



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE**



Dipartimento di
**Ingegneria
e Architettura**

Bipoli Elettrici

Elettrotecnica

A.A. 2024 - 2025

Prof. Alessandro Massi Pavan – apavan@units.it

PROPRIETA' DEI BIPOLI

- Tipo di **comando**: bipoli comandati in tensione o comandati in corrente
- **Linearità**: i bipoli sono lineari se la relazione tra tensione e corrente è espressa da un operatore lineare
- **Memoria**: bipoli dinamici (con memoria) o istantanei (senza memoria) a seconda che la relazione costitutiva (o relazione caratteristica) leghi tensione e corrente anche a istanti di tempo diversi o meno
- **Dipendenza dal tempo**: il bipolo è tempo-invariante (T-I) se la sua equazione costitutiva non dipende dal tempo (altrimenti T-V)

RESISTORE

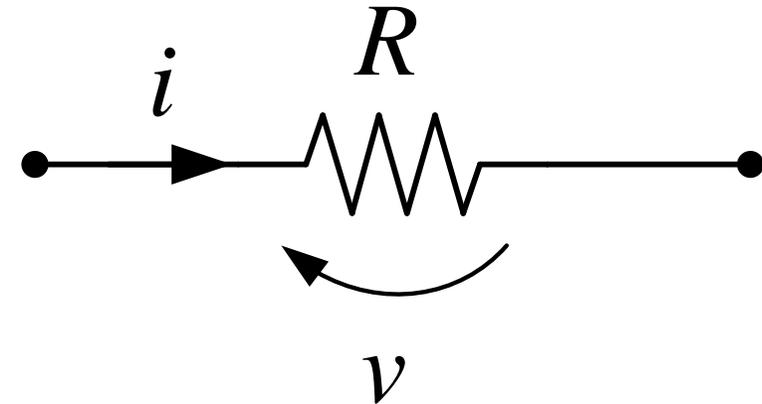
- La resistenza si misura in ohm [Ω]
- George Simon Ohm (1787 – 1854)



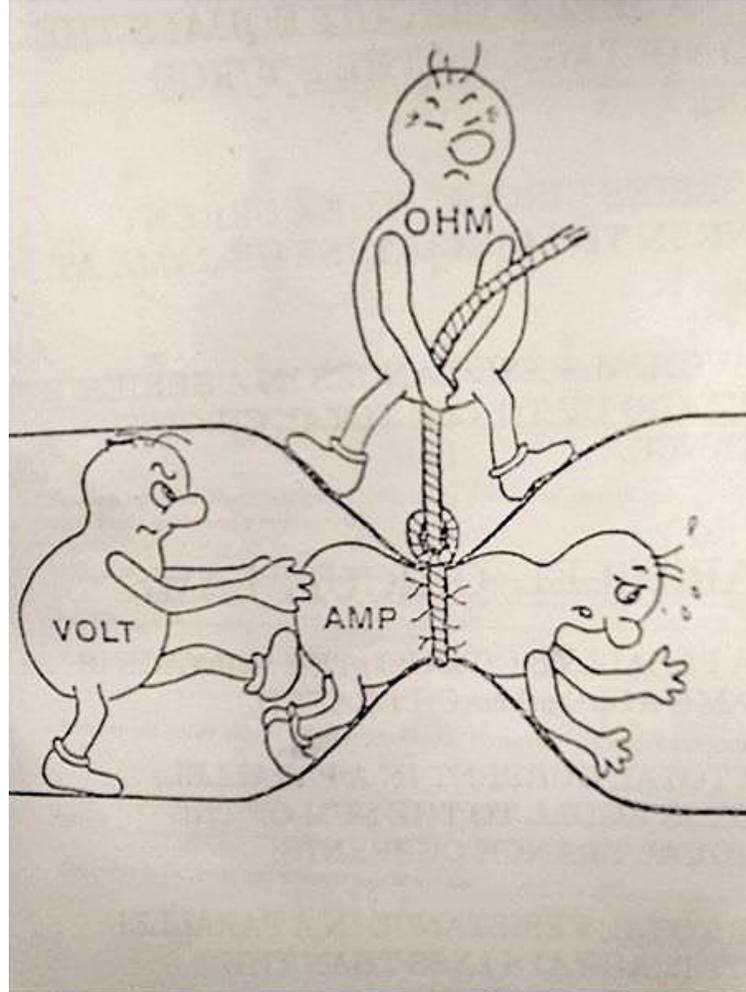
LEGGE DI OHM

$$v(t) = R \times i(t)$$

1 ohm = 1 volt/ampere

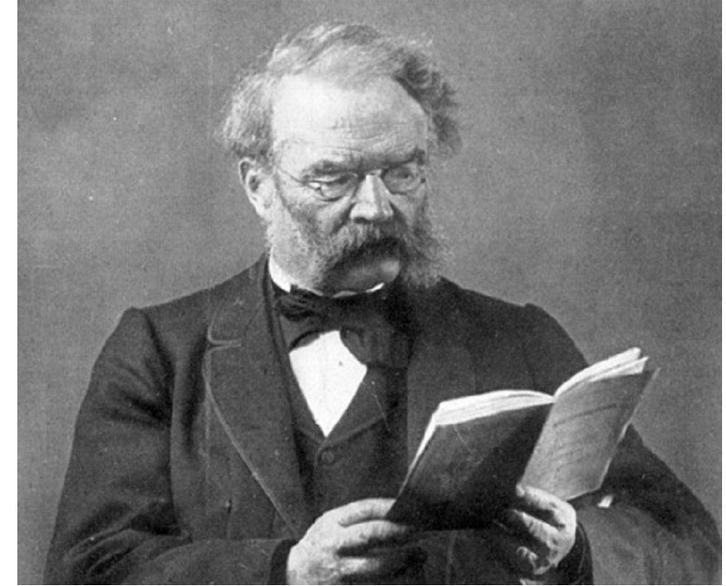


LEGGE DI OHM



CONDUTTANZA

- La conduttanza si misura in siemens [S]
- Ernst Werner von Siemens (1816 – 1892)

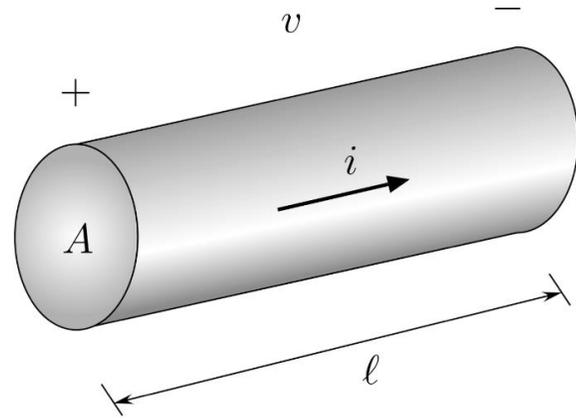


$$G = \frac{1}{R}$$

1 siemens = 1 ampere/volt

$$i(t) = G \times v(t)$$

RESISTENZA ELETTRICA



$$R = \rho \times \frac{l}{A}$$

MATERIALE	RESISTIVITA' ($\Omega \cdot m$)	APPLICAZIONE
Rame	$1,7 \times 10^{-8}$	Anima dei cavi
Oro	$2,3 \times 10^{-8}$	Interruttori
Alluminio	$2,7 \times 10^{-8}$	Anima dei cavi
Silicio	$6,4 \times 10^2$	Circuiti integrati/Celle fotovoltaiche
Polietilene	10^{14}	Guaine dei cavi

RESISTIVITA'

$$R = \rho \times \frac{l}{A}$$

$$\rho = \rho_0 \times (1 + \alpha_0 T)$$

- ✓ ρ_0 [$\Omega \cdot m$] – resistività alla temperatura di 0°C
- ✓ α_0 [$^{\circ}C^{-1}$] – coefficiente di variazione della resistività con la temperatura
- ✓ T [$^{\circ}C$] – temperatura di lavoro

ESEMPIO



Cca-s1b,d1,a1 IMMEQU EFP FG17 450/750V



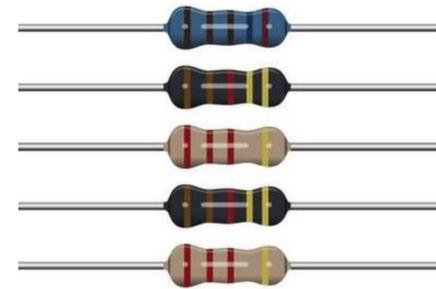
Numero conduttori	Sezione nominale	Diametro indicativo conduttore	Spessore medio isolante	Diametro est. MASSIMO	Peso indicativo del cavo	Resistenza elettrica a 20°C	Portate di corrente
<i>Cores number</i>	<i>Cross section</i>	<i>Approx conductor diameter</i>	<i>Insulation medium thickness</i>	<i>Max external diameter</i>	<i>Approx cable weight</i>	<i>Electric resistance at 20°C</i>	<i>Current carrying capacities</i>
(N°)	(mm ²)	(mm)	(mm)	(mm)	(kg/km)	(Ohm/km)	(A)
Unipolare / Single core							
1x	1.5	2.0	0.7	3.4	19	13.3	20
1x	2.5	2.2	0.8	4.1	31	7.98	28
1x	4	2.6	0.8	4.8	45	4.95	37
1x	6	3.4	0.8	5.3	63	3.3	48
1x	10	4.4	1	6.8	112	1.91	66
1x	16	5.7	1	8.7	166	1.21	88

