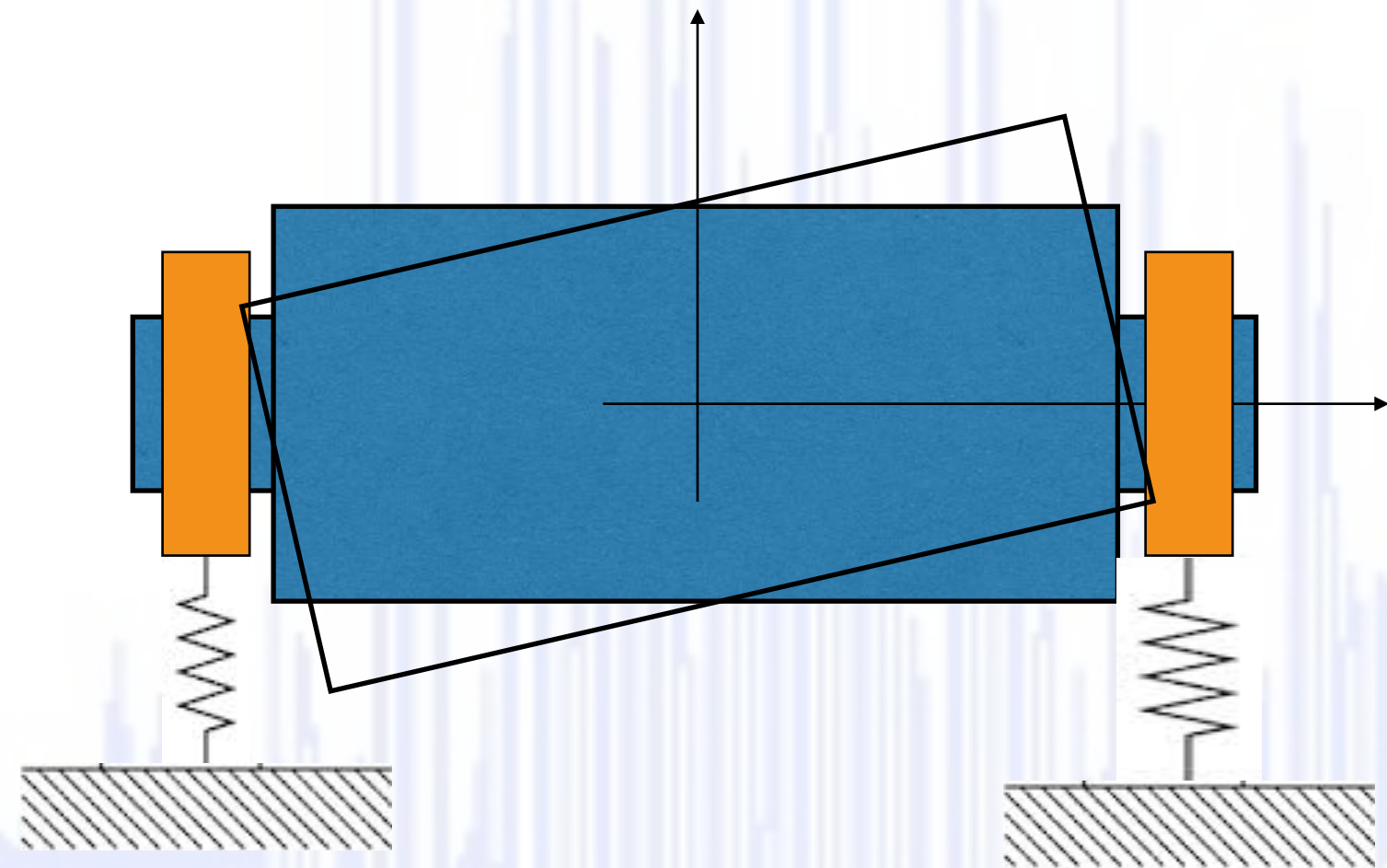




$$f_1 = f_2 = 21.50Hz$$

$$\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=1} = -1.220$$

il rotore.. trasla e ruota simultaneamente!



$$f_3 = f_4 = 35.84Hz$$

$$\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=3} = 0.0191$$

NB attenzione ai segni!  
NB si sta valutando la posizione del baricentro!

Caso 1.3 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, senza accoppiamento elastico..

$$k_C = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + k_R\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + k_R\phi = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p\Omega \\ 0 & 0 & -I_p\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le due prime equazioni sono disaccoppiate,  
i modi di Bounce saranno puramente traslatori nei piani XZ e YZ  
come nel caso 1.1

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 = j\sqrt{\frac{k_T}{m}} \\ s_5 &= s_6 = -j\sqrt{\frac{k_T}{m}} \end{aligned} \quad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

Le seconde due equazioni sono accoppiate,  
con una soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases} \quad \text{si ottiene:} \quad \begin{cases} (I_d s^2 + k_r) \Theta_0 + I_p \Omega s \Phi_0 = 0 \\ -I_p \Omega s \Theta_0 + (I_d s^2 + k_r) \Phi_0 = 0 \end{cases}$$

Eliminando  $\Theta_0$  e  $\Phi_0$  si arriva a:

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0$$

$$I_d s^2 + k_R = \pm j I_p \Omega s$$

portando a dx il termine con  $\Omega$ , e prendendo  
la radice quadrata

$$I_d s^2 \pm j I_p \Omega s + k_R = 0$$

2 equazioni caratteristiche in  $s^2$

$$s_{3,4} = j \left\{ \pm \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left( \frac{I_p \Omega}{2I_d} \right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} \right\} \quad s_{7,8} = -s_{3,4}$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} \quad \omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

Queste frequenze naturali dipendono da  $\Omega$  !!, se questa velocità tende a 0, si ritorna ai valori trovati al caso 1.1

Nel diagramma di Campbell le  $\omega_i$  non saranno più rette parallele all'asse delle frequenze!

Analogamente a quanto già visto si potranno calcolare i rapporti tra gli spostamenti angolari:

$$\left(\frac{\Theta_0}{\Phi_0}\right)_i = -\frac{I_p \Omega \omega_i}{(I_d \omega_i^2 + k_R)} = \frac{(I_d \omega_i^2 + k_R)}{I_p \Omega \omega_i}$$

la struttura di questa equazione è del tipo

$$-\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$$

che prevede come soluzione solamente

$$\frac{A}{B} = \pm j$$

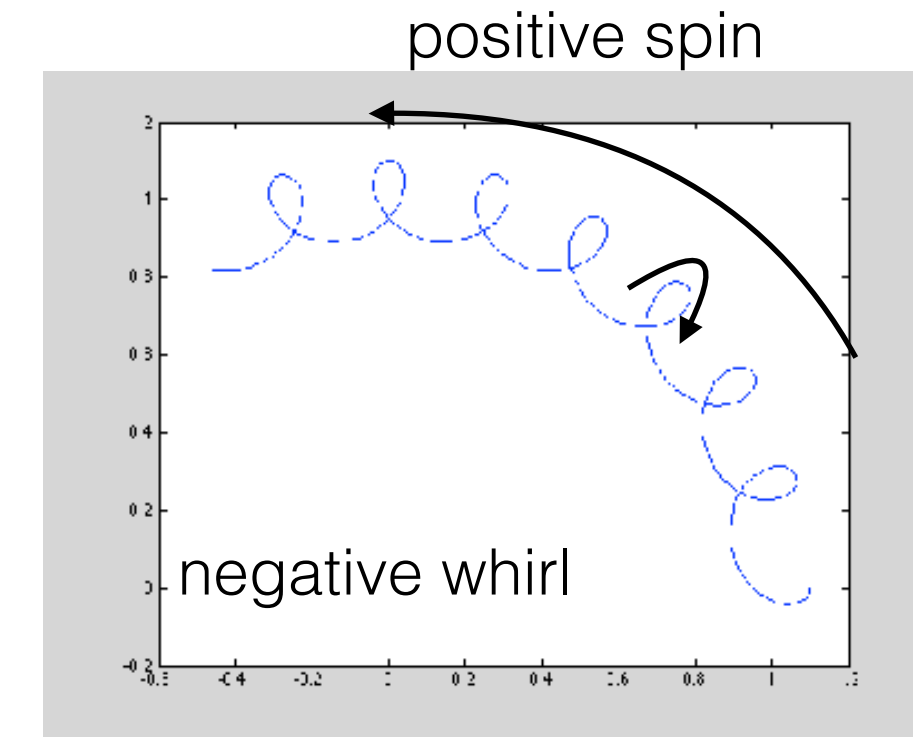
I due angoli saranno sfasati di 90 gradi.  
In funzione del segno uno sarà in anticipo o in ritardo rispetto all'altro.

Ricordando  $s_i^2 = -\omega_i^2$  si portano scrivere le seguenti relazioni:

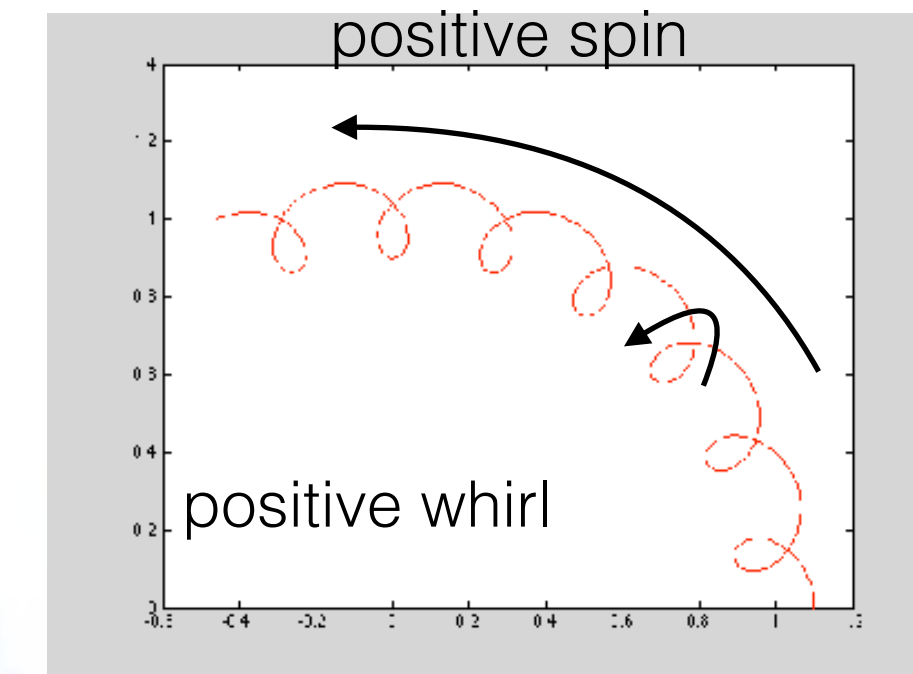
$$k_R > I_d \omega_i^2 \quad \begin{pmatrix} \Theta_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}_i = \begin{cases} -j \\ j \end{cases} \quad \begin{aligned} s_i &= j\omega_i \\ s_i &= -j\omega_i \end{aligned}$$

$$k_R < I_d \omega_i^2 \quad \begin{pmatrix} \Theta_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}_i = \begin{cases} j \\ -j \end{cases} \quad \begin{aligned} s_i &= -j\omega_i \\ s_i &= j\omega_i \end{aligned}$$

Backward Mode



Forward Mode



Prendendo  $\Phi_0=j$  nel tempo si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$k_R > I_d \omega_i^2 \quad \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{j\omega_i t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{-j\omega_i t} = 2 \begin{pmatrix} \cos\omega_i t \\ -\sin\omega_i t \end{pmatrix}$$

moto circolare, orario..  
spin anti orario > Backward Mode

$$k_R < I_d \omega_i^2 \quad \begin{pmatrix} \Theta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{j\omega_i t} + \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{-j\omega_i t} = 2 \begin{pmatrix} \cos\omega_i t \\ \sin\omega_i t \end{pmatrix}$$

moto circolare, anti orario..  
spin anti orario > Forward Mode

Caso 1.4 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..  $k_C \neq 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si arriva a:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C \Phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C \Theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 + I_p \Omega s \Phi_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 - I_p \Omega s \Theta_0 + k_C X_0 = 0 \end{cases}$$

..sistema di equazioni fortemente accoppiate!

Da 1 e 2 si estraggono  $\Phi_0$  e  $\theta_0$  e si sostituiscono in 3 e 4

$$\begin{cases} \Phi_0 = -\frac{(ms^2 + k_T)}{k_C} X_0 \\ \Theta_0 = \frac{(ms^2 + k_T)}{k_C} Y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} (I_d s^2 + k_R)(ms^2 + k_T) Y_0 - I_p \Omega s (ms^2 + k_T) X_0 - k_C^2 Y_0 = 0 \\ -(I_d s^2 + k_R)(ms^2 + k_T) X_0 + I_p \Omega s (ms^2 + k_T) Y_0 + k_C^2 X_0 = 0 \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Da 3 e 4 si elimina  $X_0$  e  $Y_0$  per ottenere l'equazione caratteristica in  $s^4$ :

$$\left\{ (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 \right\}^2 + \left\{ I_p \Omega s (I_d s^2 + k_R) \right\}^2 = 0 \quad \text{portando a dx il termine con } \Omega, \text{ e prendendo la radice quadrata}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = \mp j I_p \Omega s (I_d s^2 + k_R)$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 \mp j I_p \Omega s + k_R) - k_C^2 = 0$$

sviluppando i prodotti e riarrangiando i termini si ottiene l'equazione caratteristica in  $s^4$

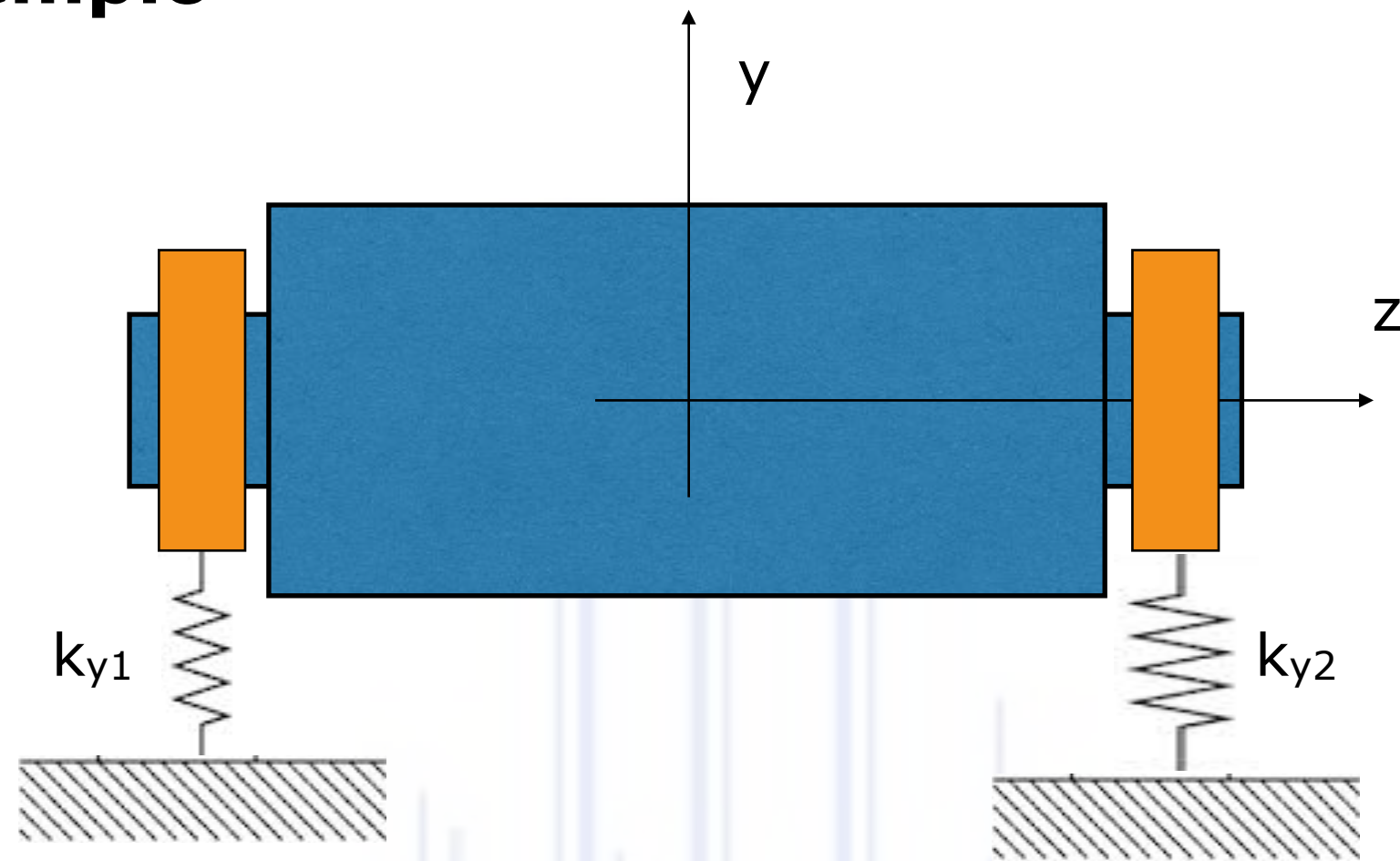
$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_o}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

dipendenza da velocità di spin

=> radici immaginarie, a due a due complesse coniugate!...

solitamente  $> 0$

## Esempio



### Rotore senza accoppiamento elastico

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_x=k_y=1\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$

### Rotore con accoppiamento elastico

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$

$k_{x2}=k_{y2}=1.3\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$

In moto a 4000 rpm >  $\Omega = rpm \frac{2\pi}{60} = 418.88 \frac{rad}{s}$

Le proprietà inerziali restano uguali

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68 \text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{kgm}^2$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0 \text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125 \text{kNm}$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75 \text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75 \text{kNm}$$



Direttamente dalle formule viste

Senza accoppiamento

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 168.85 \text{ rad/s}$$

$$\omega_4 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 258.61 \text{ rad/s}$$

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_3 = 26.87 \text{ Hz} \\ f_4 = 41.16 \text{ Hz} \end{cases}$$