POTENZA – LEGGE DI JOULE

$$p(t) = R \times i^2(t)$$



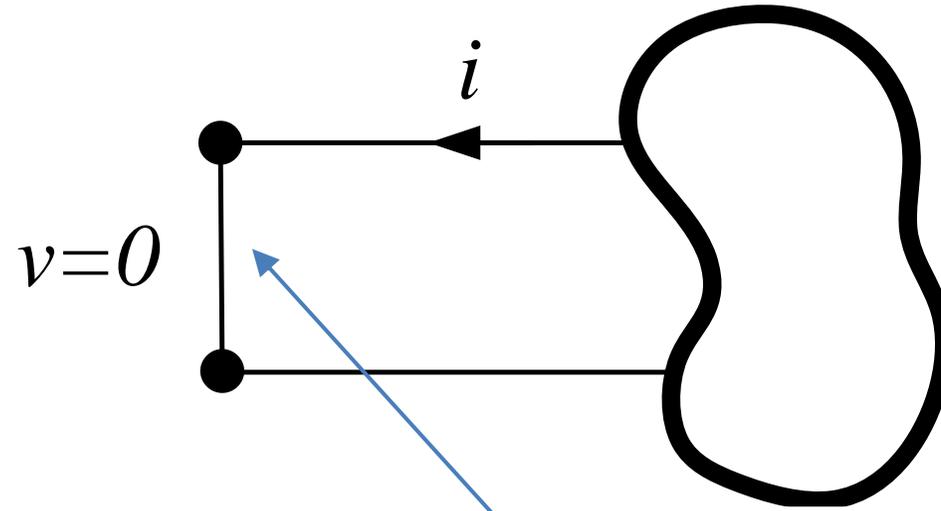
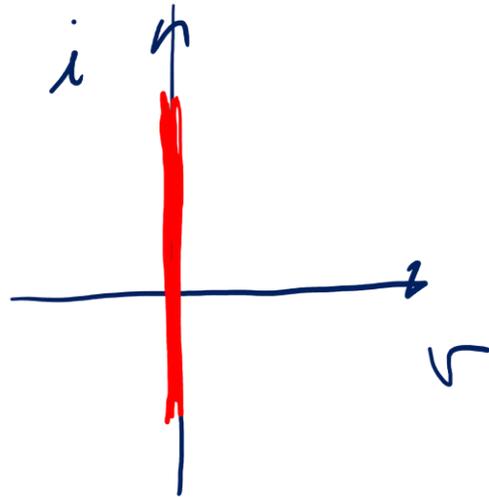
Resistore di potenza



Resistore di precisione

$$p(t) = \underbrace{v(t) i(t)} = \underbrace{R i^2(t)} = \frac{1}{R} v^2(t) = G | v^2(t)$$

CORTO CIRCUITO

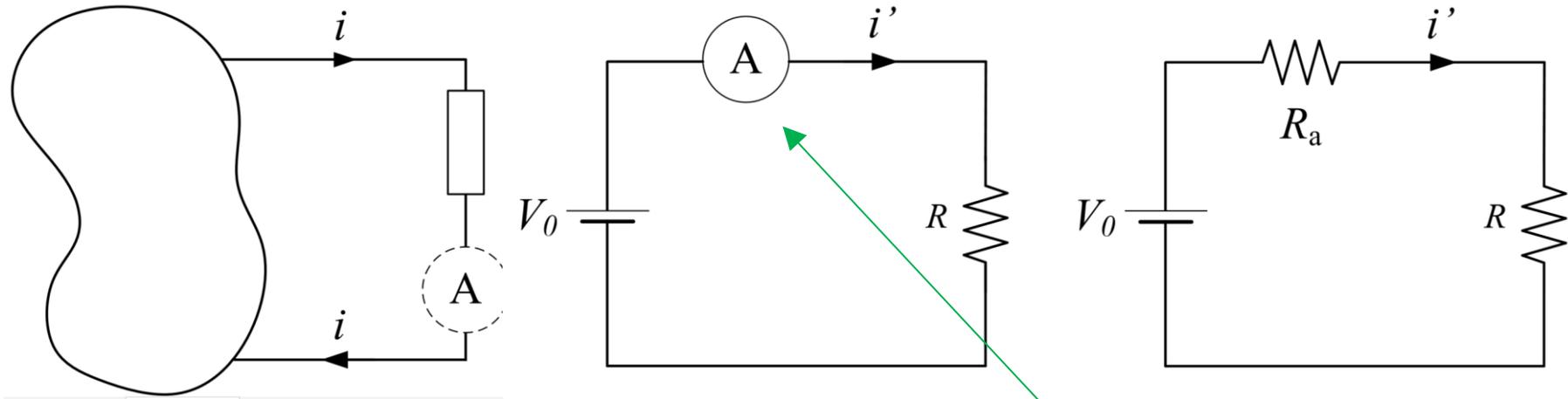


Resistenza nulla!

$$v = 0$$

$$(V = RI)$$

AMPEROMETRO



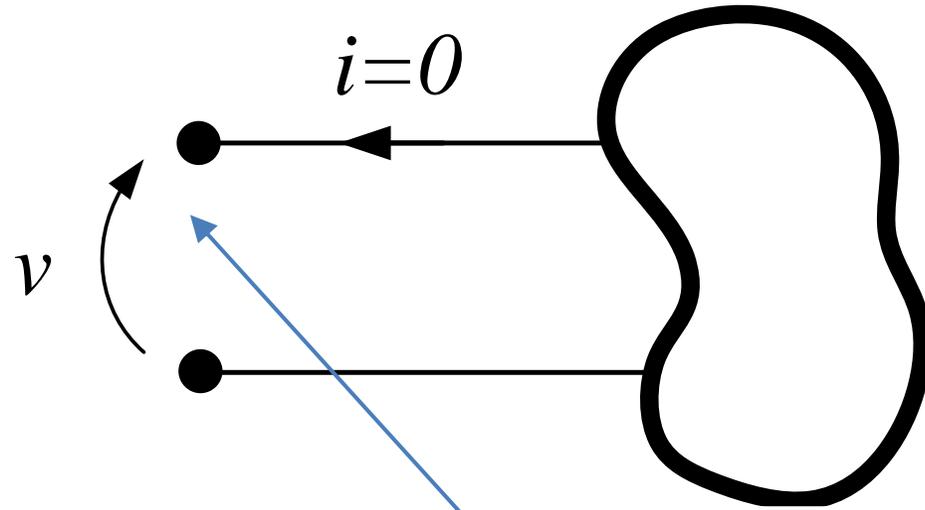
Inserimento in serie



$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{R_a}{R + R_a}$$

Un amperometro ideale si comporta come un cortocircuito

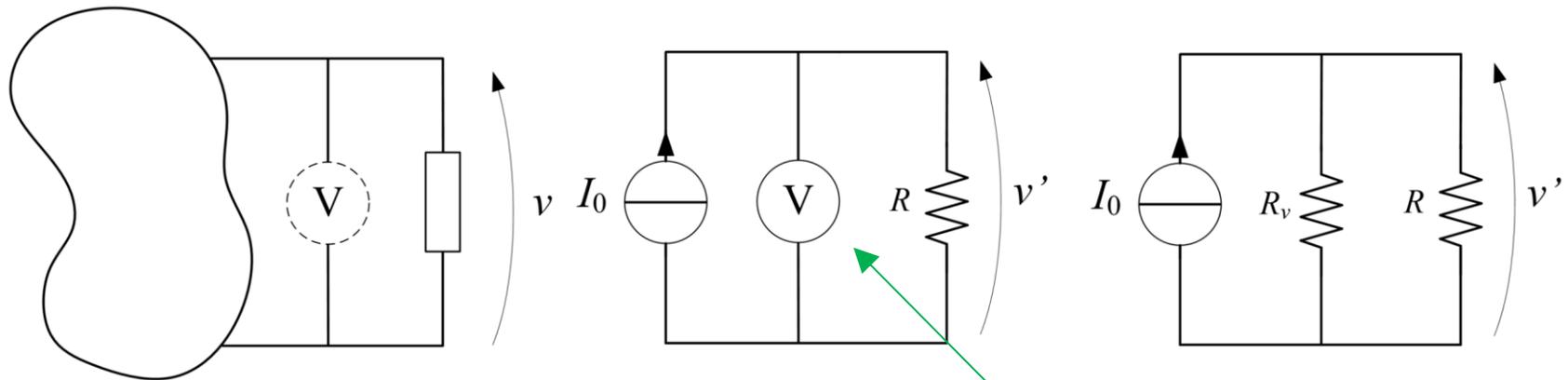
CIRCUITO APERTO



Conduttanza nulla!