Con accoppiamento

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_o}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_c^2}{m I_d} = 0$$

$$s^4 \mp j 89.76 s^3 + 68966 s^2 \mp 1682800 s + 925.48 \times 10^6 = 0$$

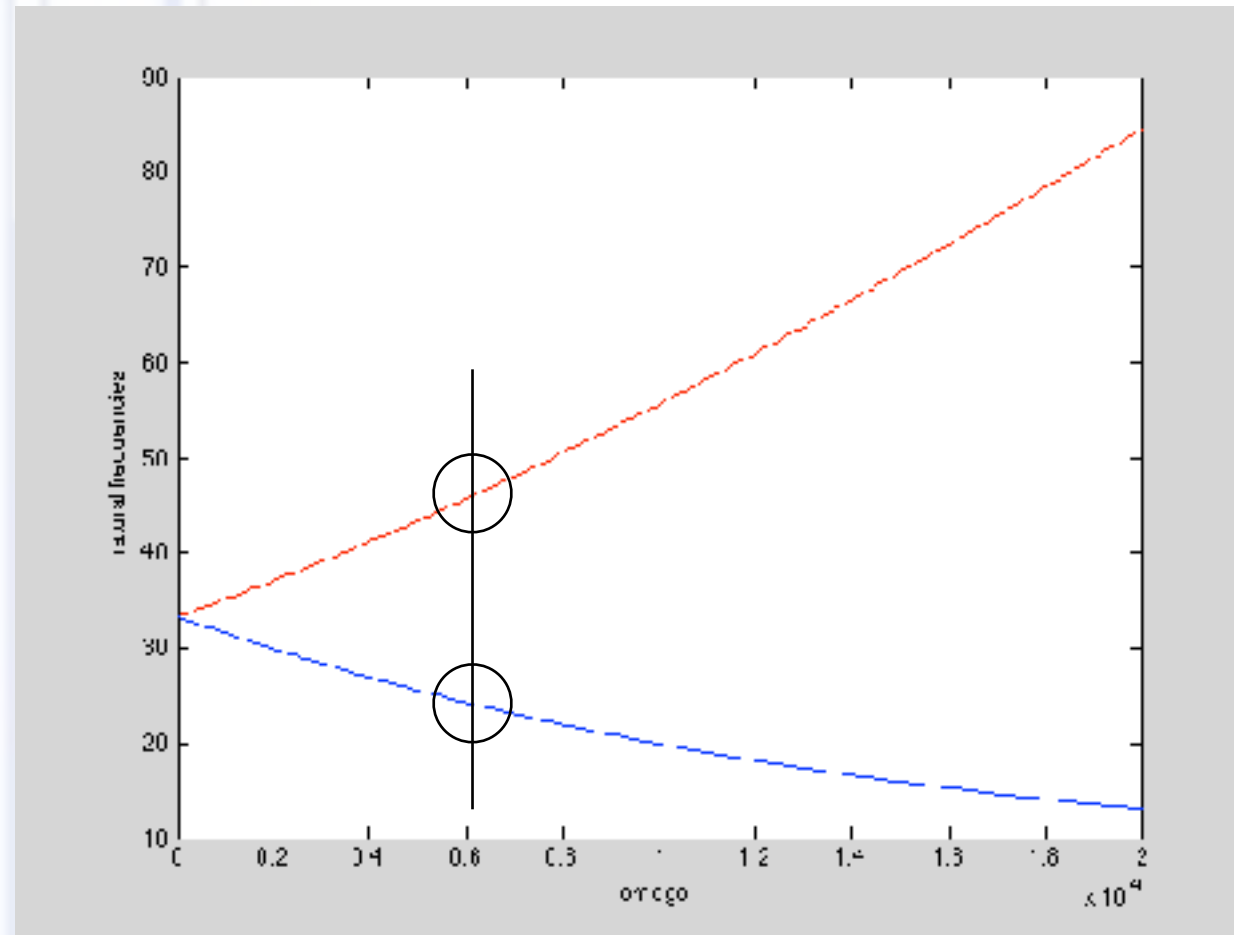
$$\begin{cases} f_1 = 21.33 \text{ Hz} \\ f_2 = 21.58 \text{ Hz} \\ f_3 = 29.58 \text{ Hz} \\ f_4 = 43.62 \text{ Hz} \end{cases}$$

backward mode  
forward mode

sostituendo i valori delle frequenza naturali in

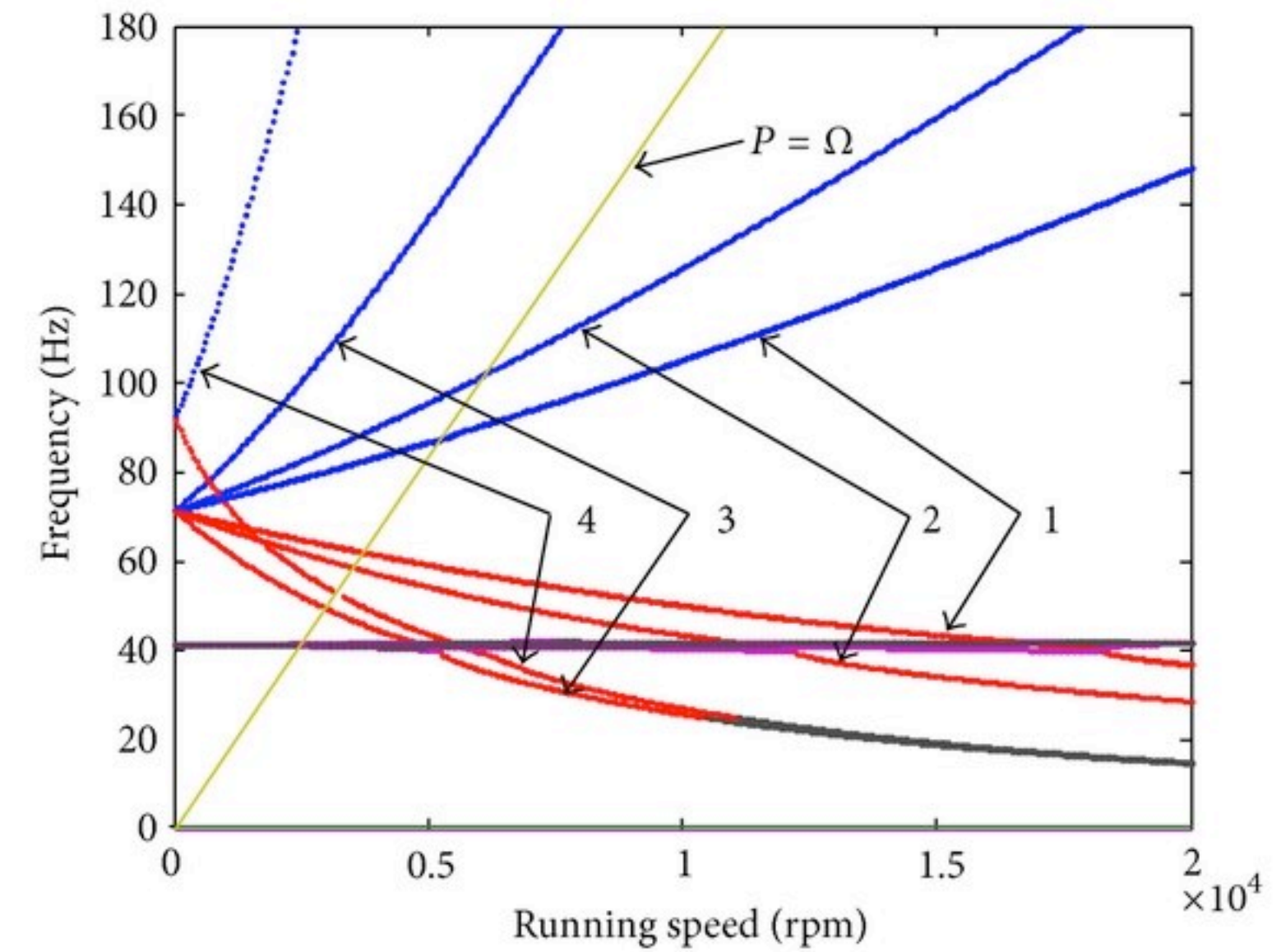
Dal momento che le frequenze naturali dipendono da  $\Omega$   
è possibile lottare la frazione in funzione della frequenza di spin

Variazione di  $\omega_3$   $\omega_4$   
tra 0 e 2000 rad/s



Forward Whirl

Backward Whirl



- ..al variare del rapporto  $I_p/I_d$
- 1 > 0.3
- 2 > 0.5
- 3 > 1.17
- 4 > 2

## Caso 2 Rotore rigido su supporti anisotropi

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vista al presenza della matrice dei momenti giroscopici, si può pensare di riscrivere le equazioni in forma canonica :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + \Omega [\mathbf{G}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

la solita forma di un problema agli autovalori/autovettori

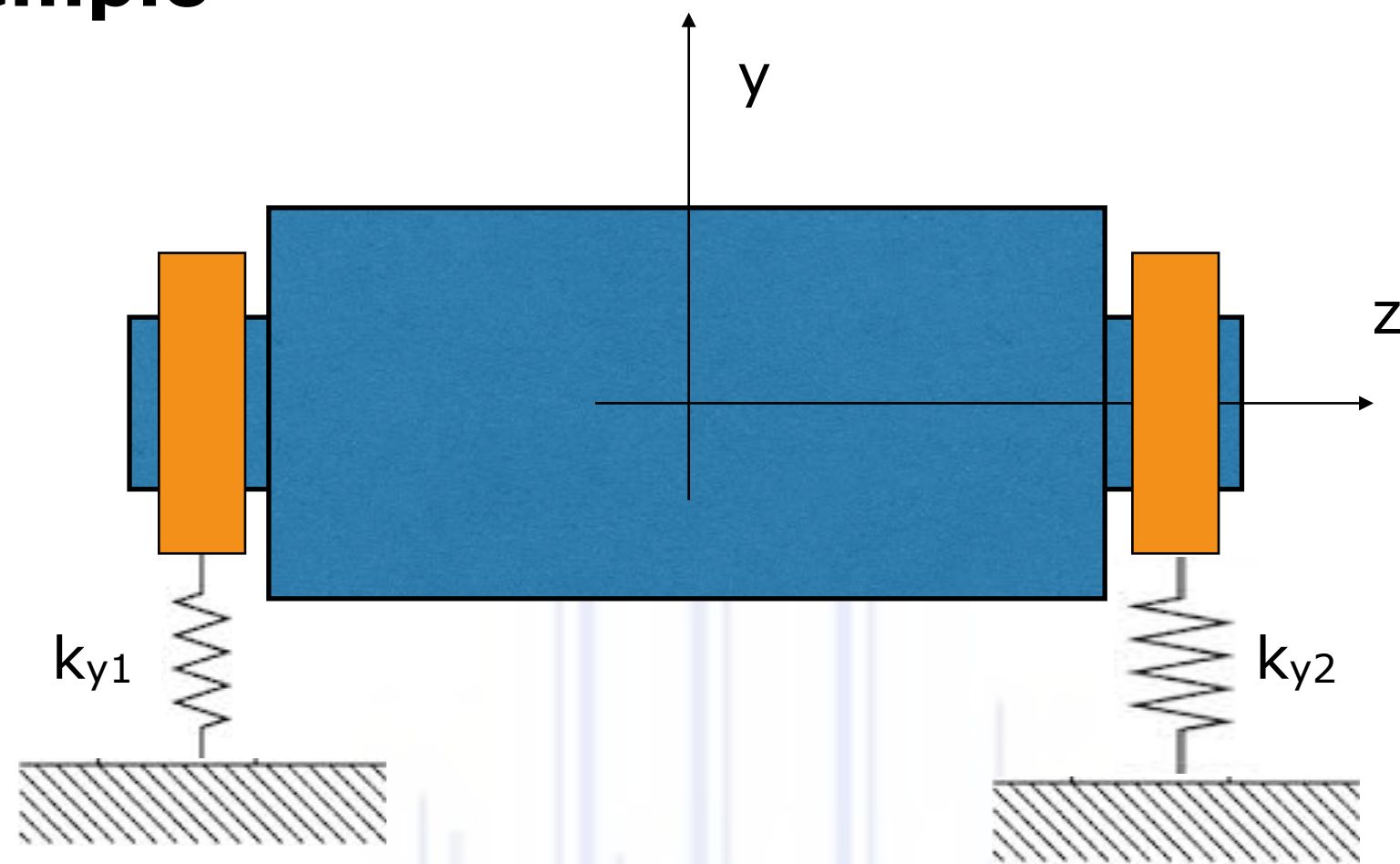
$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_0 e^{st} \quad s\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}_0 = -\mathbf{B}\mathbf{X}_0$$

trovando 8 radici, a due a due complesse coniugate

$$\begin{cases} s_{i=1,4} = +j\omega_{i=1,4} \\ s_{i=5,8} = -j\omega_{i=1,4} \end{cases}$$

## Esempio



**Rotore in moto (@4000 rpm)  
con supporti isotropi  
e accoppiamento elastico**  
lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$   
 $k_{x2}=k_{y2}=1.\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

**Rotore stazionario e in  
moto (@4000 @800rpm)  
con supporti anisotropi  
e accoppiamento elastico**  
lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_{x1}=1\text{MN/m}$      $k_{y1}=1.1\text{MN/m}$   
 $k_{x2}=1.3\text{MN/m}$      $k_{y2}=1.4\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 122.68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8626 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6134 \\ 0 & 0 & -0.6134 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 2.300 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 2.300 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 143.75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 173.75 \end{bmatrix}$$

Con un solutore numerico, è possibile risolvere le equazioni partendo dalla forma canonica  $s\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}_0 = -\mathbf{B}\mathbf{X}_0$

ottenendo nel caso dei supporti isotropi

$$\begin{cases} s_1 = j134.0rad/s \\ s_2 = j135.6rad/s \\ s_3 = j185.9rad/s \\ s_4 = j274.9rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.33Hz \\ f_2 = 21.58Hz \\ f_3 = 29.58Hz \\ f_4 = 43.62Hz \end{cases}$$

ed i loro valori coniugati..

$$\begin{cases} s_5 = -j134.0rad/s \\ s_6 = -j135.6rad/s \\ s_7 = -j185.9rad/s \\ s_8 = -j274.9rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_5 = -21.33Hz \\ f_6 = -21.58Hz \\ f_7 = -29.58Hz \\ f_8 = -43.62Hz \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @0rpm

$$\begin{cases} s_1 = j135.08rad/s \\ s_2 = j141.13rad/s \\ s_3 = j225.21rad/s \\ s_4 = j234.62rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.50Hz \\ f_2 = 22.46Hz \\ f_3 = 35.84Hz \\ f_4 = 37.34Hz \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_5 = -j\dots rad/s \\ s_6 = -j\dots rad/s \\ s_7 = -j\dots rad/s \\ s_8 = -j\dots rad/s \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @4000rpm

$$\begin{cases} s_1 = j134.74rad/s \\ s_2 = j140.94rad/s \\ s_3 = j190.15rad/s \\ s_4 = j278.94rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.44Hz \\ f_2 = 22.43Hz \\ f_3 = 30.26Hz \\ f_4 = 44.40Hz \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_5 = -j\dots rad/s \\ s_6 = -j\dots rad/s \\ s_7 = -j\dots rad/s \\ s_8 = -j\dots rad/s \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @8000rpm

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = j132.78rad/s \\ s_2 = j140.16rad/s \\ s_3 = j161.05rad/s \\ s_4 = j336.07rad/s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 21.13Hz \\ f_2 = 22.30Hz \\ f_3 = 25.63Hz \\ f_4 = 53.49Hz \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} s_5 = -j\dots rad/s \\ s_6 = -j\dots rad/s \\ s_7 = -j\dots rad/s \\ s_8 = -j\dots rad/s \end{array} \right.$$

Si osservi come al variare della frequenza di spin, cambino i valori delle frequenza naturali abbassandosi nel caso di modi backward, alzandosi nel caso di modi forward!

rpm	f1	f2	f3	f4
0	21.50	22.46	35.48	37.34
4000	21.44	22.43	30.26	44.40
8000	21.13	22.30	25.63	53.49

Utilizzando i valori della frequenze naturali è possibile calcolare le forme modali nelle diverse situazioni.

Finora sono stati analizzati supporti esclusivamente elastici,  
ma cosa accade se si aggiunge lo smorzamento?

Le forze agenti sul rotore saranno:

$$\begin{cases} f_{x1} = c_{x1}(\dot{x} - a\dot{\phi}) + k_{x1}(x - a\phi) \\ f_{x2} = c_{x2}(\dot{x} + b\dot{\phi}) + k_{x2}(x + b\phi) \\ f_{y1} = c_{y1}(\dot{y} + a\dot{\theta}) + k_{y1}(y + a\theta) \\ f_{y2} = c_{y2}(\dot{y} - b\dot{\theta}) + k_{y1}(y - b\theta) \end{cases}$$