$$i = 0$$

VOLTMETRO



Inserimento in parallelo

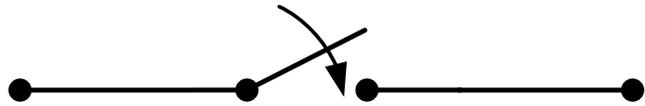


$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{R}{R + R_v}$$

Un voltmetro ideale si comporta come un circuito aperto

INTERRUTTORI

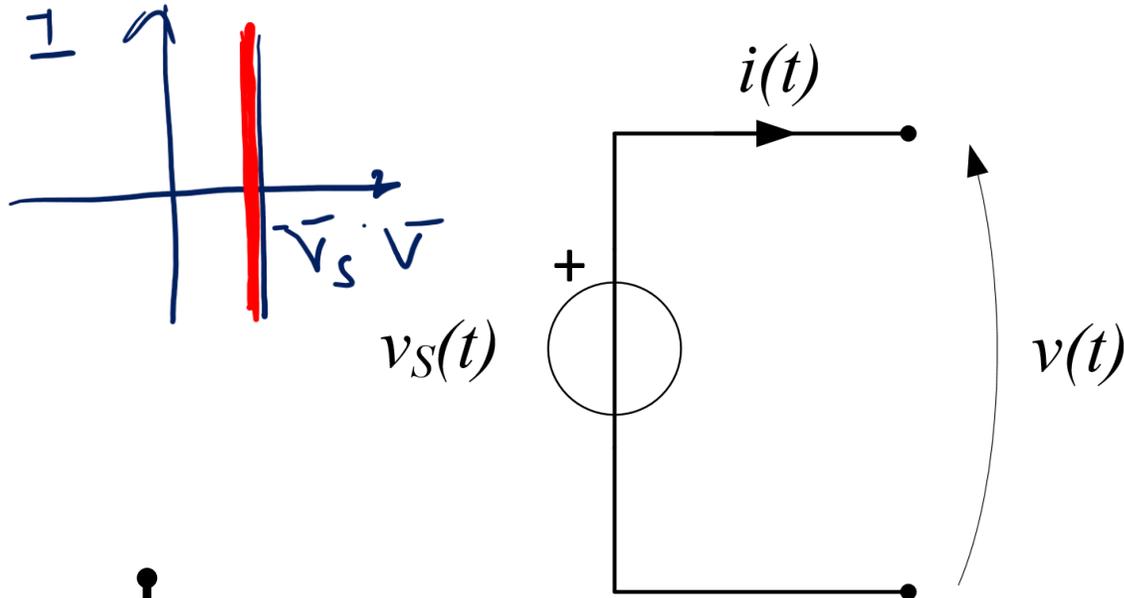
Interruttore aperto



Interruttore chiuso

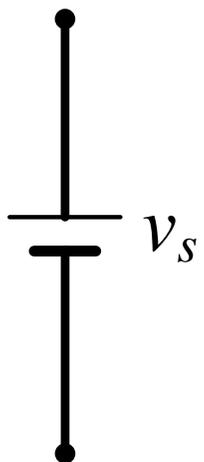


GENERATORE (IDEALE) INDIPENDENTE DI TENSIONE



$$v(t) = v_s(t)$$

$$p(t) = v_s(t) i(t)$$



$$v = V_s$$

Un generatore indipendente di tensione spento equivale a un corto circuito

FORME D'ONDA

- A gradino
- A dente di sega
- Impulsive
- Periodiche
- Sinusoidali ...

$$v(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t + \varphi)$$

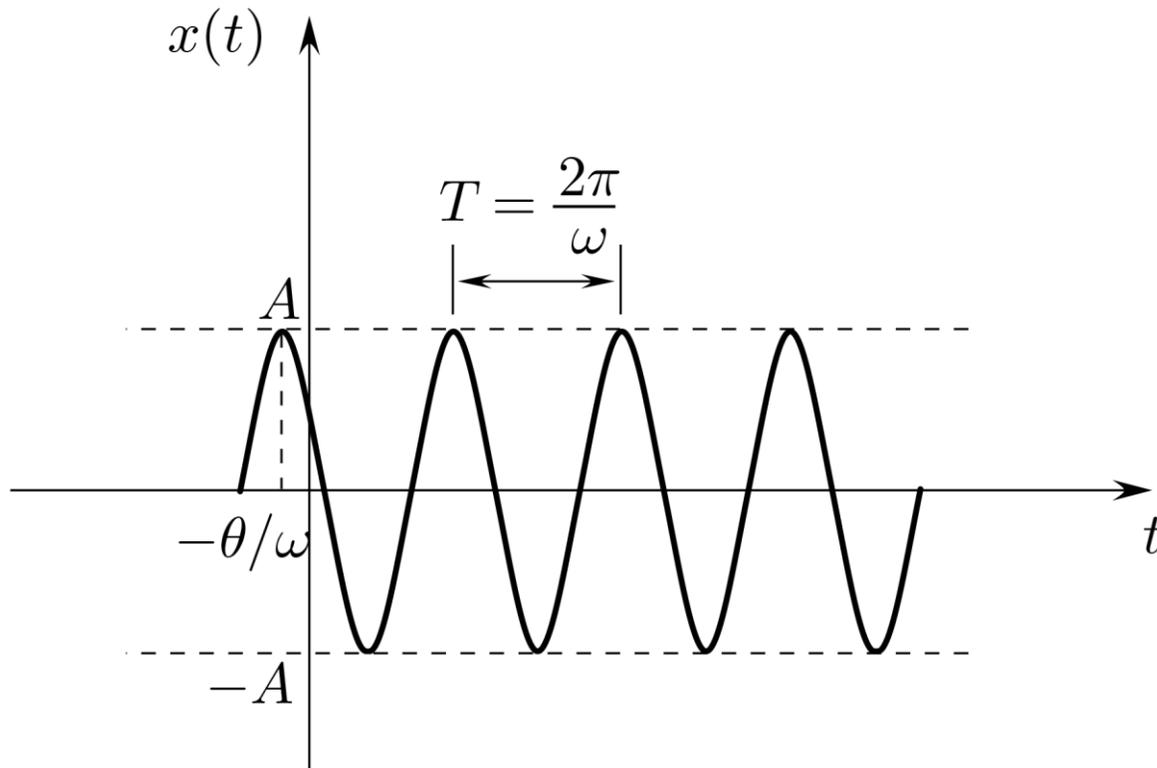
$$\omega = 2\pi f$$

SINUSOIDI

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$

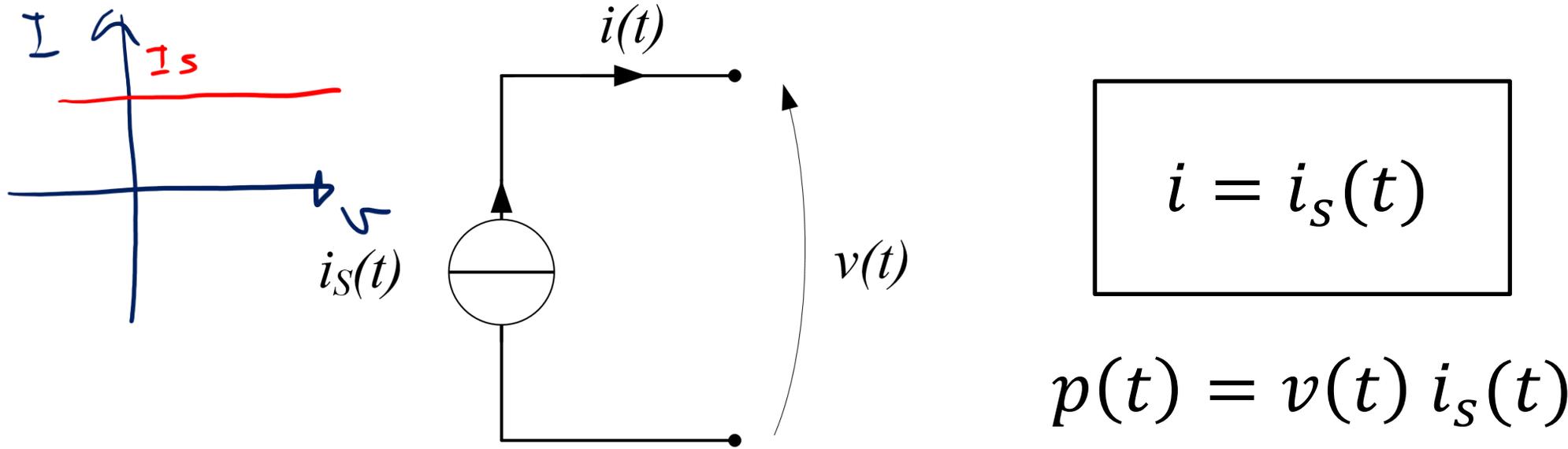


- A – ampiezza
- ω – pulsazione [rad/s]
- θ – fase iniziale [°]
- T – periodo [s]
- f – frequenza [Hz]