Con analoghe semplificazioni per gli smorzamenti

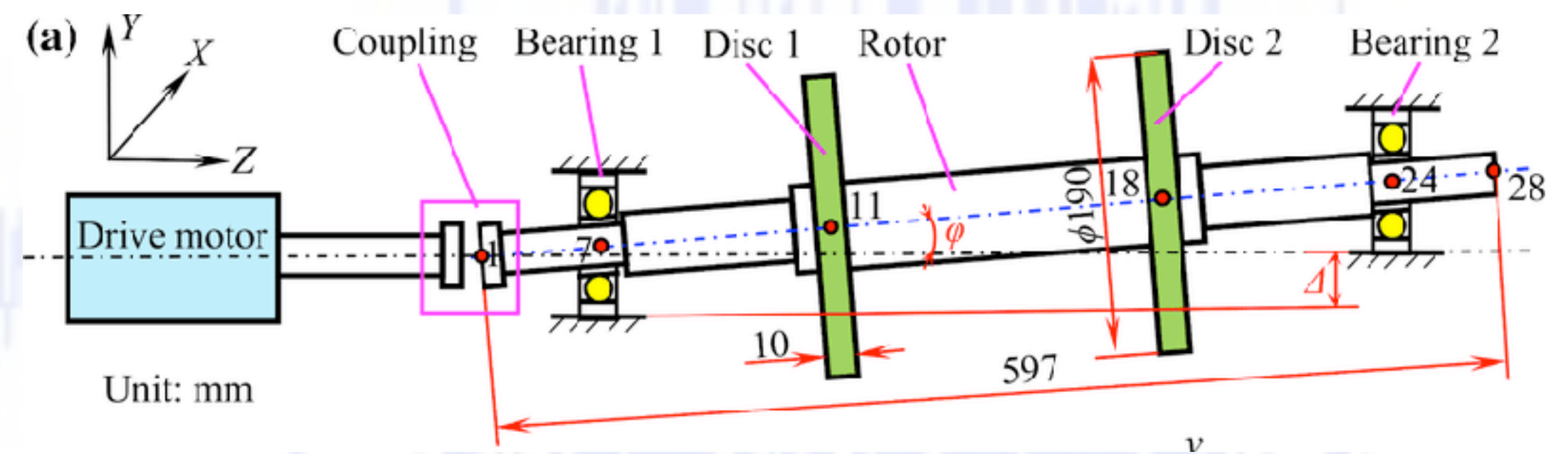
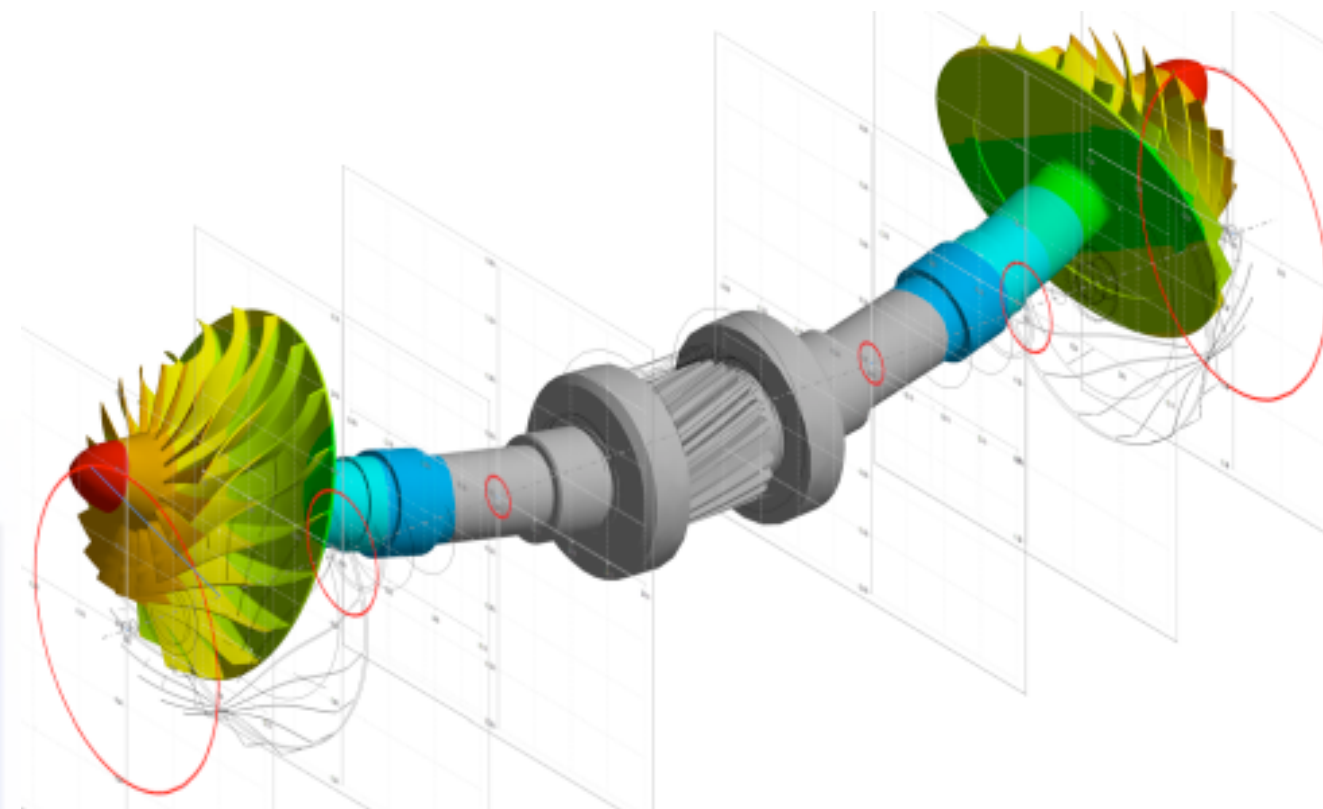
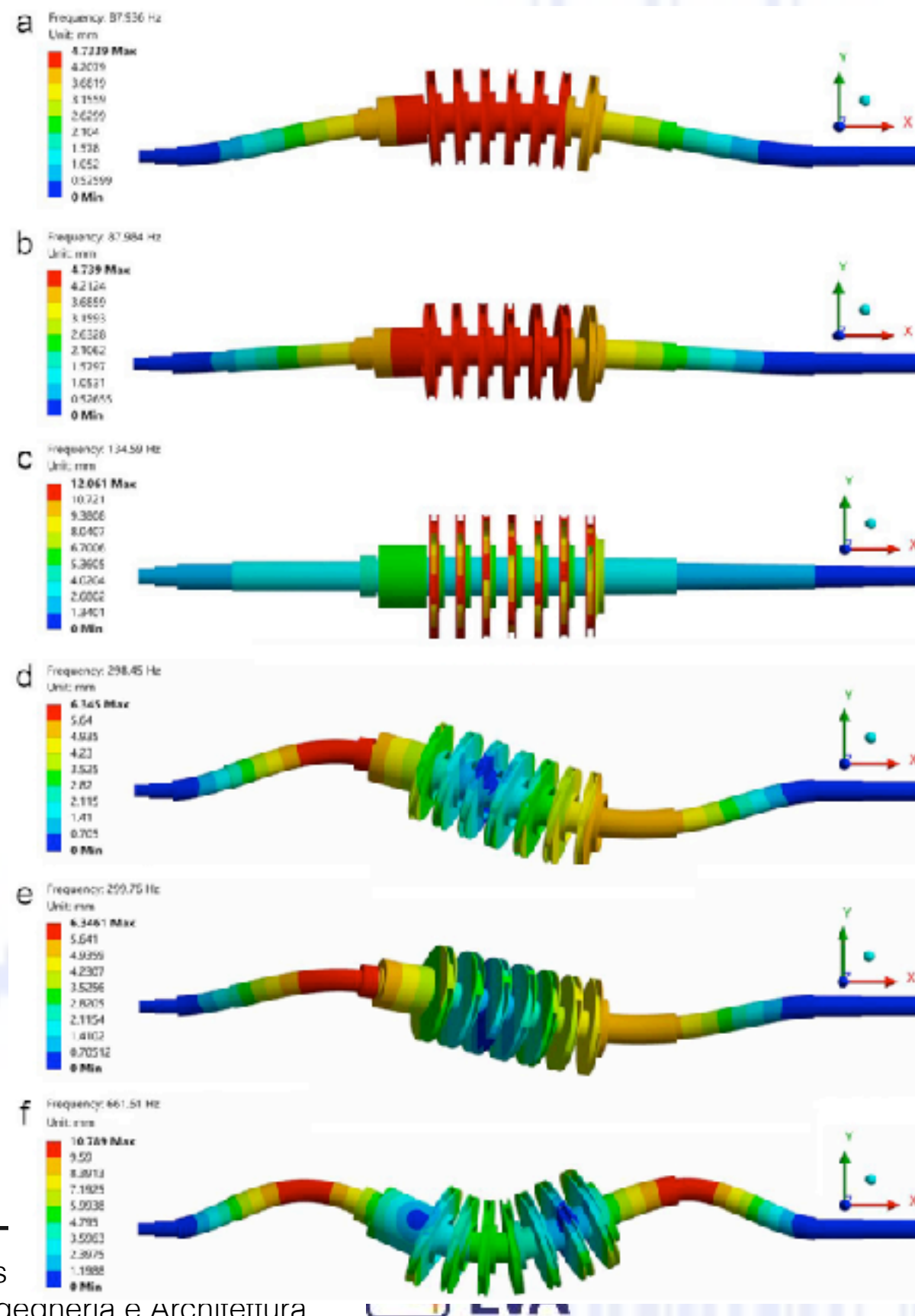
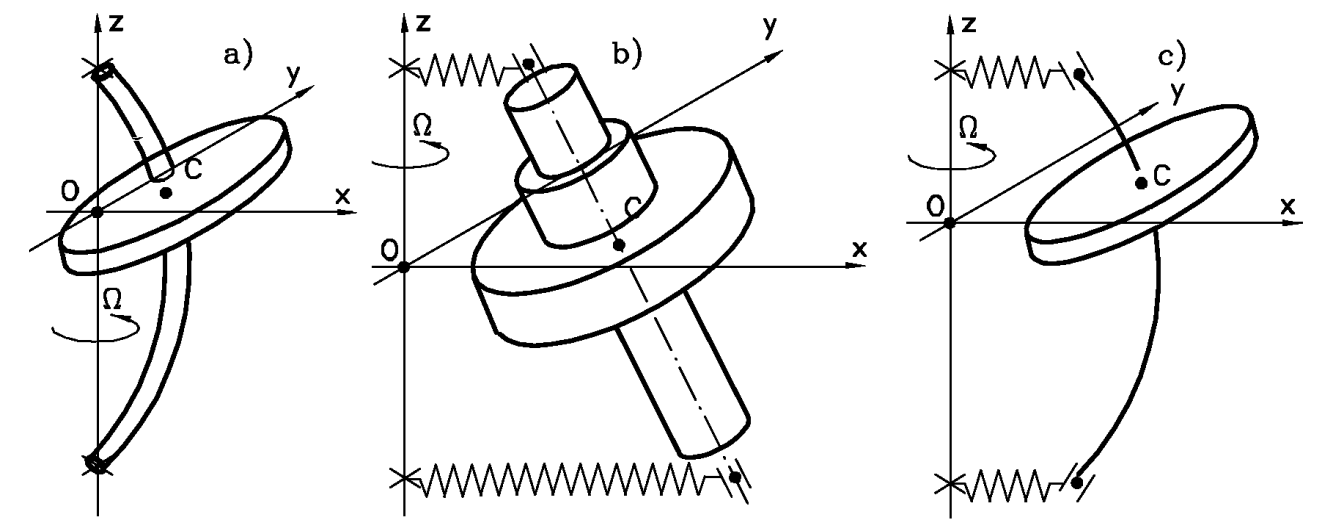
$$\begin{cases} c_{xT} = c_{x1} + c_{x2} & c_{yT} = c_{y1} + c_{y2} \\ c_{xC} = -ac_{x1} + bc_{x2} & c_{yC} = -ac_{y1} + bc_{y2} \\ c_{xR} = a^2c_{x1} + b^2c_{x2} & c_{yR} = a^2c_{y1} + b^2c_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_{xT}\dot{x} + c_{xC}\dot{\phi} + k_{xT}x + k_{xC}\phi = 0 \\ m\ddot{y} + c_{yT}\dot{y} - c_{yC}\dot{\theta} + k_{yT}y - k_{yC}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} - c_{yC}\dot{y} + c_{yR}\dot{\theta} - k_{yC}y + k_{yR}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xC}\dot{x} + c_{xR}\dot{\phi} + k_{xC}x + k_{xR}\phi = 0 \end{cases}$$

..da qui in poi sapete fare..

## Rotori flessibili

Oltre all'analisi della dinamica dei rotori rigidi su supporti flessibili, diventa necessario saper determinare il comportamento dei rotori flessibili (su vincoli rigidi o flessibili) per esempio quando le dimensioni (sviluppo assiale) diventano importanti o quando il numero di volani cresce

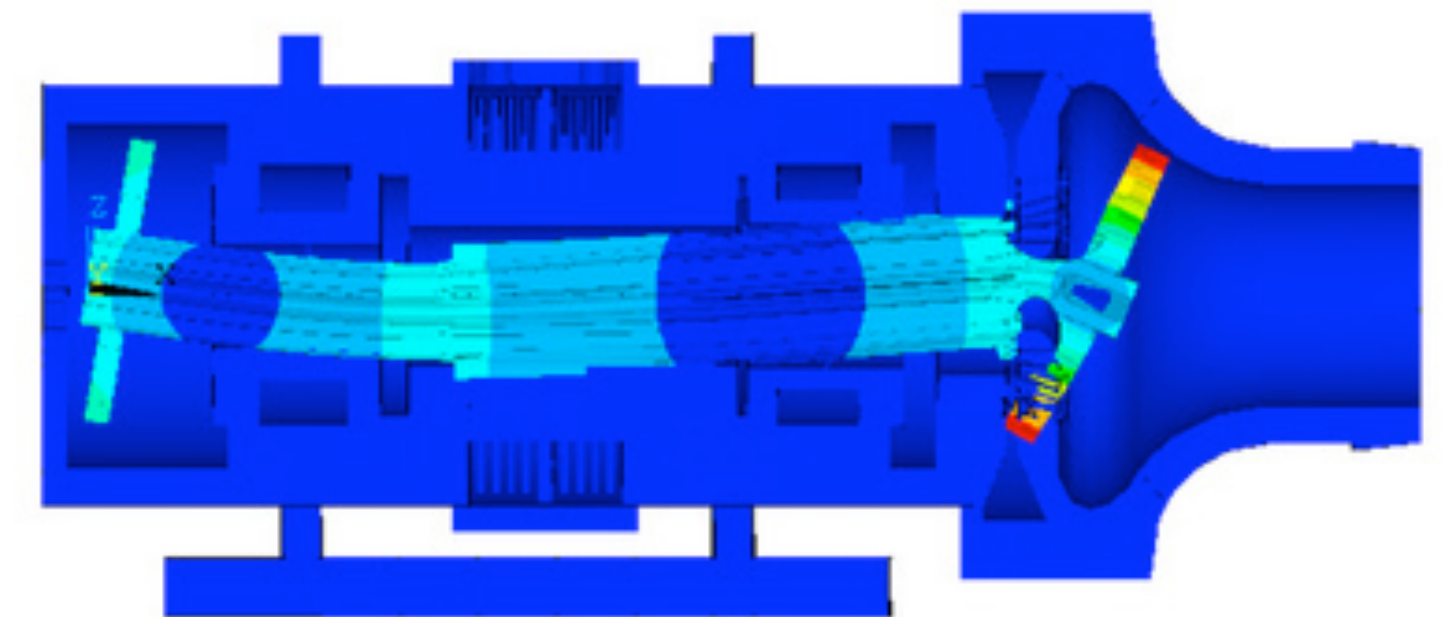




In questi casi risulta difficile analizzare il sistema con equazioni differenziali come visto nel caso dei rotori rigidi!  
Si necessita di soluzioni numeriche applicate a sistemi che sono stati "discretizzati".

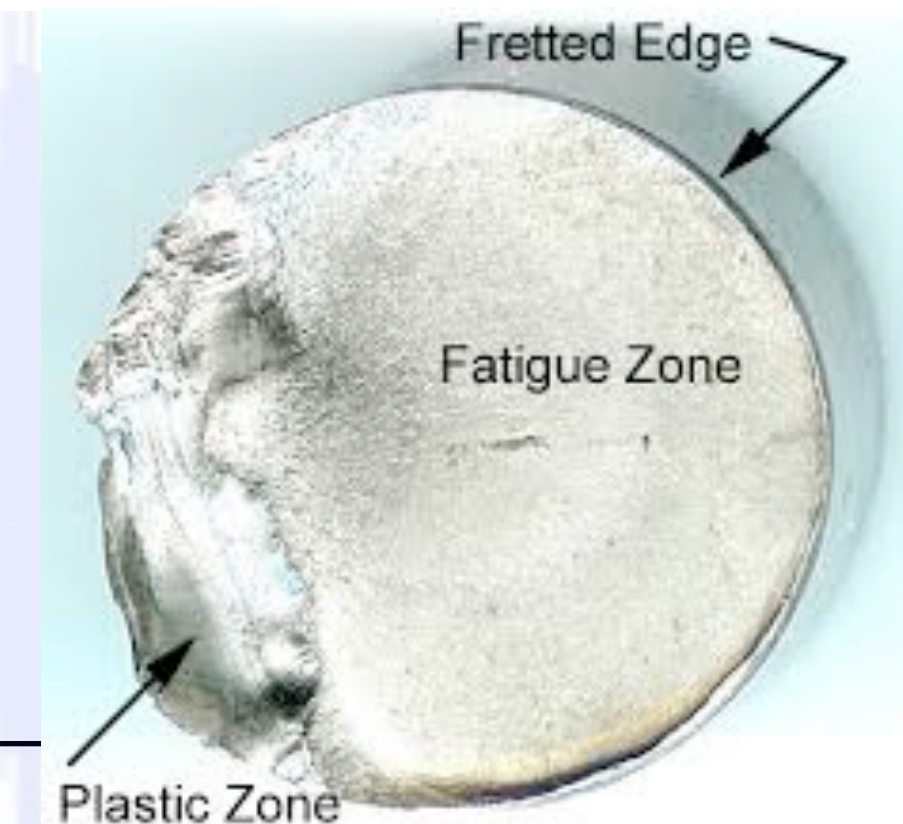
La discretizzazione deve tener conto

- delle caratteristiche del rotore (distribuzione di massa, di rigidità..)
- delle caratteristiche dei vincoli (caratteristiche di rigidità, smorzamento, iso- aniso-tropia..)
- della velocità del rotore
- dei carichi esterni
- ..

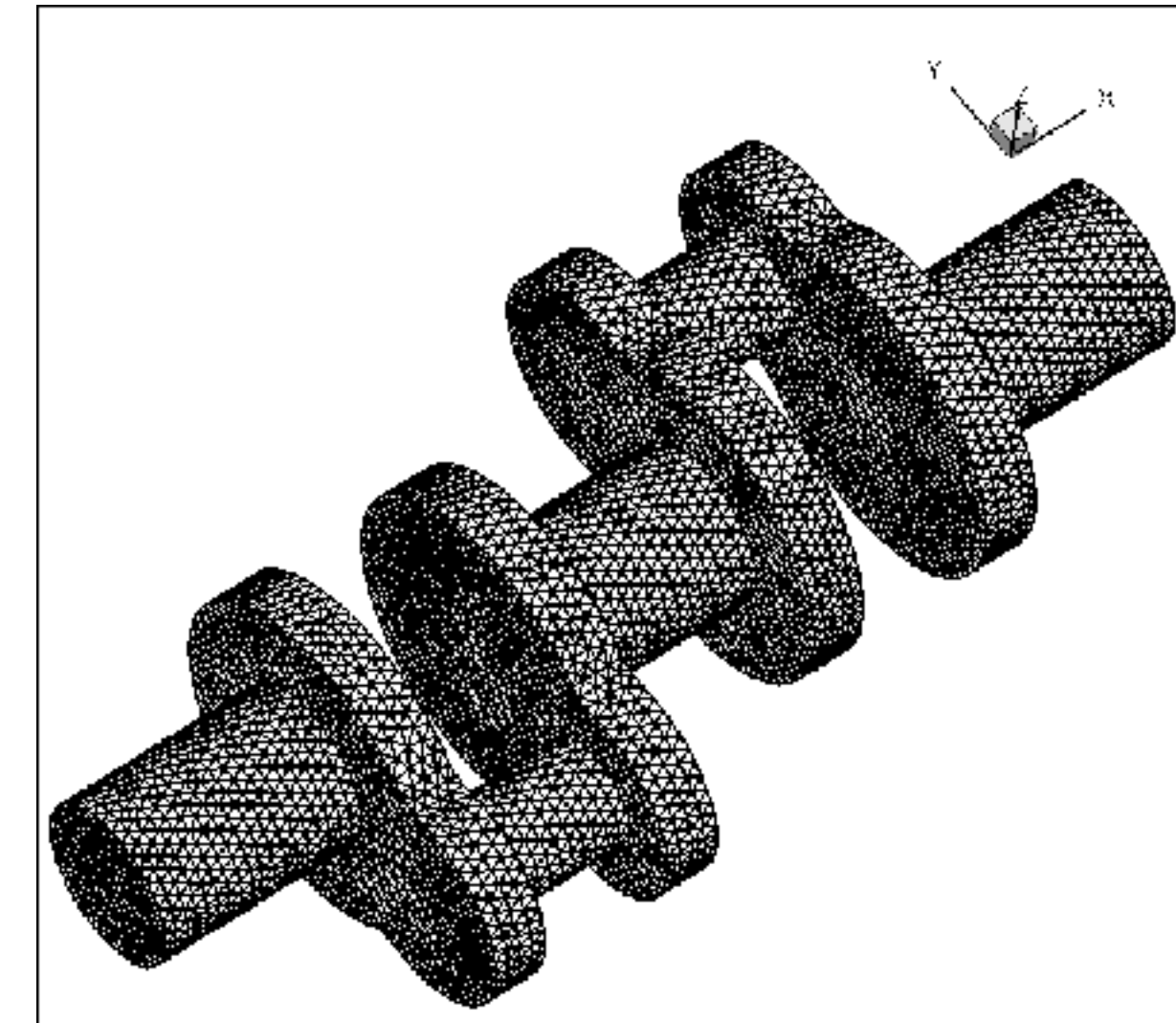
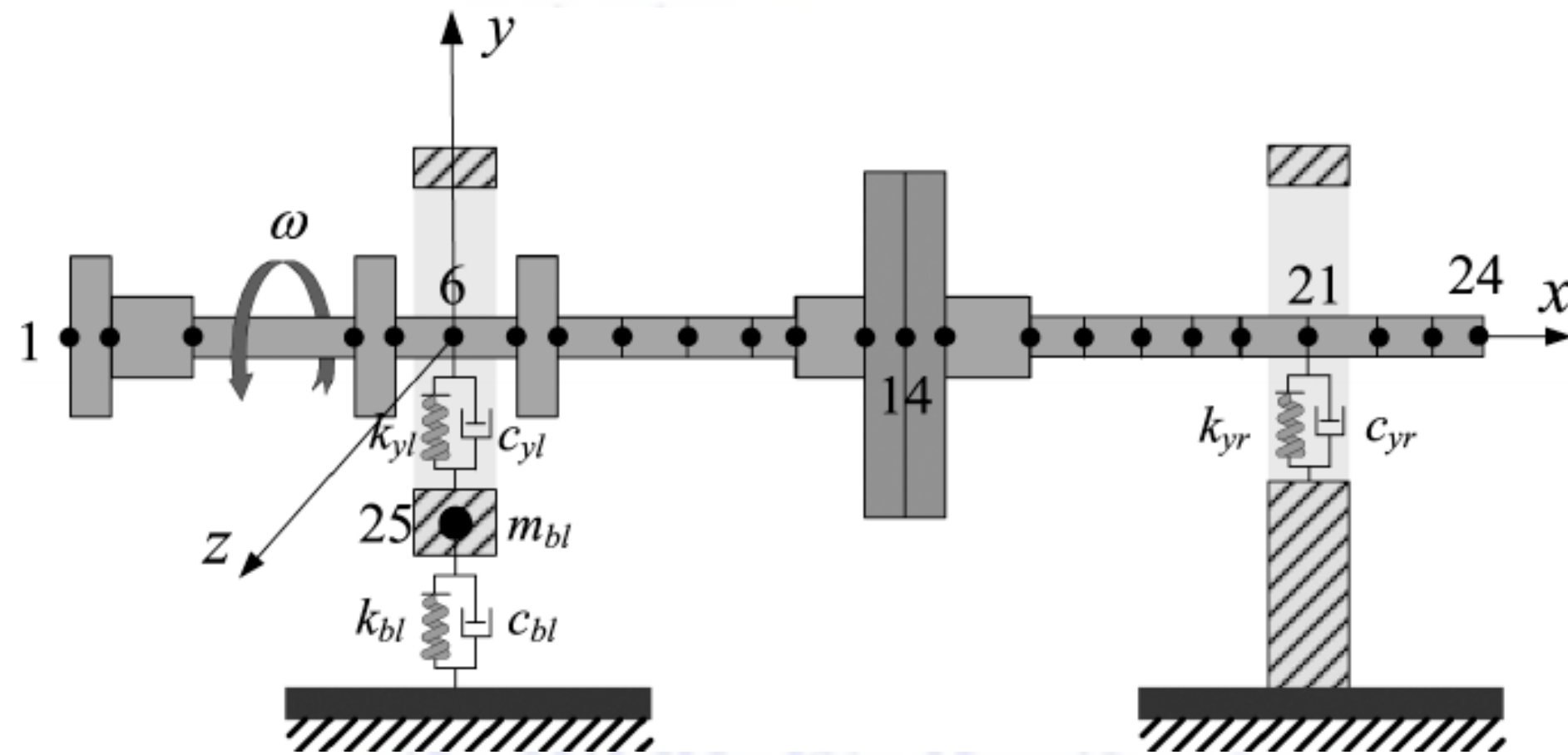


Il design risultante deve far sì che il rotore

- funzioni lontano dalle eccitazioni presenti nel sistema
- non si deformi in maniera tale da generare contatti tra rotore e statore
- abbia sollecitazioni tali da resistere per la vita utile richiesta
- ..



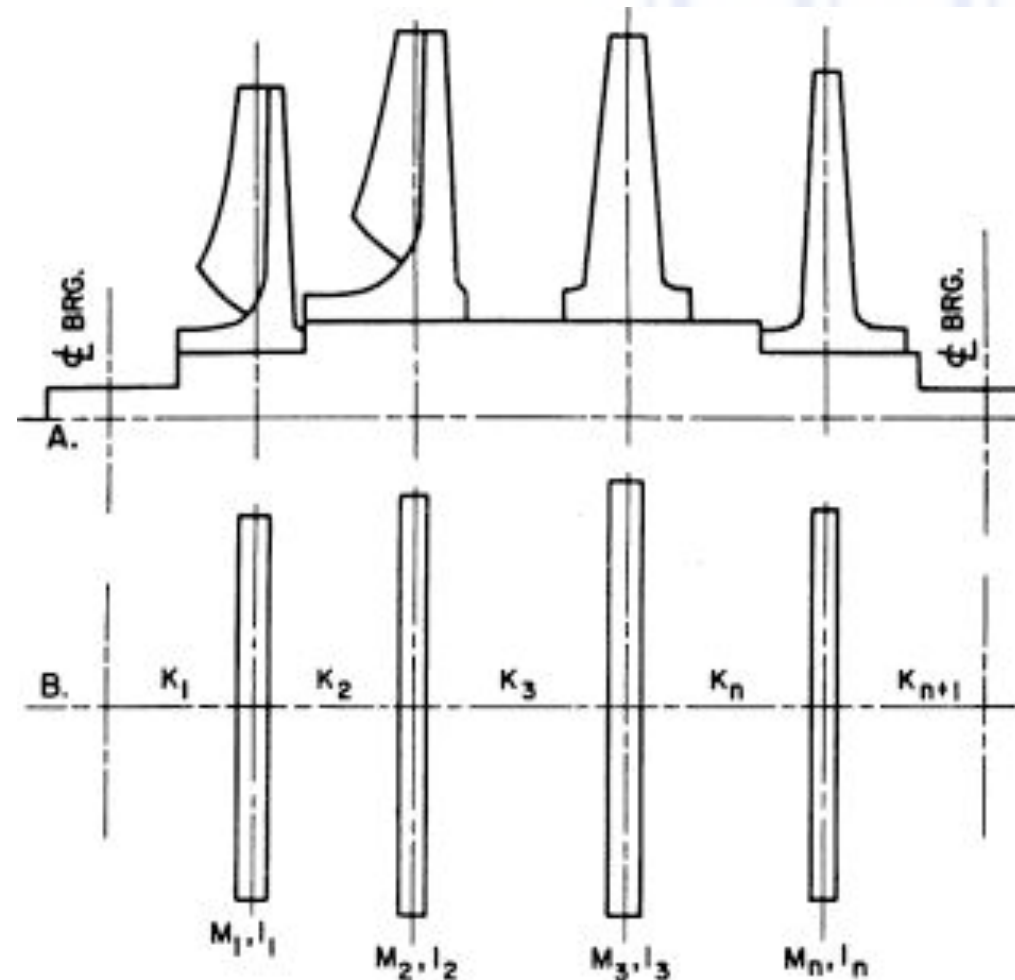
La discretizzazione potrà esser fatta considerando un numero limitato di elementi concentrati (MDOF) o tramite un'analisi FEM in funzione del tipo e precisione dei risultati richiesti



Nel caso MDOF si può ipotizzare che ogni nodo abbia 4 GDL (2 traslazioni, due rotazioni, nei due piani coordinati) se si considera solo la deformata flessione 6 GDL se interessano anche le deformate torsionali e assiali

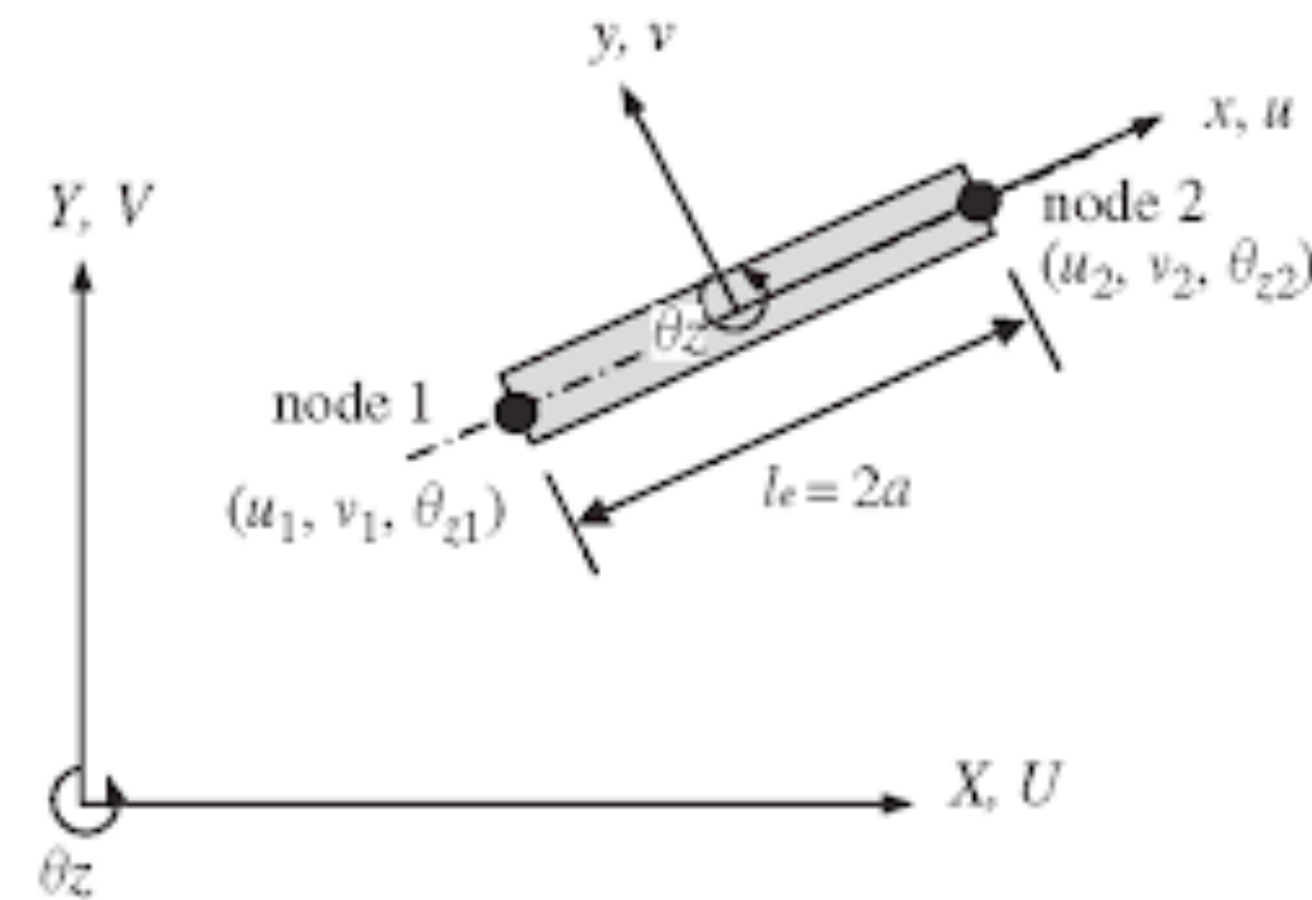
Gli elementi costitutivi del sistema da considerare saranno:

I **volani**, caratterizzati da massa, momenti d'inerzia ( $I_p$  e  $I_d$ ), matrici dei momenti giroscopici



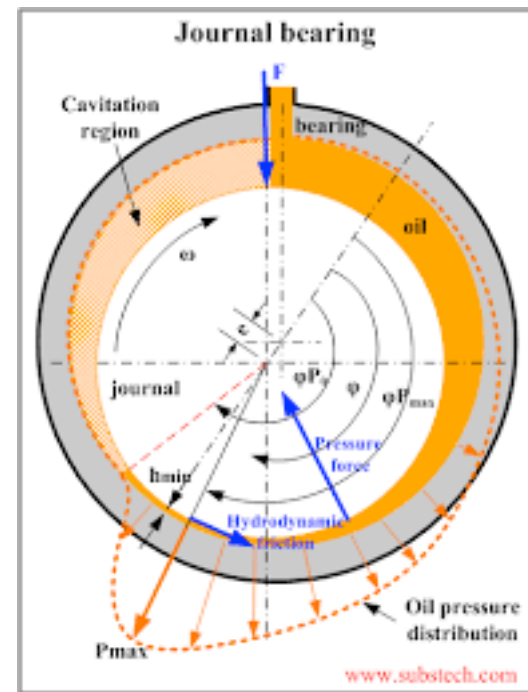
Per geometrie complesse il tensore d'inerzia si calcola tramite codici CAD

le **sezioni di albero**, tra i diversi volani caratterizzati da massa, e rigidezze (flessionali e torsionali)

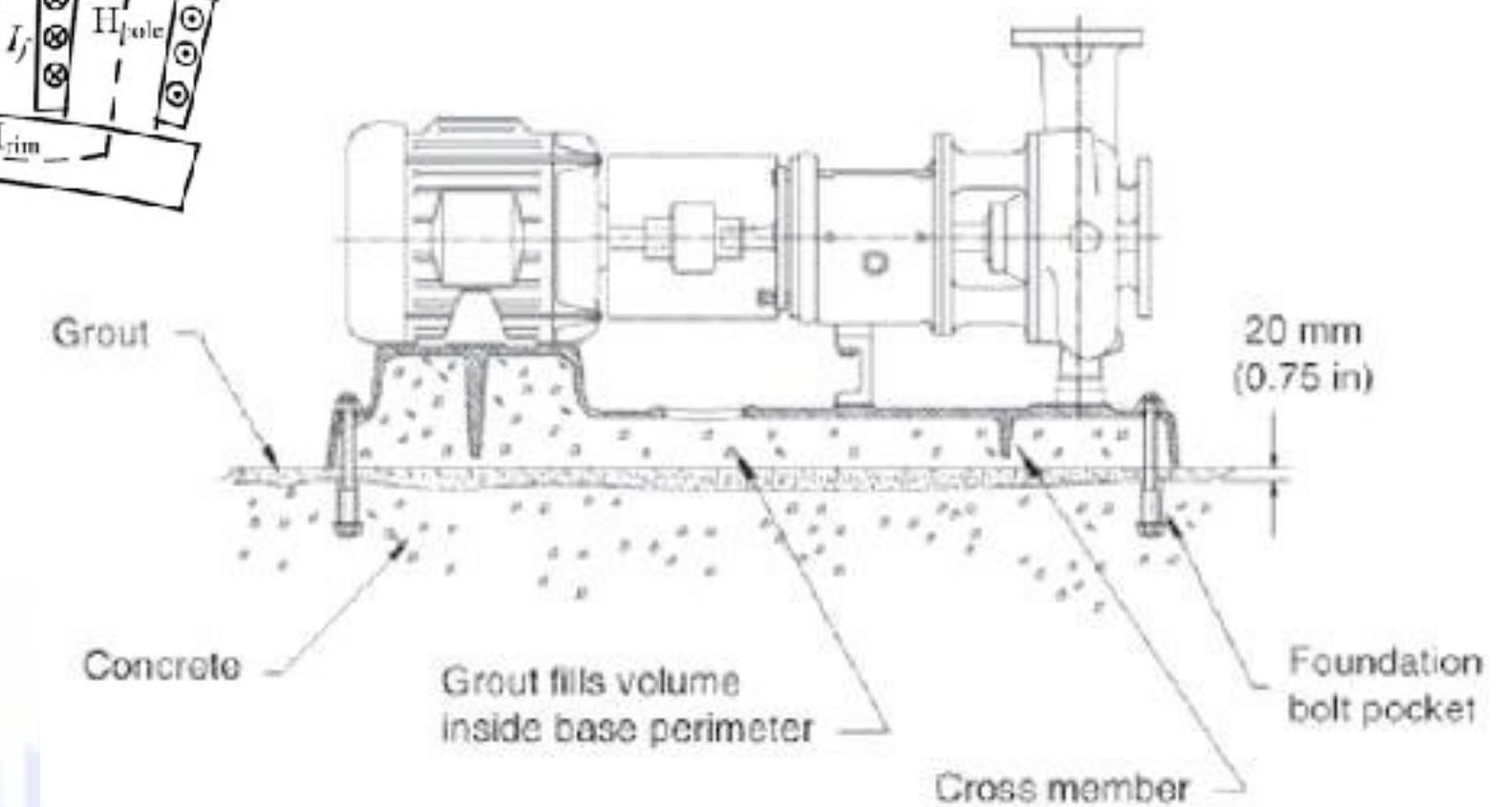
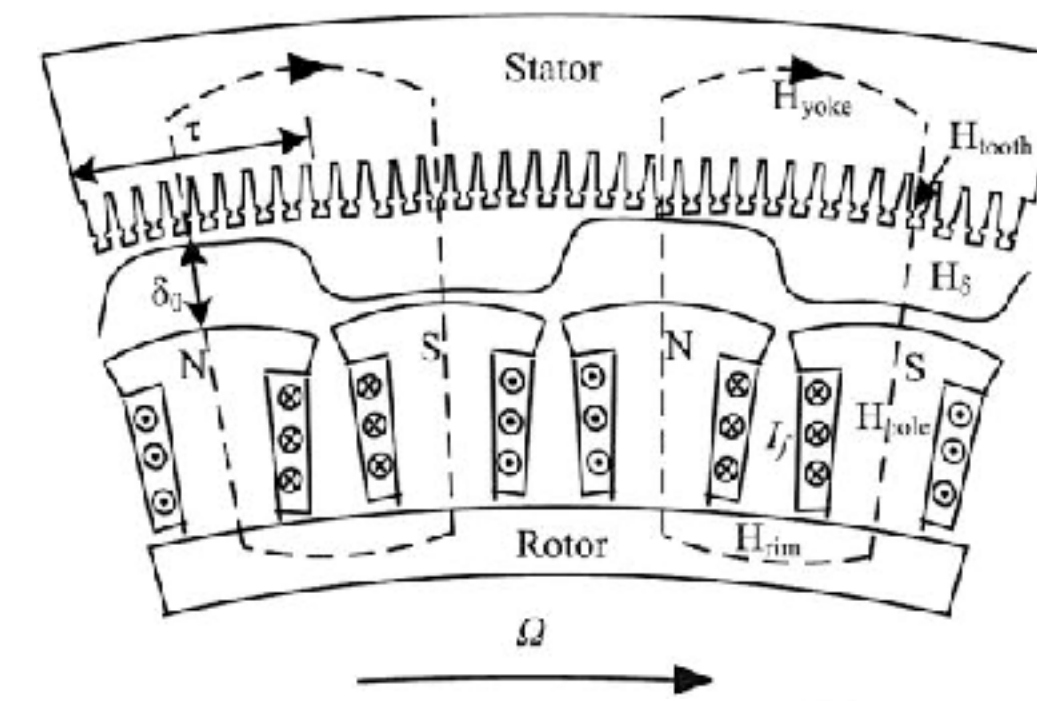