ESEMPI

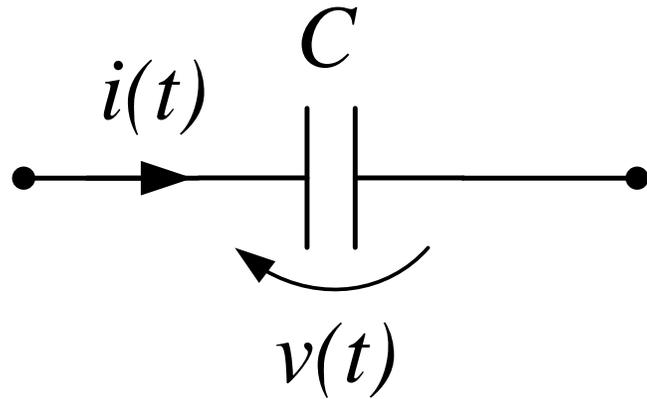


GENERATORE (IDEALE) INDIPENDENTE DI CORRENTE



Un generatore indipendente di corrente spento
equivale a un circuito aperto

CONDENSATORE



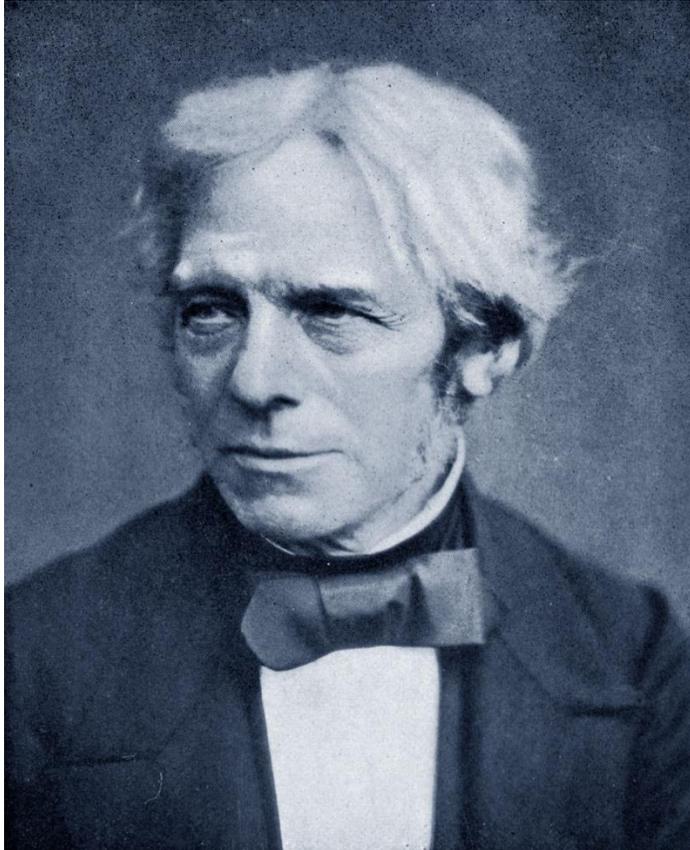
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Se la tensione è costante (DC)

Il condensatore equivale a un circuito aperto

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

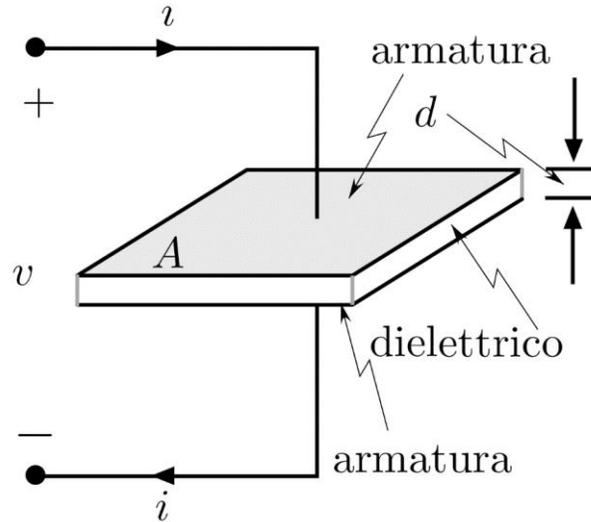
CAPACITA'



- ✓ La capacità si misura in farad [F]
- ✓ Michael Faraday (1791 – 1867)

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt}$$

CONDENSATORE



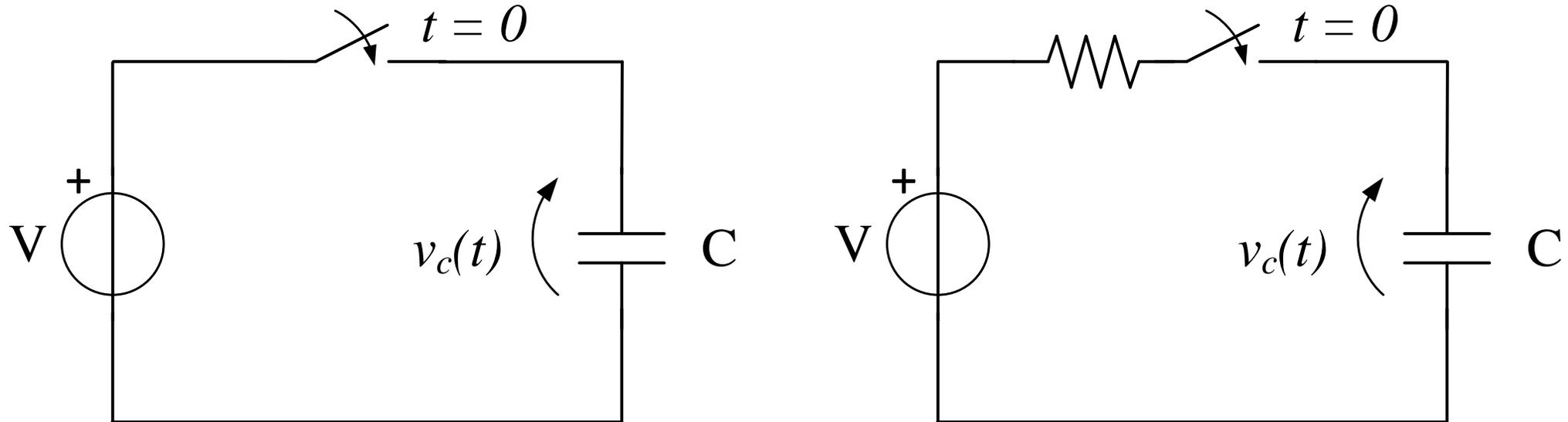
$$q = C \cdot v$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



- ✓ ϵ_r – costante dielettrica relativa del materiale
- ✓ ϵ_0 [F/m] - costante dielettrica del vuoto

CONDENSATORE



La tensione in un condensatore è una funzione continua
il condensatore si oppone a brusche variazioni di tensione

CONDENSATORE - ENERGIA

Il condensatore ideale è un elemento passivo senza perdite e può immagazzinare energia