In funzione dell'analisi richiesta si potranno utilizzare diversi modelli di deformazione (Eluero, Bernoulli, Timoshenko..) che includono o meno effetti relativi al taglio alle coppie esterne, alle variazioni di sezione..

i **cuscinetti**, le **tenute**,  
o in generale gli elementi che  
generano interazioni tra rotore e statore



le **forze interne ed esterne**,  
generate durante i funzionamento  
che interagiscono con il rotore  
lo statore e le fondazioni



Solitamente sono elementi non lineari,  
dissipativi che hanno formulazioni specifiche  
per la generazione delle forze

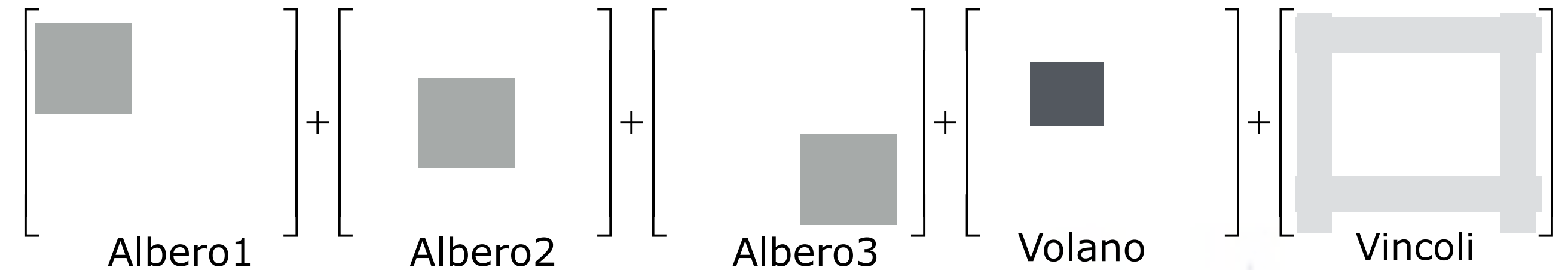
es. le forze generate da cuscinetti idrodinamici  
dipendono da tipo, portata, temperatura del fluido;  
dalla forma delle sedi, dalla velocità del rotore..

es. tiro magnetico, instabilità di flusso,  
reazioni dei vincoli...

Ciascuno di questi elementi sarà caratterizzato da opportune matrici da inserire ed assemblare nell'equazione del moto del sistema completo:

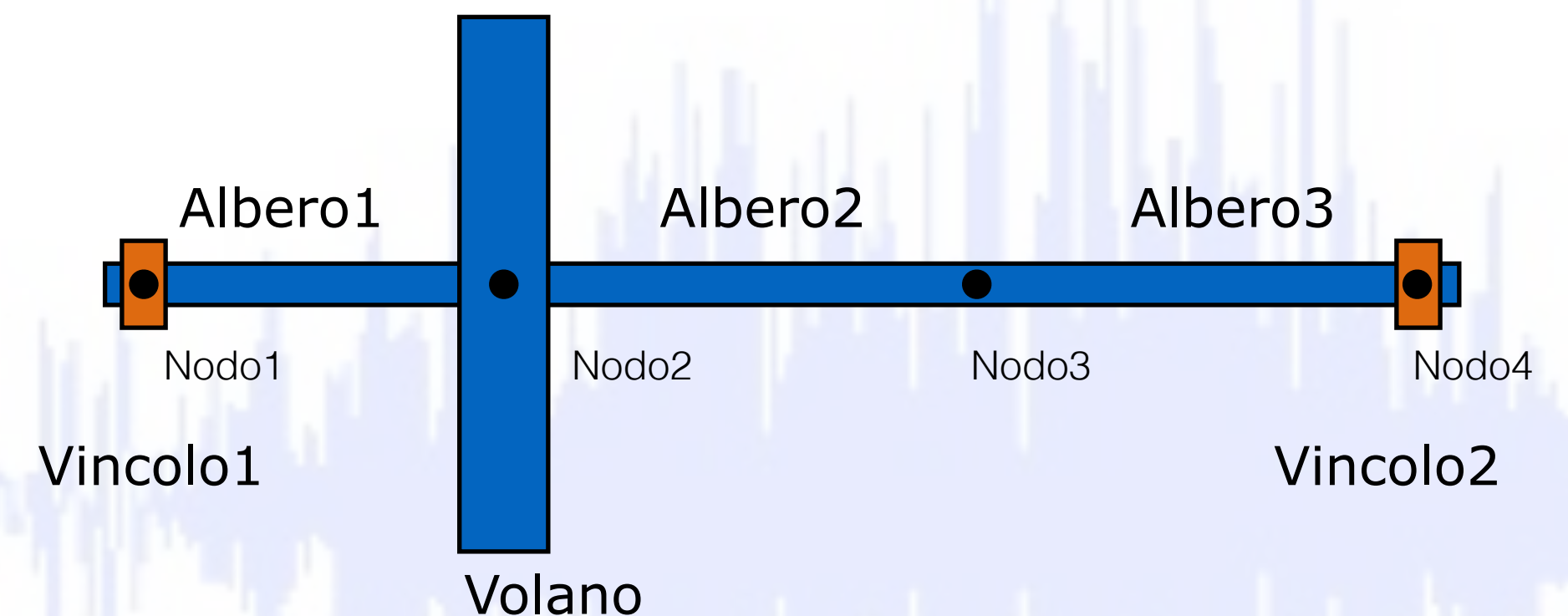
$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + \Omega [\mathbf{G}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

(ricordarsi dell'eventuale dipendenza da  $\Omega$  !)



Con tutte le matrici assemblate..  
la soluzione al problema degli autovalori/autovettori assume la solita forma..

$$\begin{bmatrix} \Omega \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

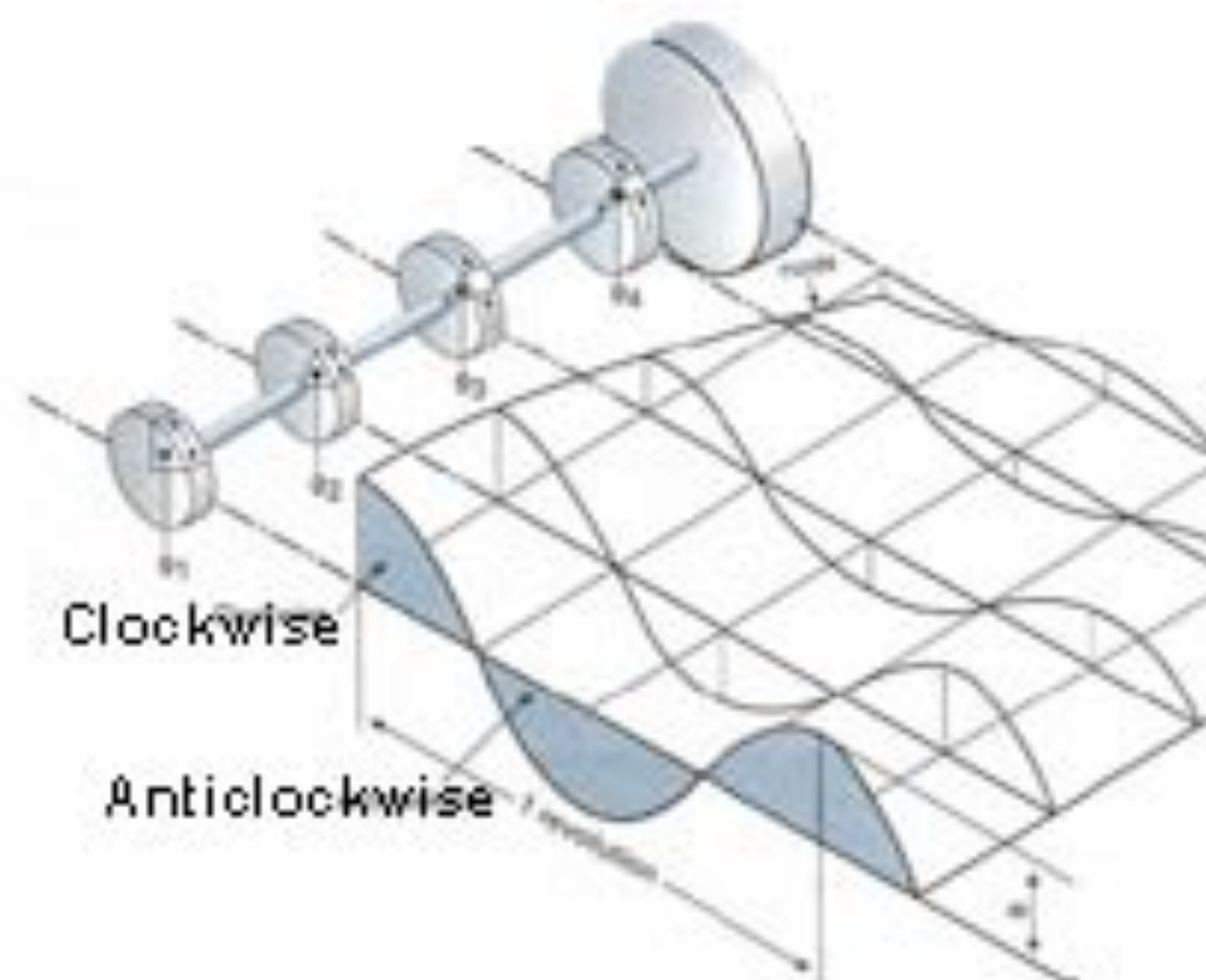
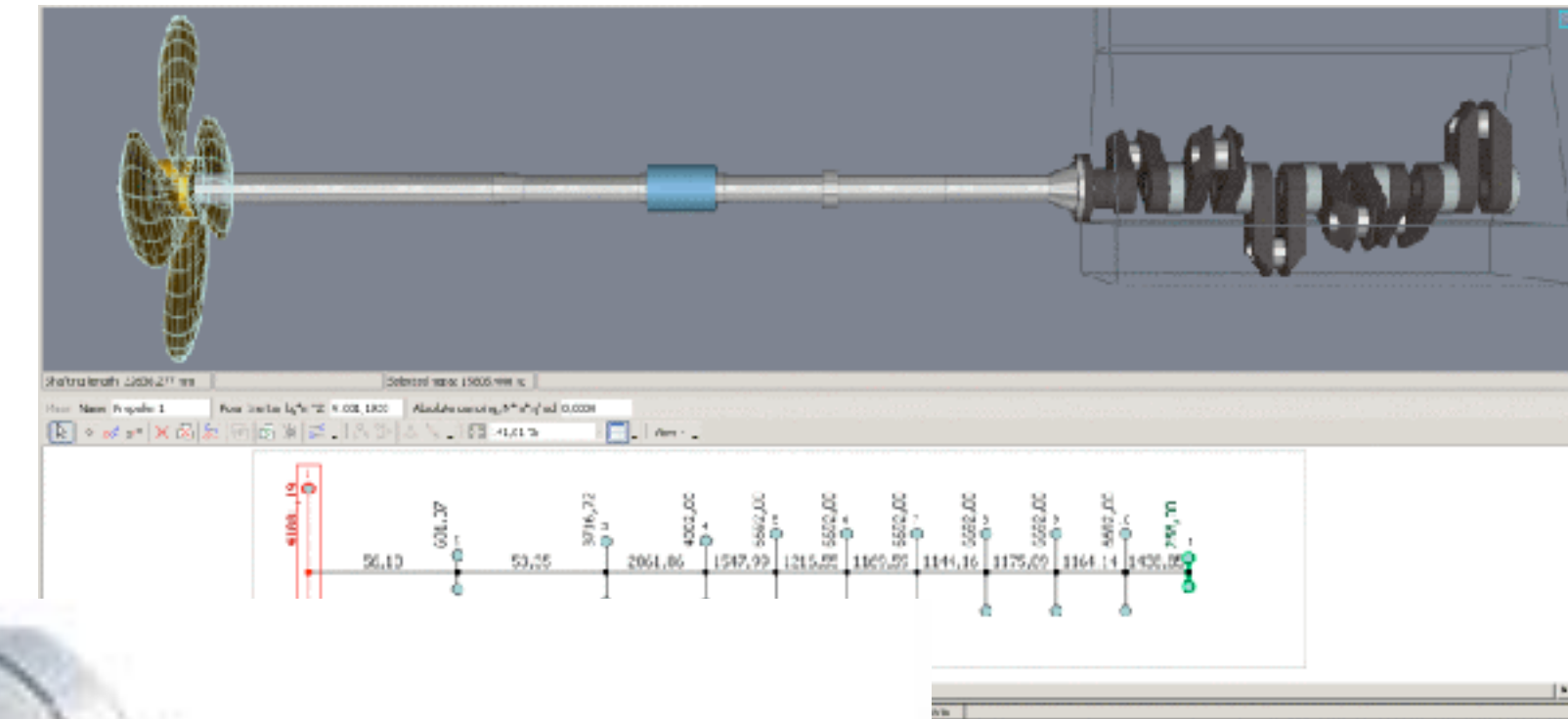
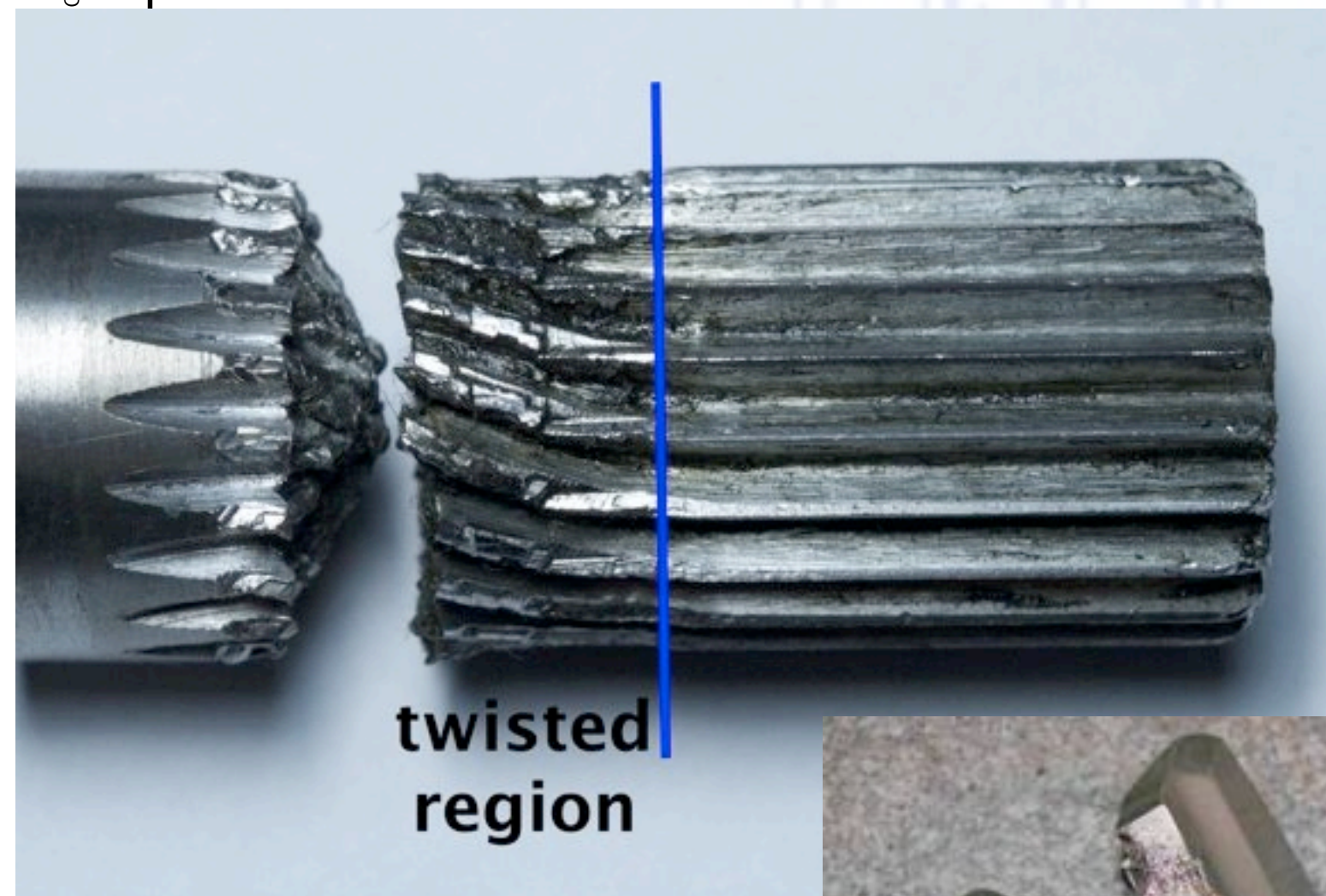


# Vibrazione torsionali

Nei rotori flessibili, oltre alle vibrazioni flessionali (l'asse dell'albero di deforma nei piani XZ e YZ) esiste la possibilità che l'asse del rotore resti rettilineo mentre i "volani" ruotano reciprocamente tra loro.. In questo caso si parla di vibrazioni torsionali ..l'albero si torce!

Sono importanti, perchè a queste vibrazioni vengono spesso imputate le rotture per fatica degli alberi.

canica delle Vibrazioni @Units



E' vietato ogni utilizzi  
E espressamente vi

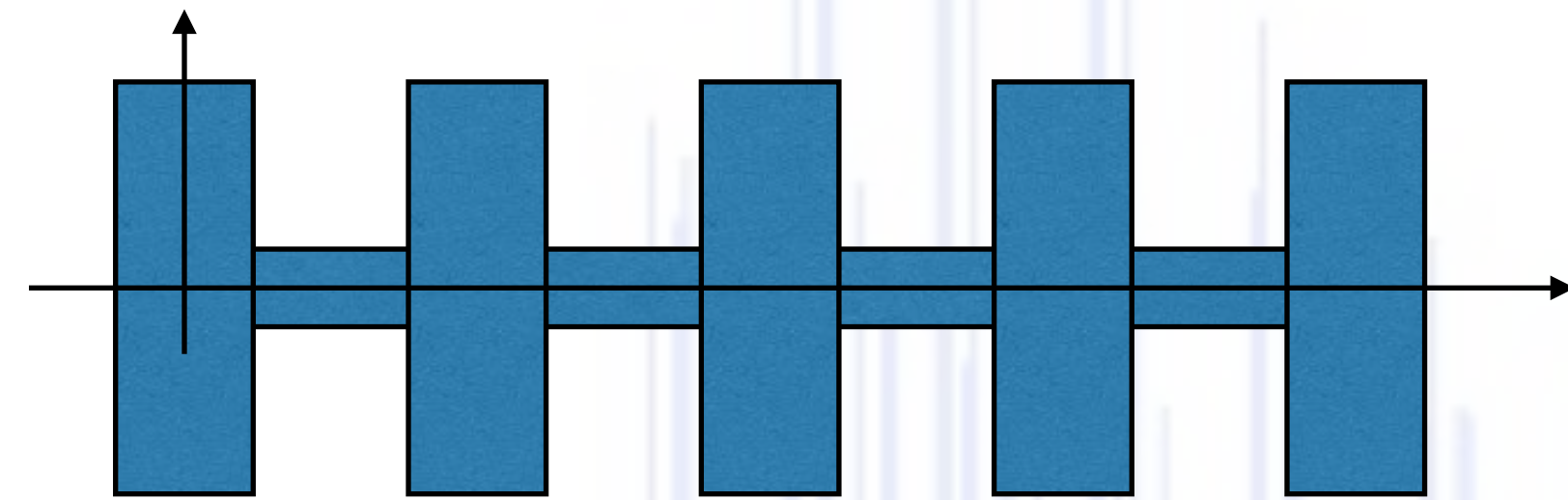


Per le vibrazioni torsionali, si scriveranno le equazioni del moto analogamente a quanto fatto per le vibrazioni lineari utilizzando l'equazione giusta!

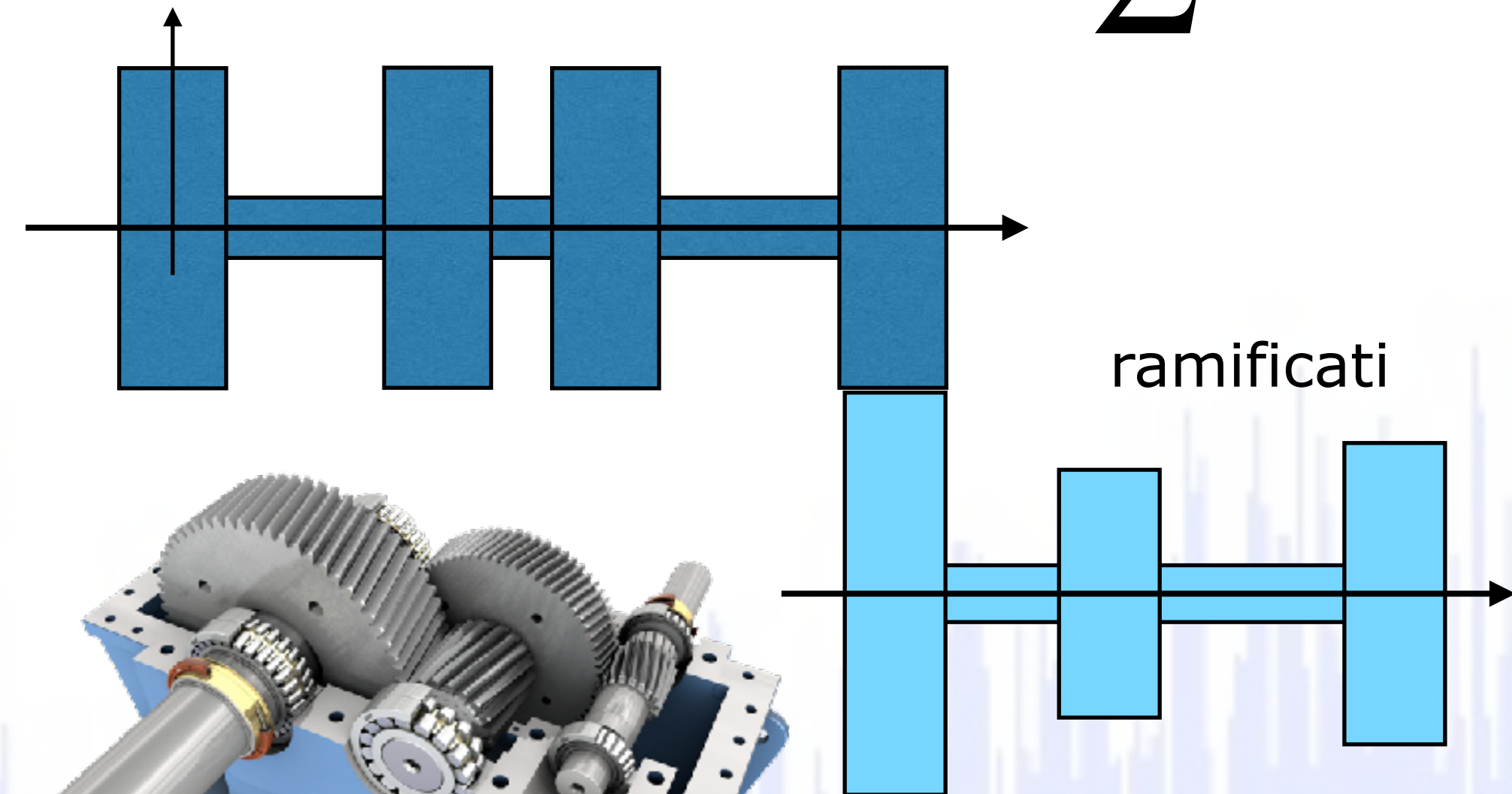
..ponendo l'attenzione nel distinguere tra sistema in linea o ramificati  
Nel secondo caso bisognerà prendere delle precauzioni per tener conto del legame cinematico tra le parti.

$$\sum \vec{F} - m\vec{\ddot{x}} = 0$$

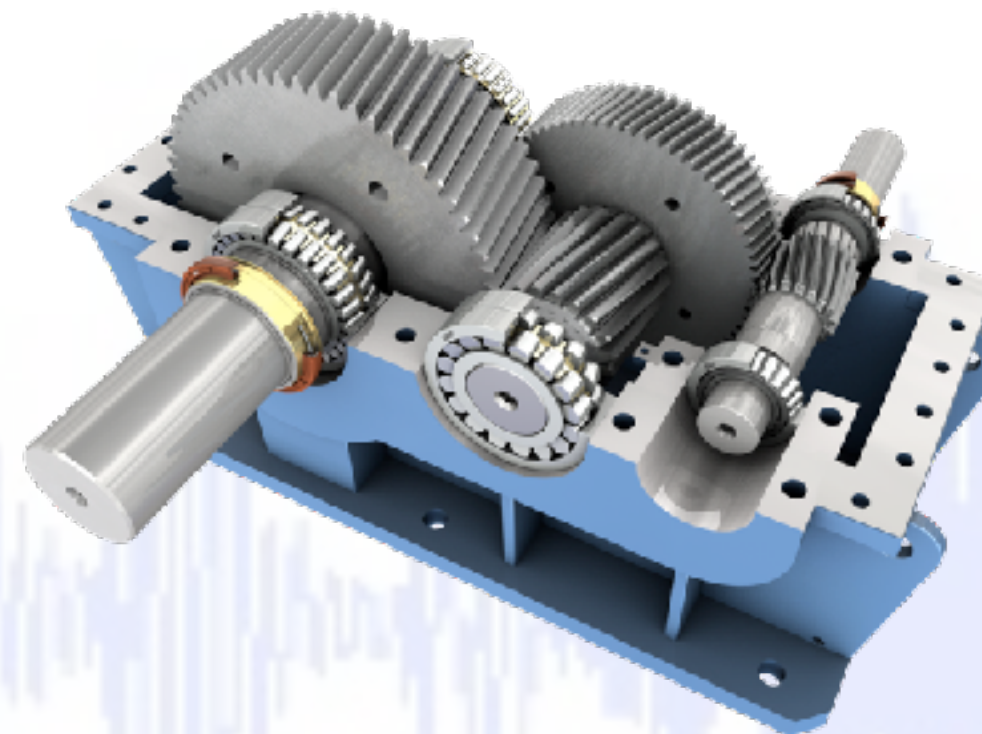
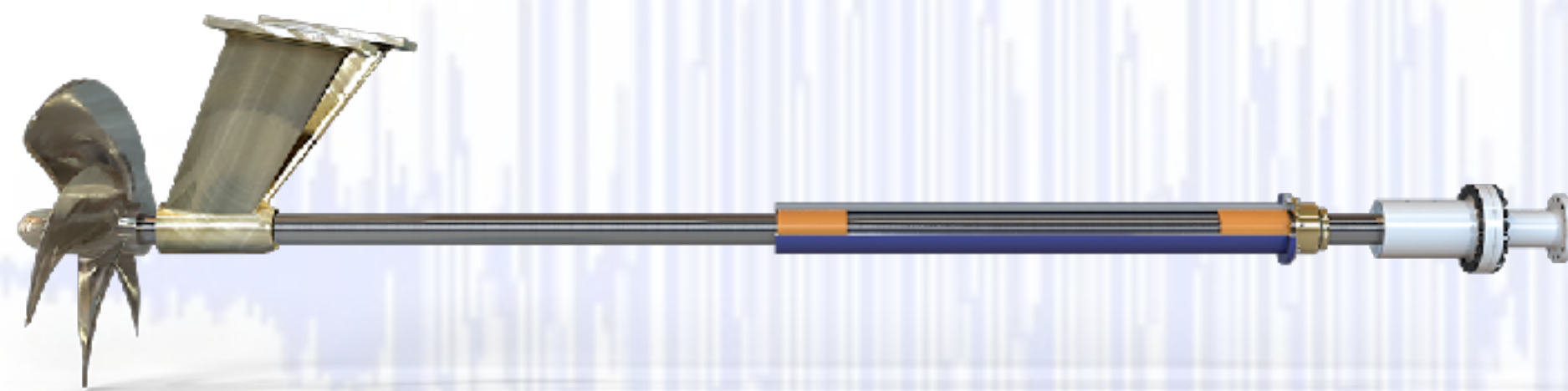
$$\sum \vec{M} - m\vec{\ddot{\theta}} = 0$$

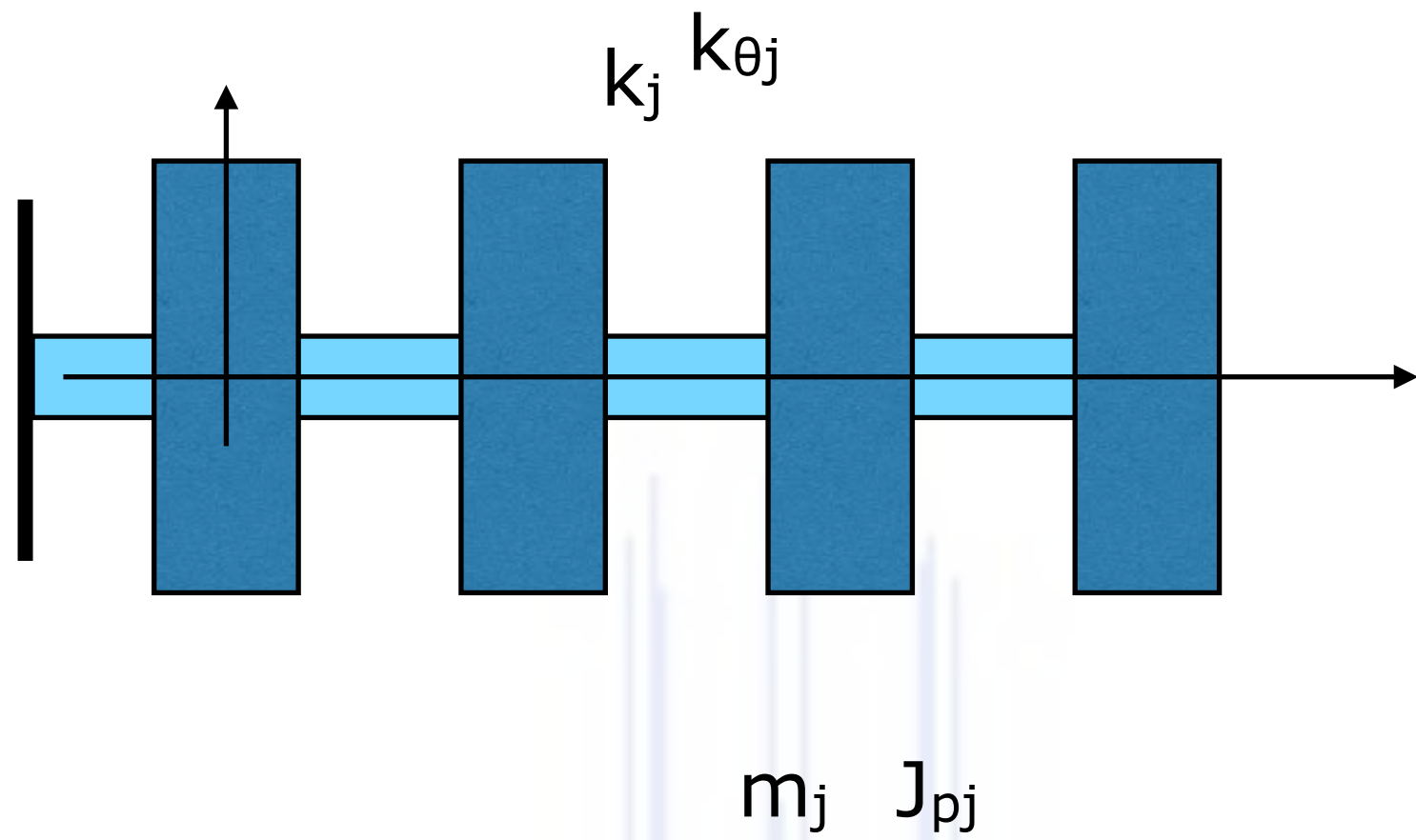


in linea



ramificati





Si consideri un rotore caratterizzato da un certo numero di volani ( $m_j J_{pj}$ ) e da sezioni di albero ( $k_j, k_{\theta j}$ )

nel caso lineare

Le equazioni del moto saranno

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

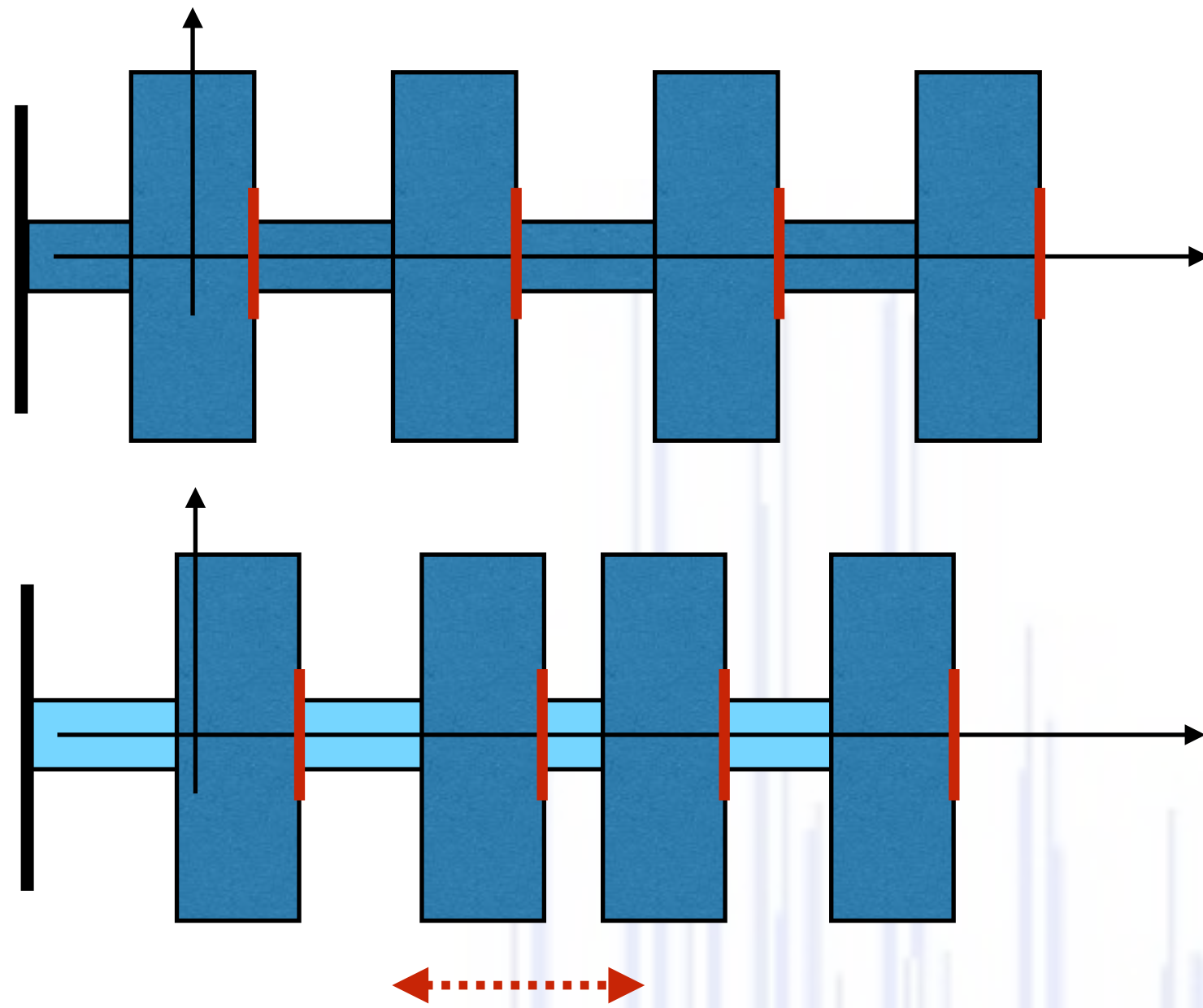
nel caso torsionale

$$\begin{bmatrix} J_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\theta 0} + k_{\theta 1} & -k_{\theta 1} & 0 & 0 \\ -k_{\theta 1} & k_{\theta 1} + k_{\theta 2} & k_{\theta 2} & 0 \\ 0 & -k_{\theta 2} & k_{\theta 2} + k_{\theta 3} & -k_{\theta 3} \\ 0 & 0 & -k_{\theta 3} & k_{\theta 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