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{2T} C [v^2(t_0 + T) - v^2(t_0)] = 0$$

$$w(t_0 - t_1) = \frac{1}{2} C [v^2(t_1) - v^2(t_0)]$$

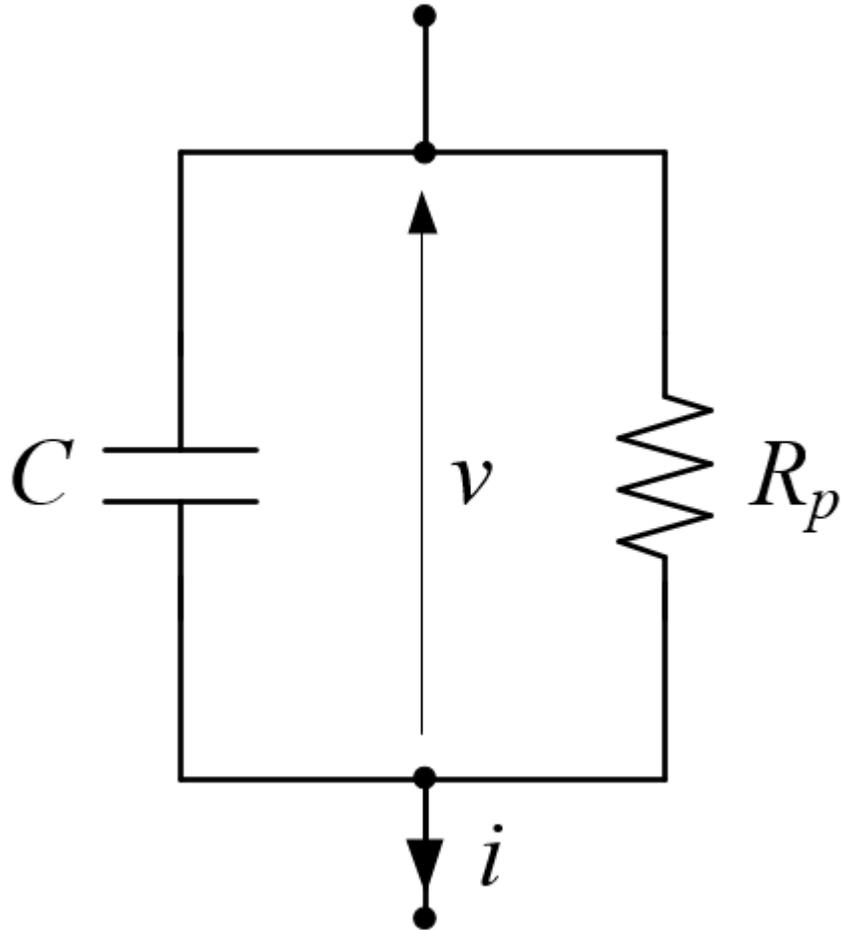
Per un elemento passivo, quando tensione e corrente sono periodiche, la potenza media assorbita in un periodo è maggiore o uguale a zero

CONDENSATORE - ENERGIA

$$w(v) = \frac{1}{2} C v^2$$

L'energia immagazzinata dal condensatore dipende solo dalla tensione!

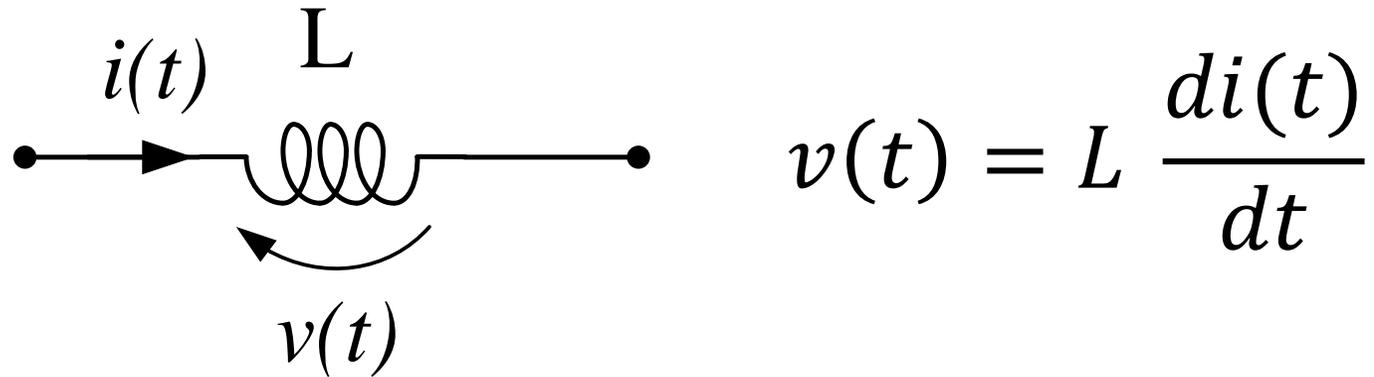
CONDENSATORE REALE



R_p molto grande tiene conto del dielettrico che dissipa energia

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_p}$$

INDUTTORE



Se la corrente è costante (DC)
l'induttore equivale a un corto circuito

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

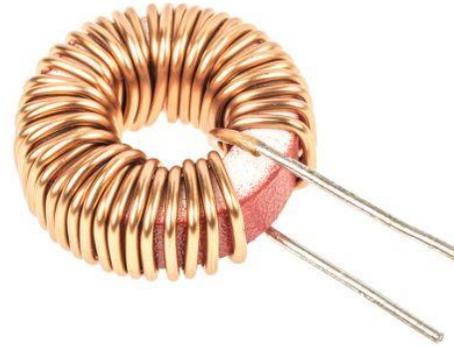
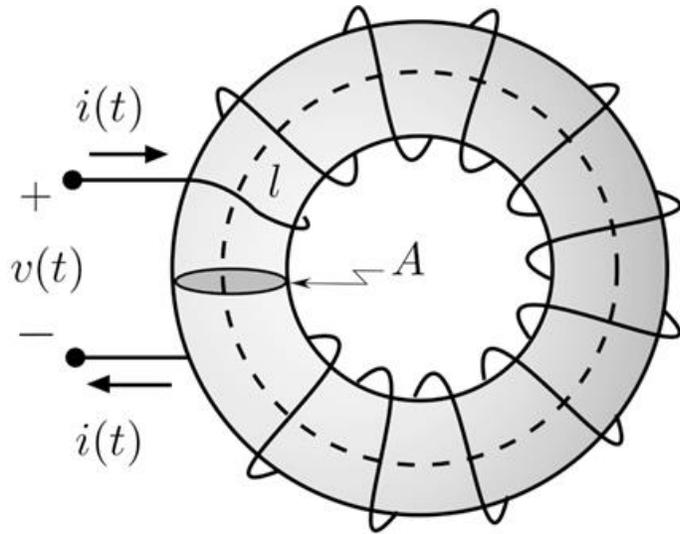
INDUTTANZA



- ✓ L'induttanza si misura in henry [H]
- ✓ Joseph Henry (1797 – 1878)

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ (volt} \times \text{secondo)/ampere}$$

INDUTTORE



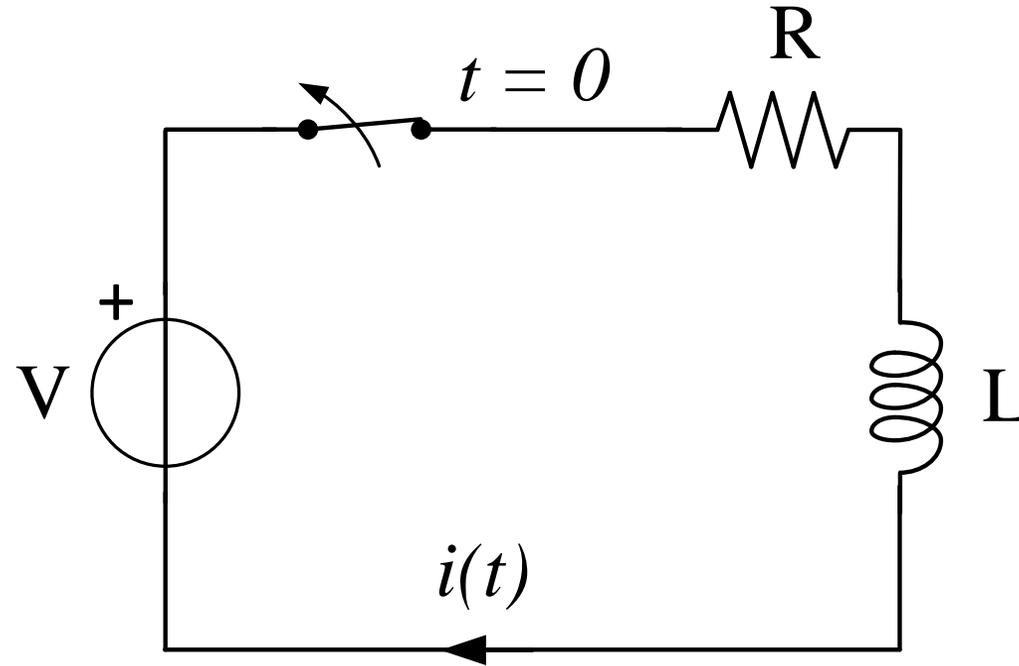
$$f.e.m. = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\Phi(B) = L \cdot i$$

- ✓ μ_0 [H/m] – permeabilità magnetica del vuoto
- ✓ μ_r – permeabilità magnetica relativa
- ✓ N - numero di spire

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l}$$

INDUTTORE



La corrente in un induttore è una funzione continua
l'induttore si oppone a brusche variazioni di corrente

INDUTTORE ENERGIA

Come il condensatore, l'induttore ideale è un elemento passivo senza perdite

$$w(t_0 - t_1) = \frac{1}{2}L[i^2(t_1) - i^2(t_0)]$$

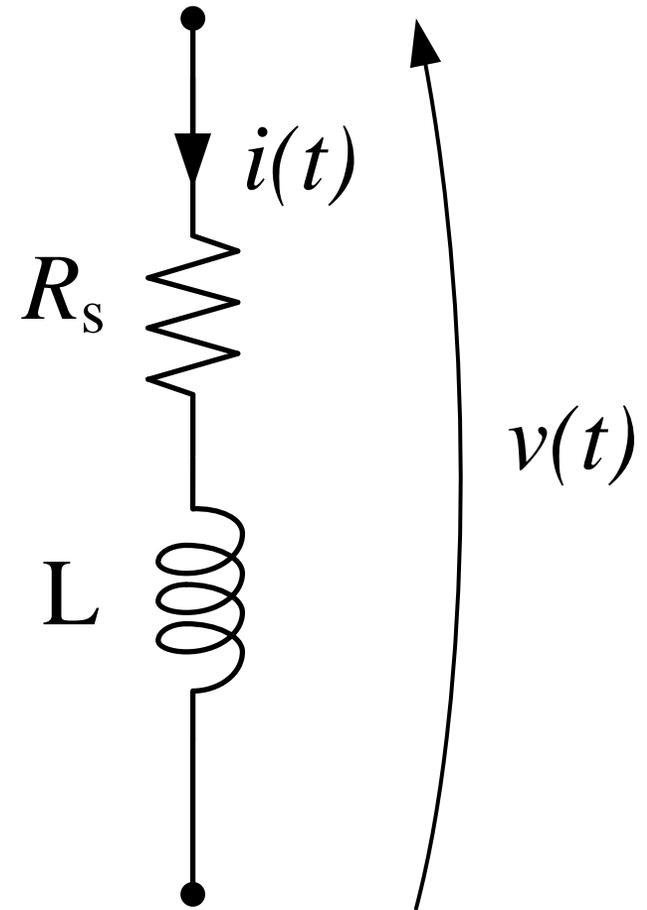
$$w(i) = \frac{1}{2}Li^2$$

L'energia immagazzinata dall'induttore dipende solo dalla corrente!

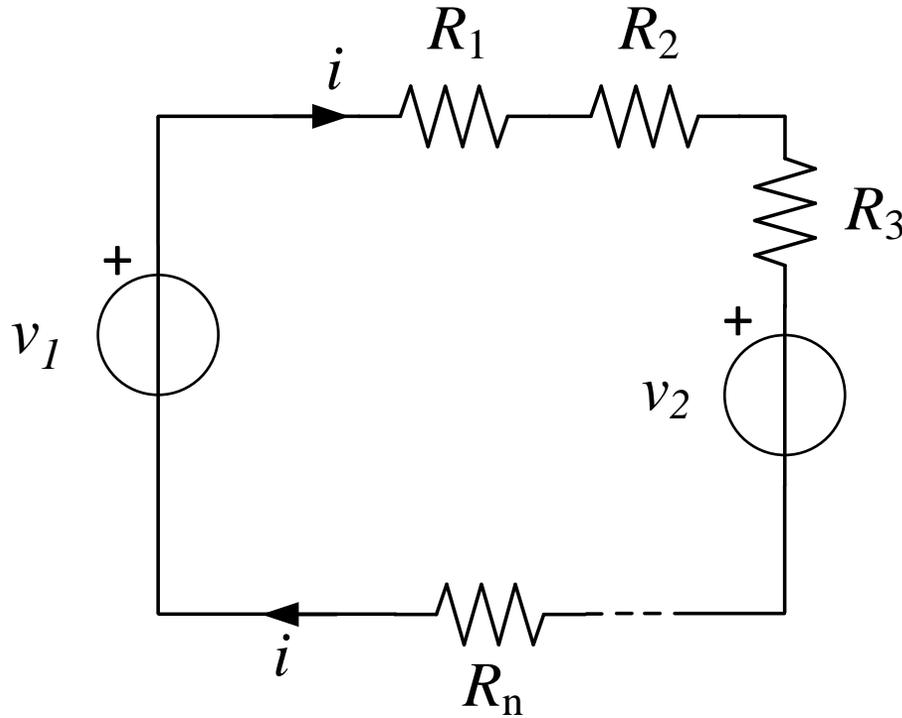
INDUTTORE REALE

R_s molto piccola tiene conto del conduttore con cui è realizzata la bobina che dissipa energia

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_s i(t)$$



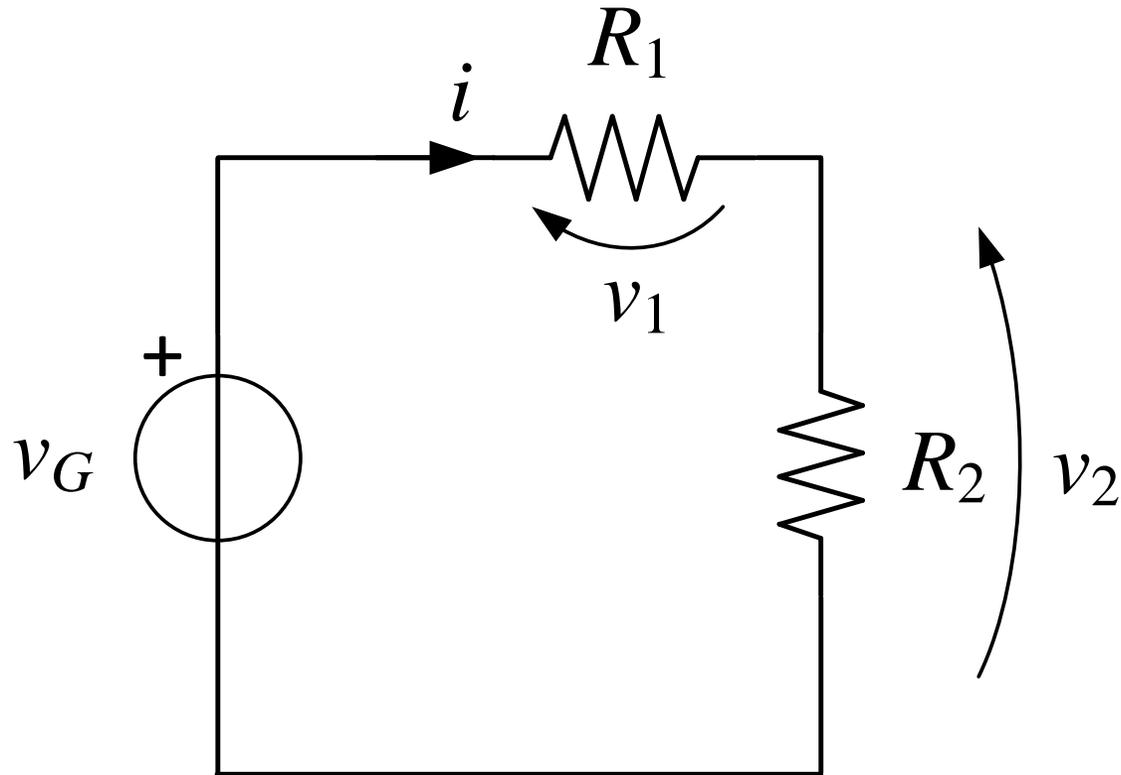
RESISTORI IN SERIE



$$i = \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

I resistori (bipoli) si dicono in serie se sono attraversati dalla stessa corrente