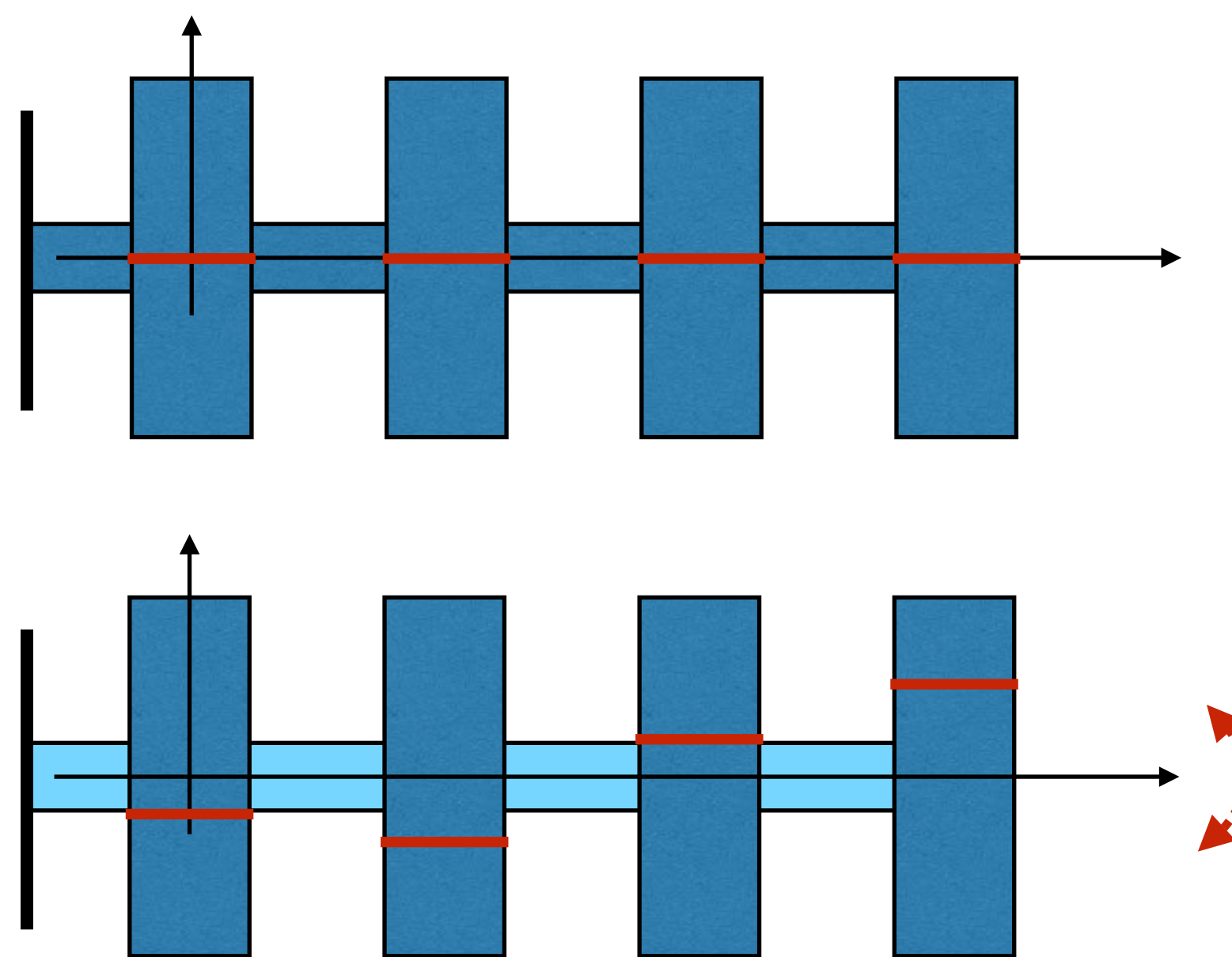
..hanno esattamente la stessa struttura!



nel caso lineare



nel caso torsionale



Quali saranno i primi modi dei due sistemi?

Quanti modi ci sono?

Quali modi sono rappresentati?

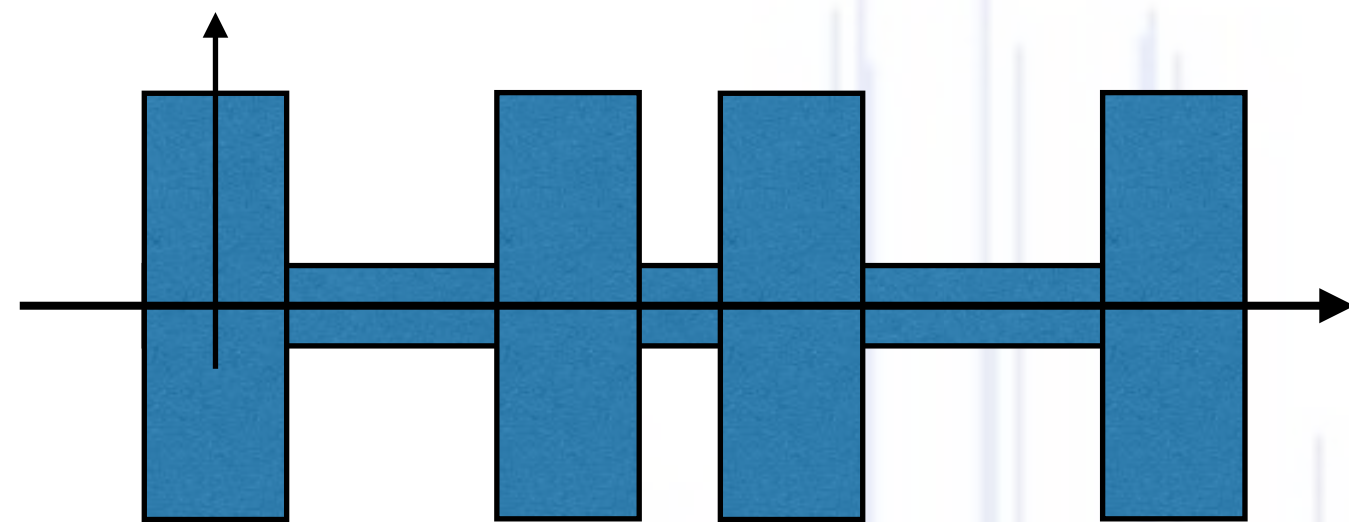
..N volani..2N autovalori..N autovettori  
distinti

..se il rotore non è vincolato al mondo esterno..  
modo di corpo rigido!

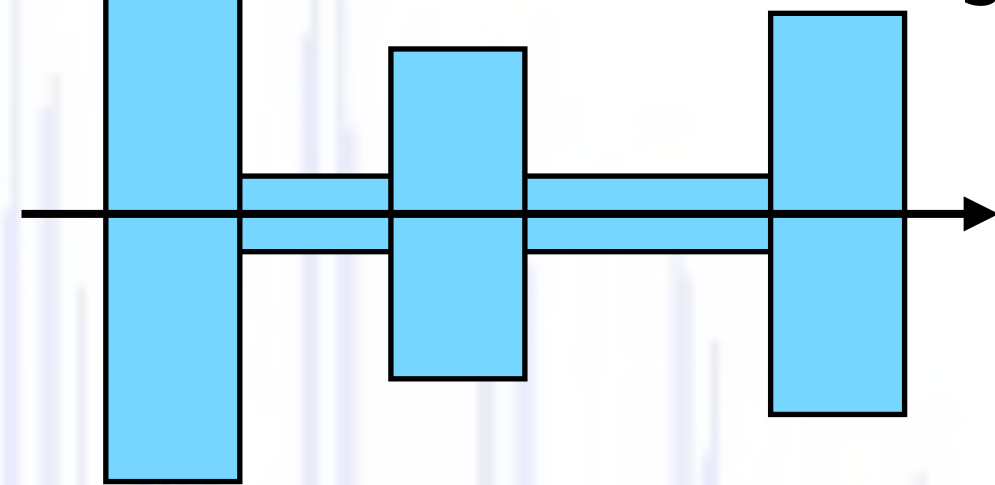
..se N è il modo che si considera,  
ci sono (N-1) nodi nella deformata!

Lo studio dei sistemi ramificati (riduttori, convertitori di coppia, derivazioni per utenze) è un po' più complesso.

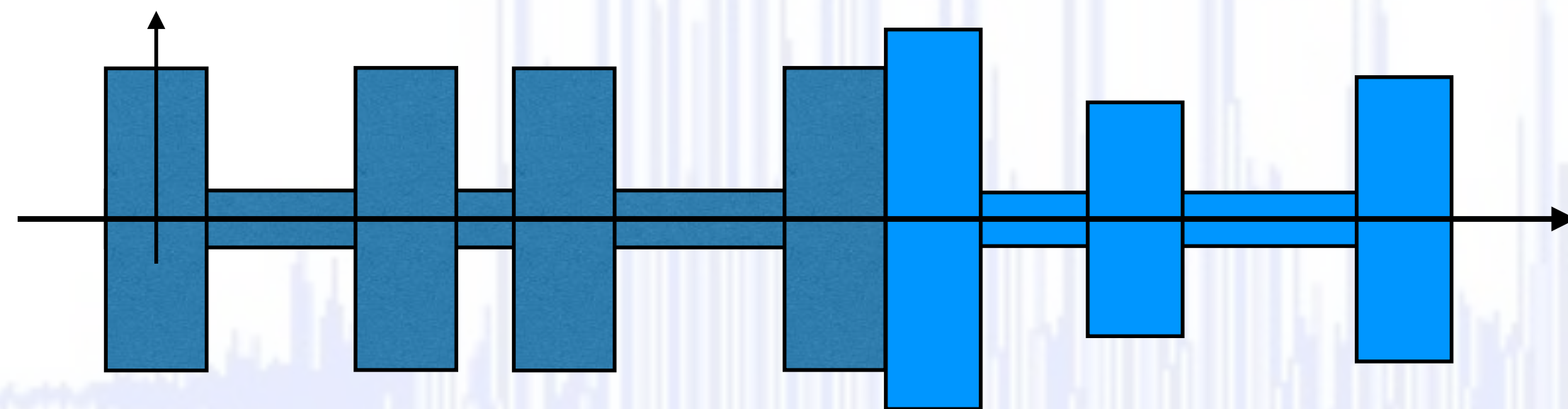
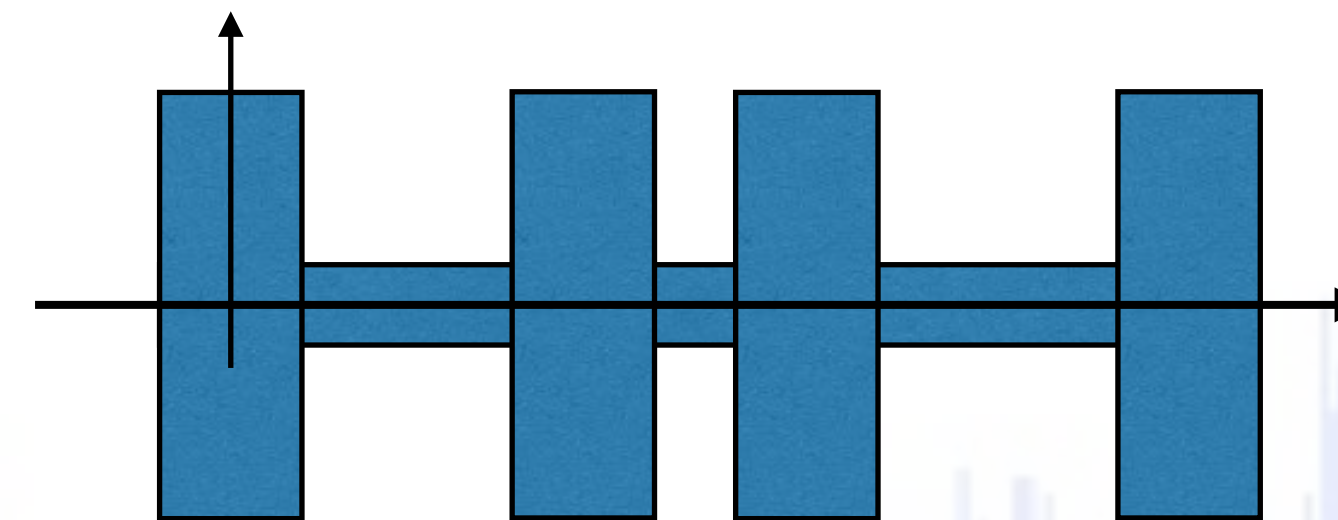
E' possibile ipotizzare due scenari diversi:



accoppiamento di tipo rigido, di forma, tra gli alberi per il quale bisognerà tener conto del rapporto di trasmissione si costruisce un sistema in linea equivalente

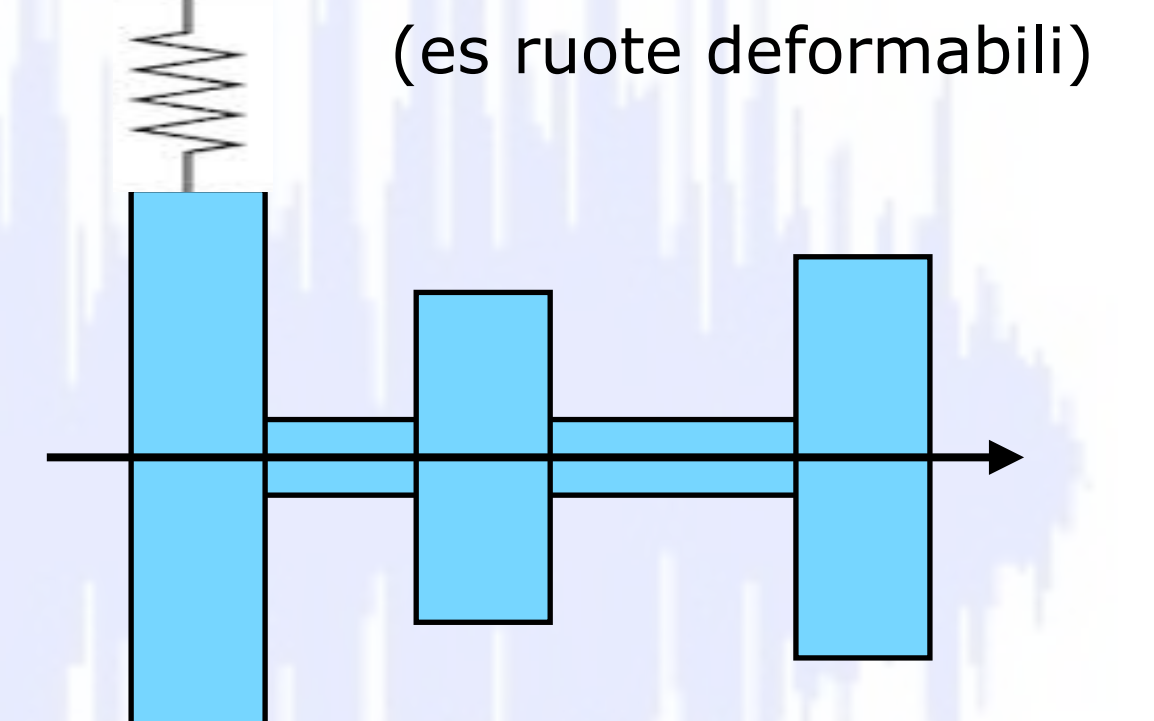


accoppiamento di tipo flessibile in cui si procede similmente a quanto già visto



(es ruote dentate infinitamente rigide)

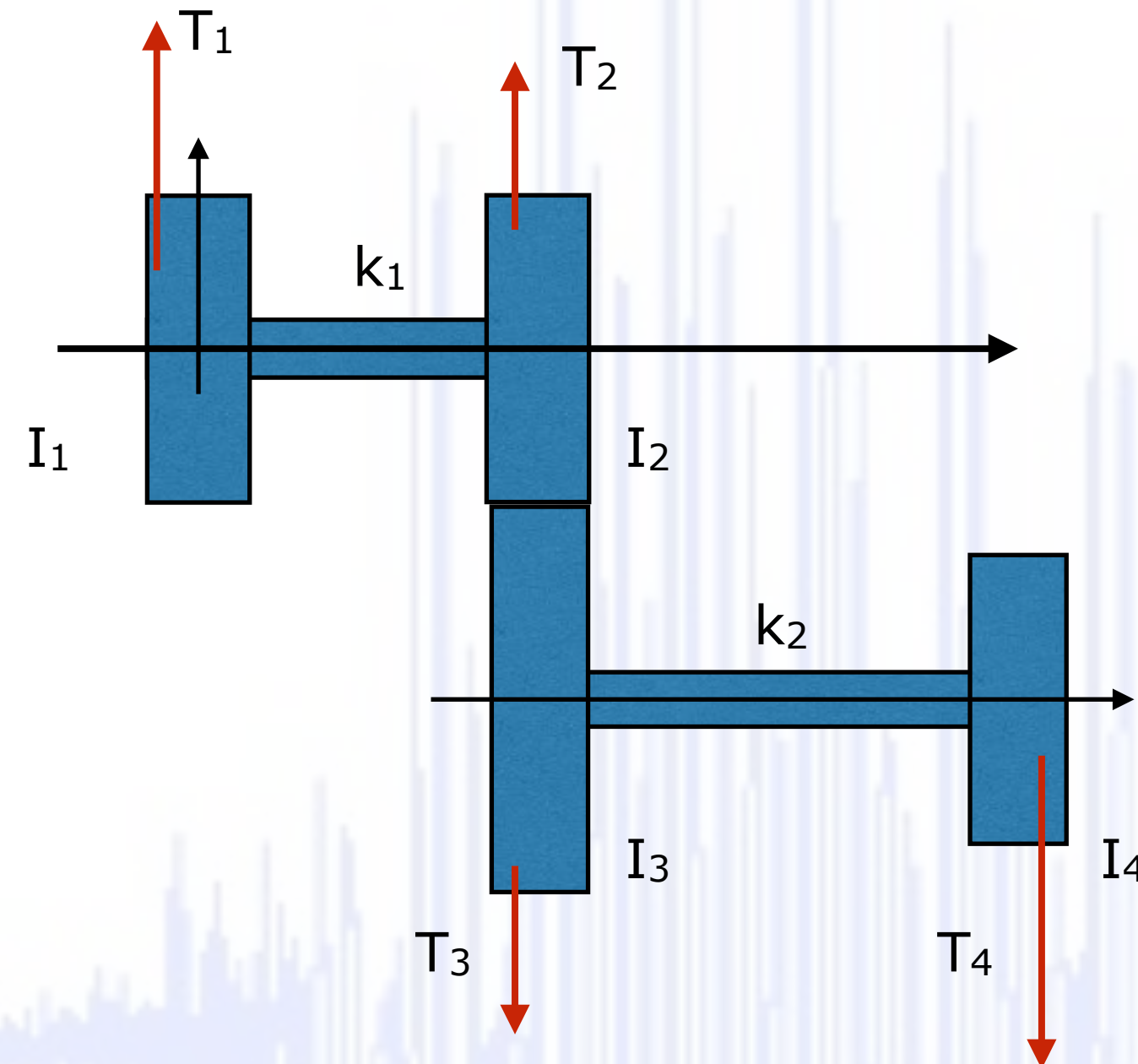
$$\gamma = \frac{N_{input}}{N_{output}}$$



(es ruote deformabili)

Nel caso della costruzione di un sistema in linea equivalente,  
bisogna scegliere rispetto a quale albero riferirsi  
e ricordare che la velocità periferica delle due ruote ingranate sarà uguale

=> sistema dinamicamente equivalente!