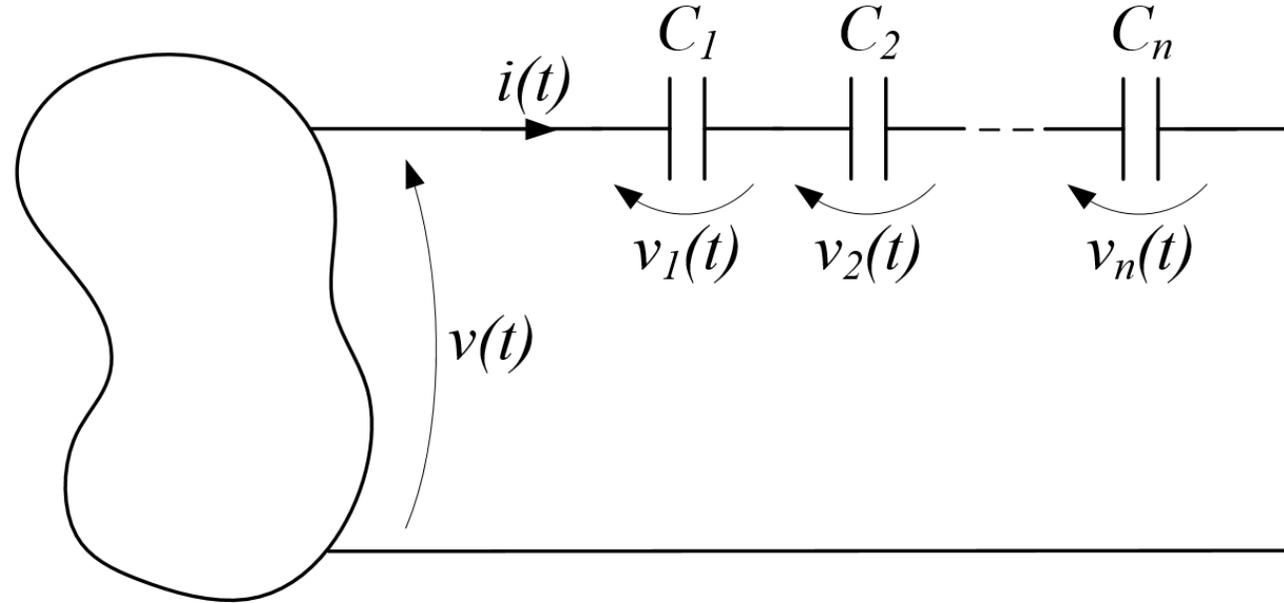
PARTITORE DI TENSIONE



$$v_1 = v_G \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_2 = v_G \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

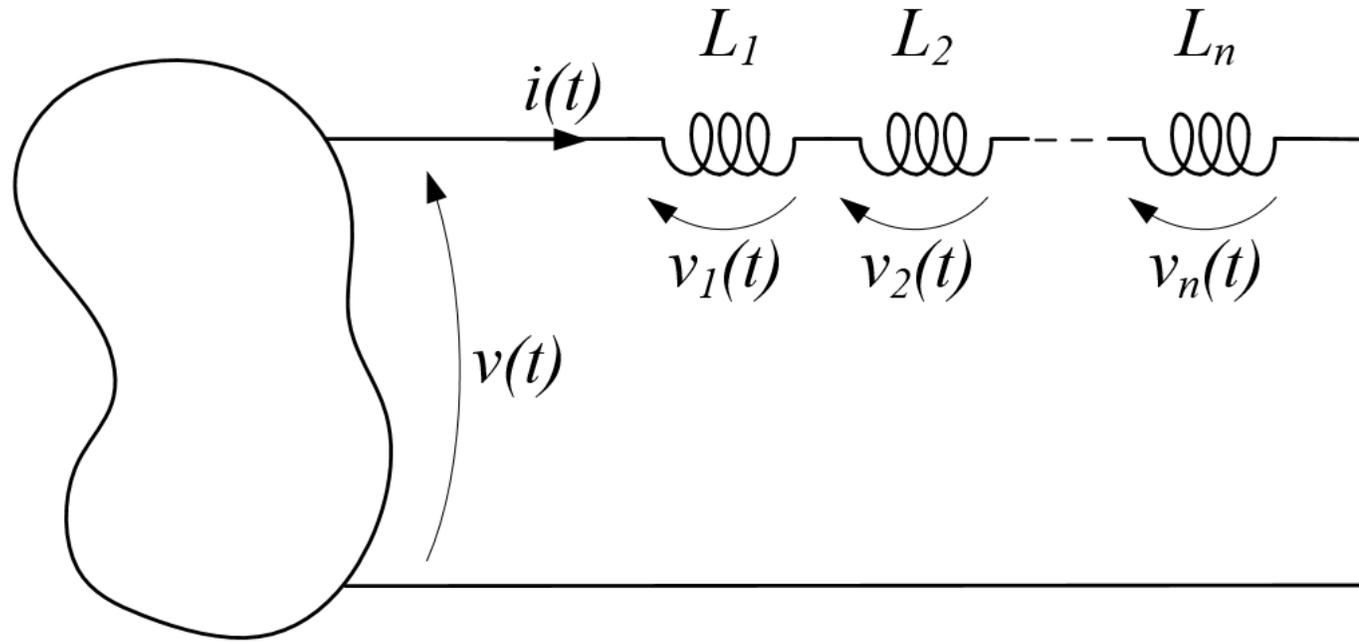
CONDENSATORI IN SERIE



$$\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

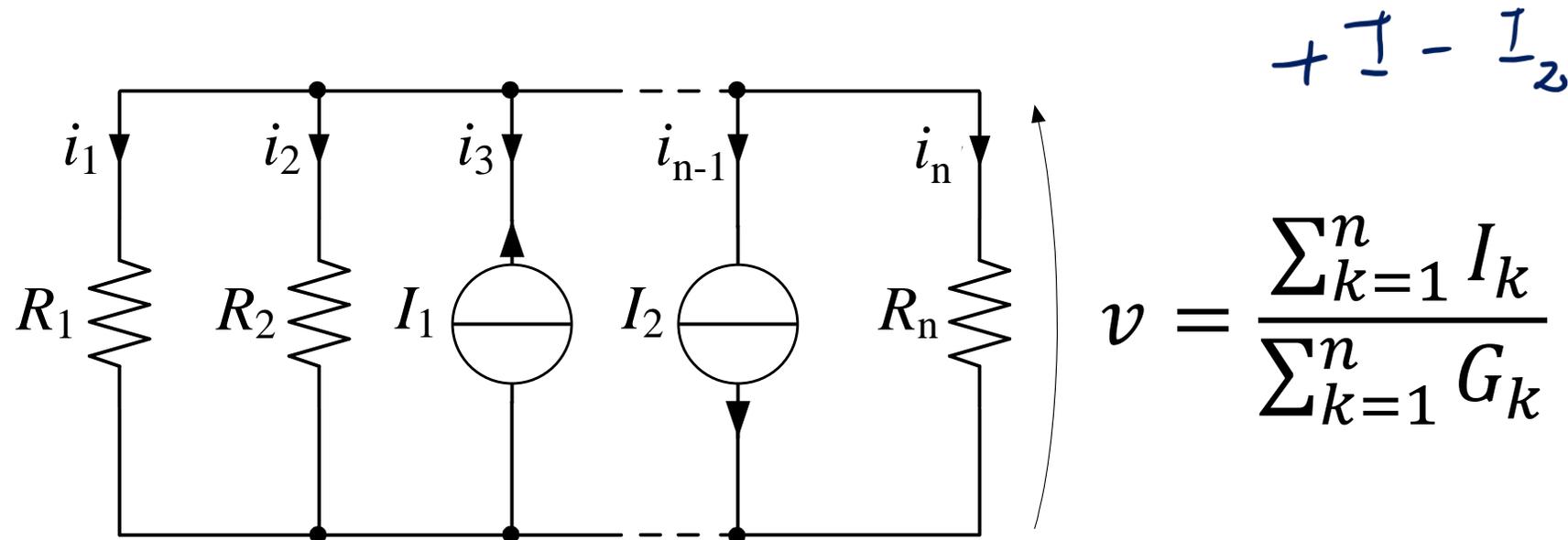
INDUTTORI IN SERIE



$$L_S = \sum_{k=1}^n L_k$$

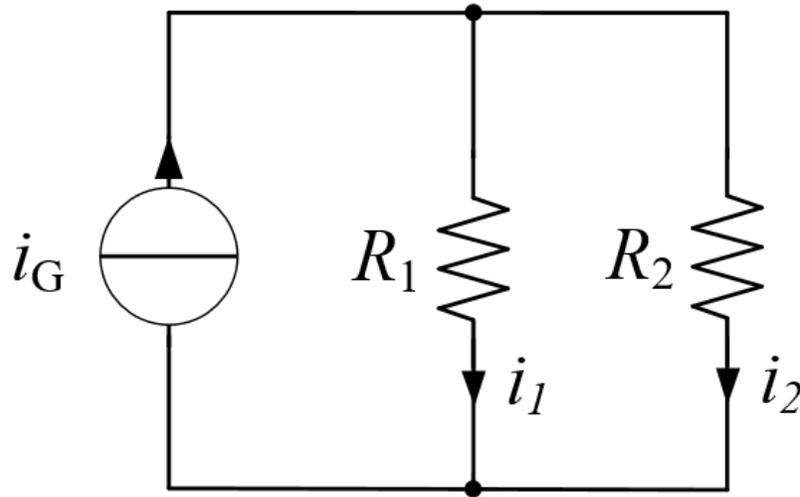
$$L_S = L_1 + L_2$$

RESISTORI IN PARALLELO



I resistori (bipoli) si dicono in parallelo se hanno in comune la stessa tensione