Si analizzi un sistema costituito da due alberi,  
ciascuno con due volani ( $I_1, I_2$ , e  $I_3$  e  $I_4$ )  
Siano  $N_i$  e  $R_i$  il numero dei denti ed raggio delle ruote dentate

Il rapporto di trasmissione sia  $\gamma = \frac{N_2}{N_3} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$

Gli alberi non sono indipendenti, le loro rotazioni sono legate  
dalla relazione:

$$\theta_3 = -\gamma\theta_2 \quad \dot{\theta}_3 = -\gamma\dot{\theta}_2$$

Si possono scrivere le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{2,3} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{3,2} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{cases}$$

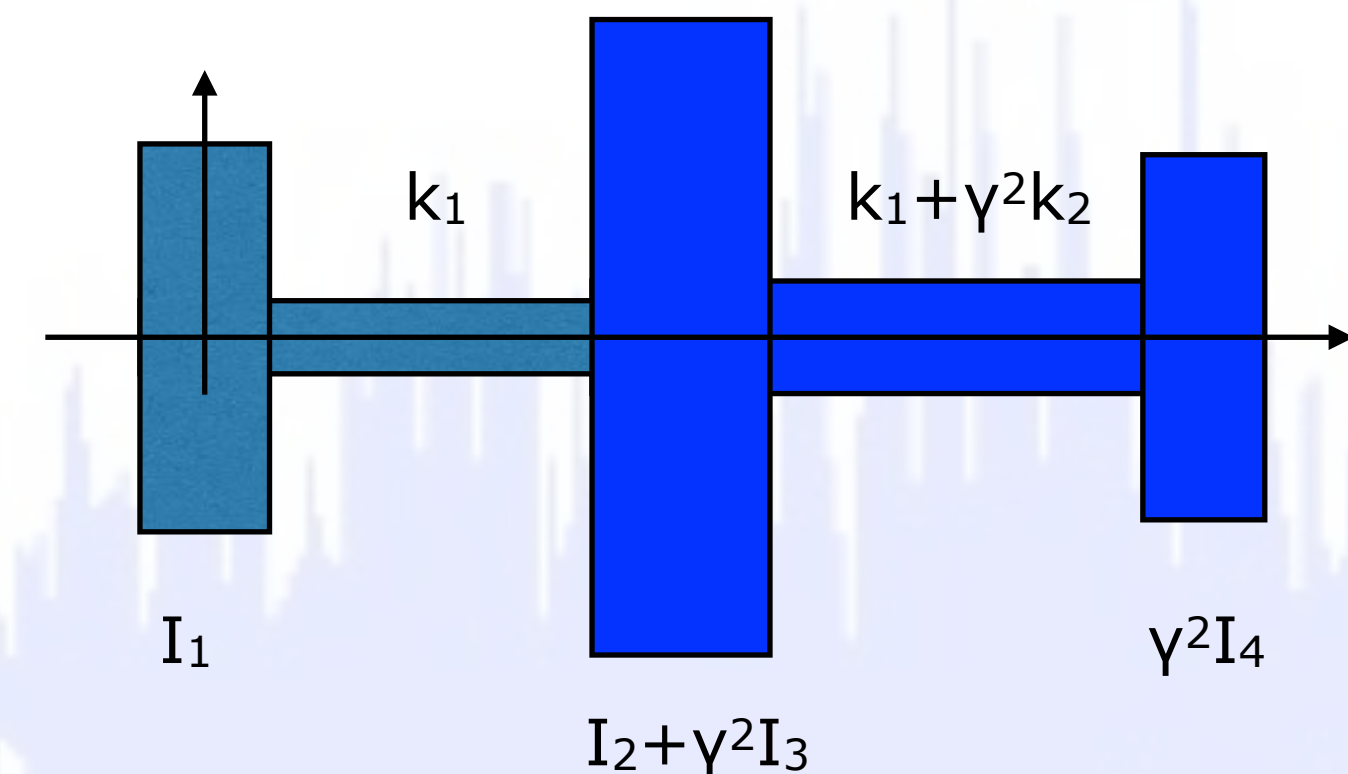
ricordando che  $\theta_3 = -\gamma\theta_2$

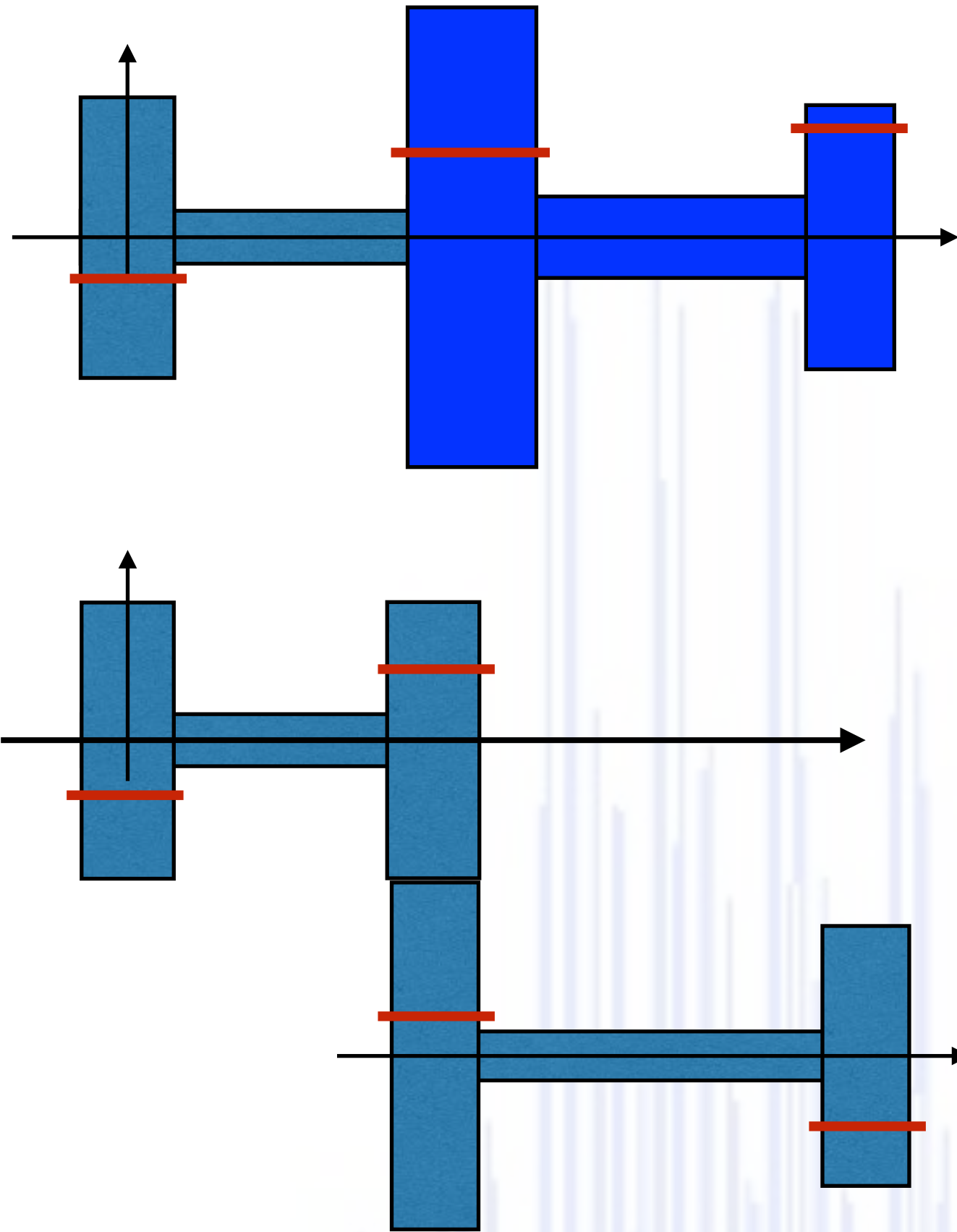
e che l'energia cinetica e potenziale elastica del sistema equivalente deve essere uguale alla somma delle energie potenziale ed elastiche dei due sistemi di partenza

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + \gamma^2 k_2(\theta_2 - \theta'_3) = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}'_3 + \gamma k_2(\theta'_3 - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{cases}$$

con  $\theta_4 = -\gamma\theta'_3$

La risoluzione di questo sistema di equazioni (3GDL),  
fornirà 6 frequenze naturali e altrettanti modi tra loro complessi coniugati

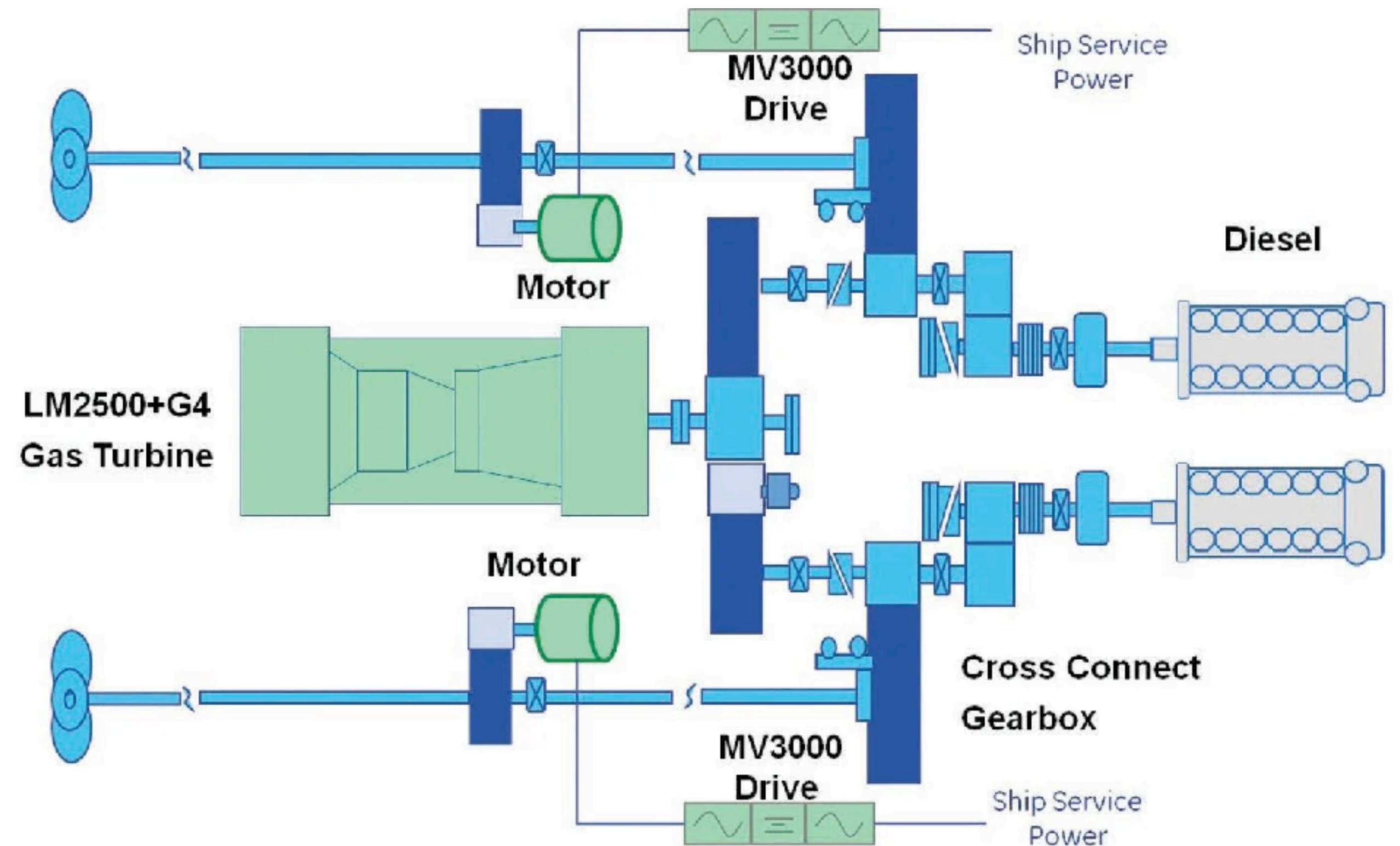




Quando si voglio rappresentare le deformate modali sul sistema ramificato di partenza, bisogna ricordare la relazione tra gli angoli espressa dal rapporto di riduzione

$$\theta_3 = -\gamma\theta_2$$

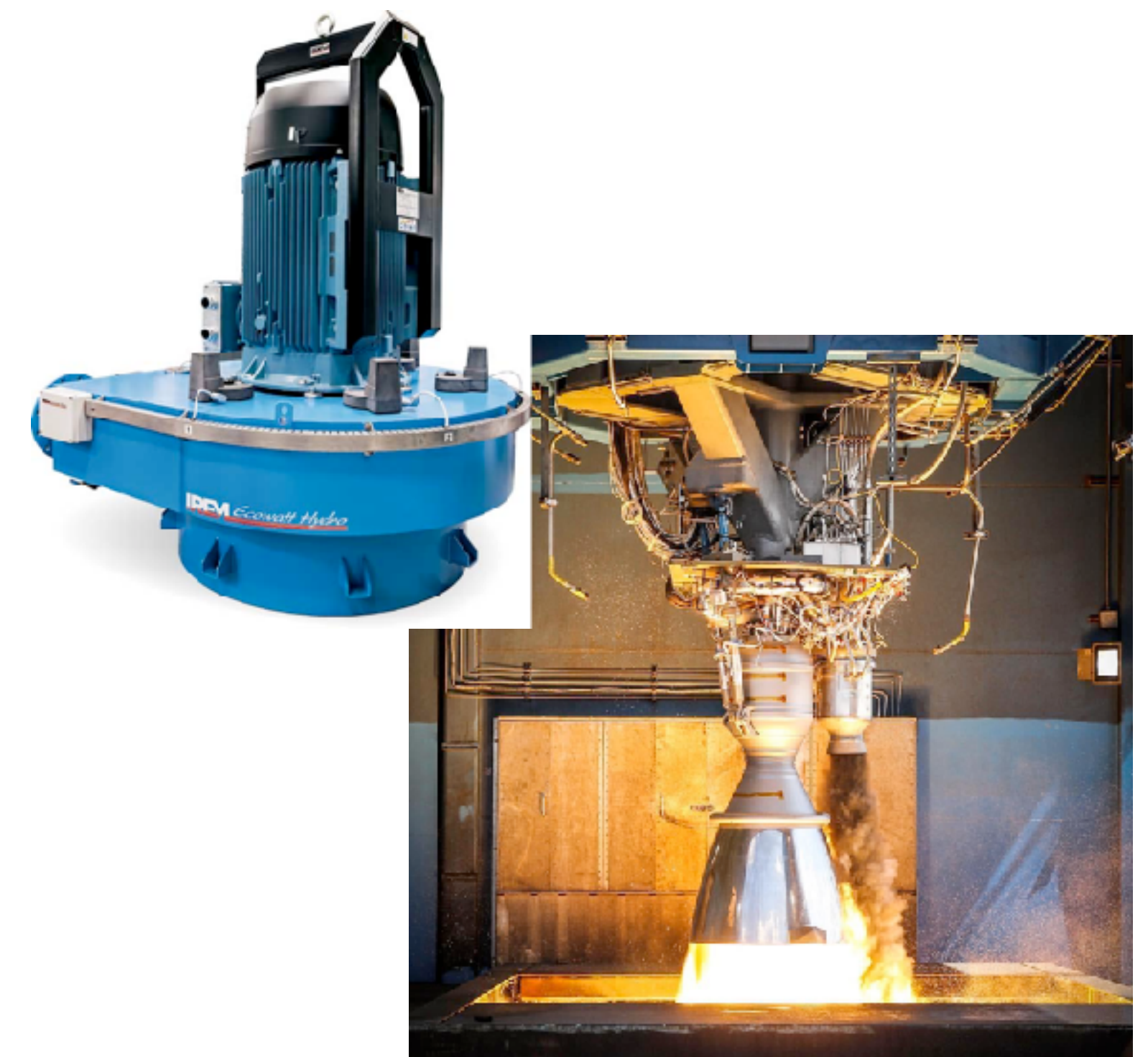
Esistono sistemi ramificati ben più complessi..  
si segue la stessa procedura di semplificazione..



Relativamente al funzionamento del macchinario rotante  
si ricorda che queste possono funzionare  
a regime costante  
a regime variabile

Questo ha forti implicazioni relativamente alla maniera  
in cui si misureranno le vibrazioni..

RMS, ordini, frequenze naturali.. dipendono da RPM



..analisi degli ordini vista nel modulo  
4 strumenti e metodi Sperimentali