PARTITORE DI CORRENTE



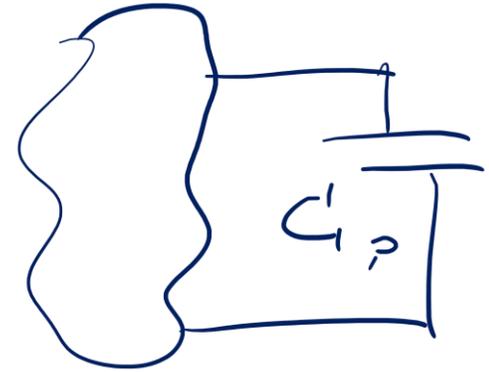
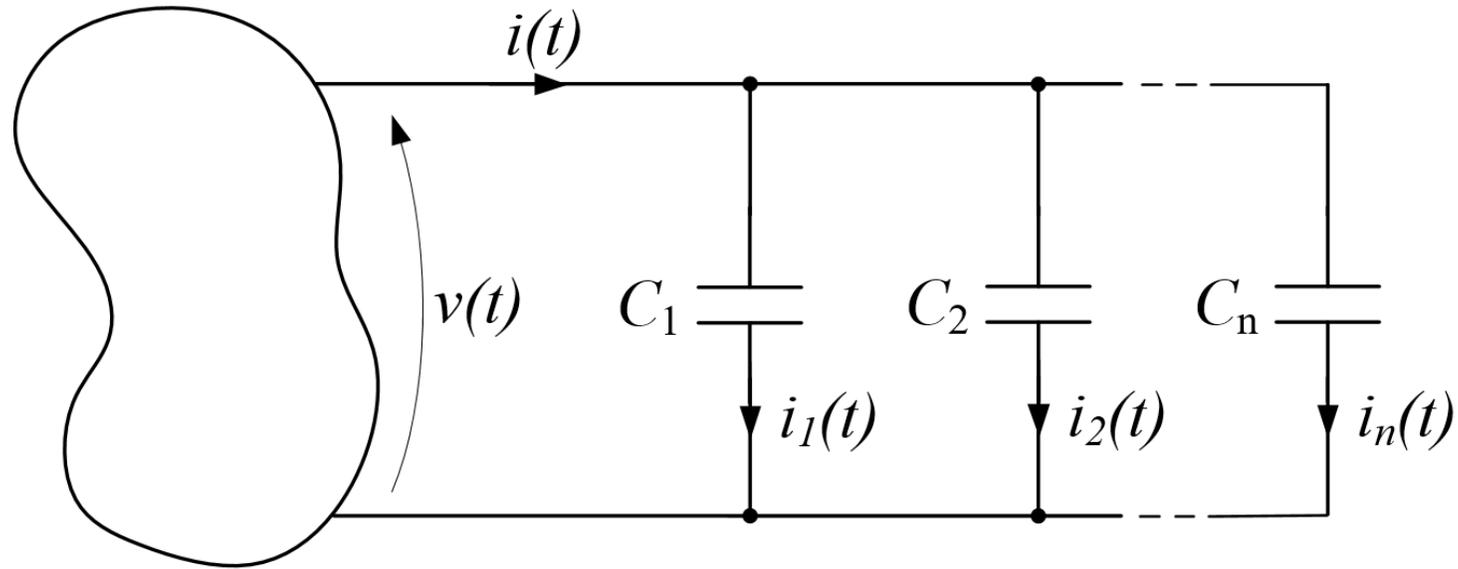
$$i_1 = i_G \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$i_2 = i_G \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$$i_1 = i_G \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = i_G \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

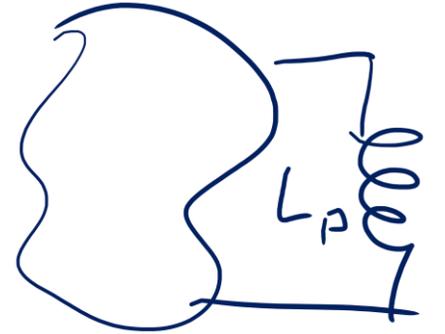
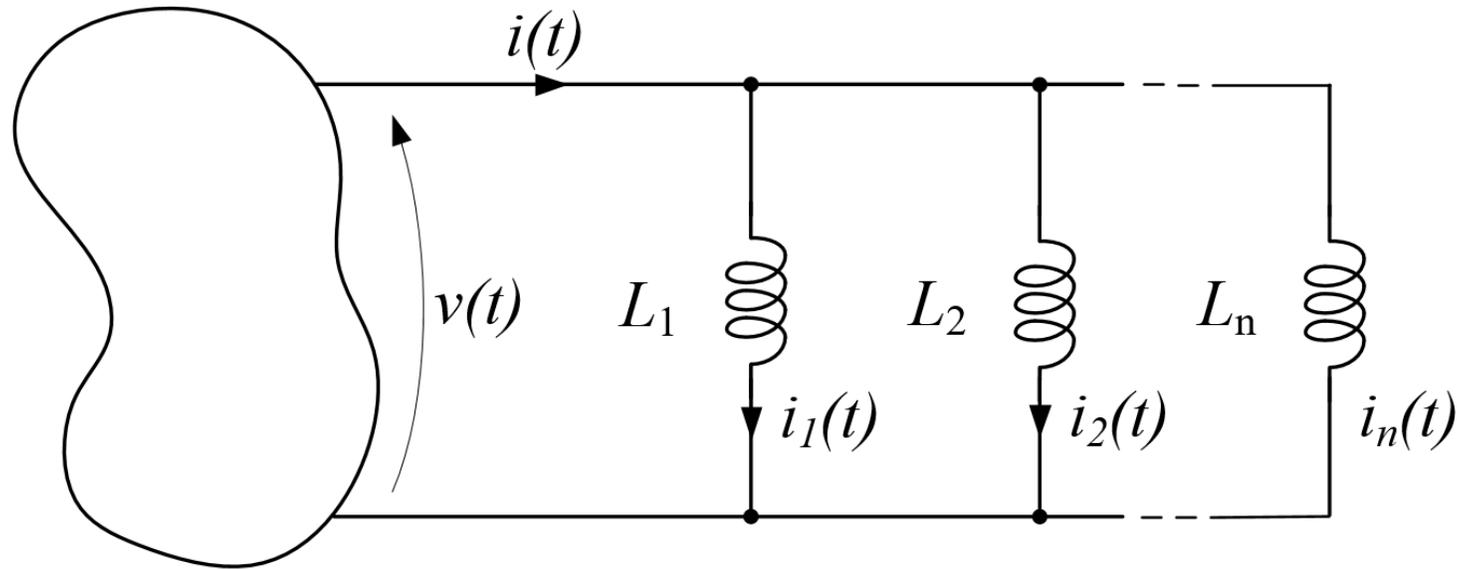
CONDENSATORI IN PARALLELO



$$C_p = \sum_{k=1}^n C_k$$

$$C_p = C_1 + C_2$$

INDUTTORI IN PARALLELO

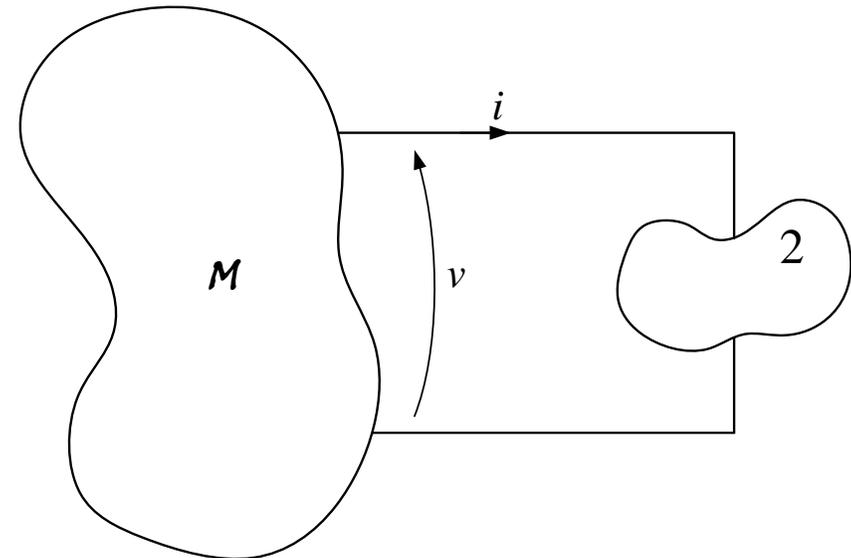
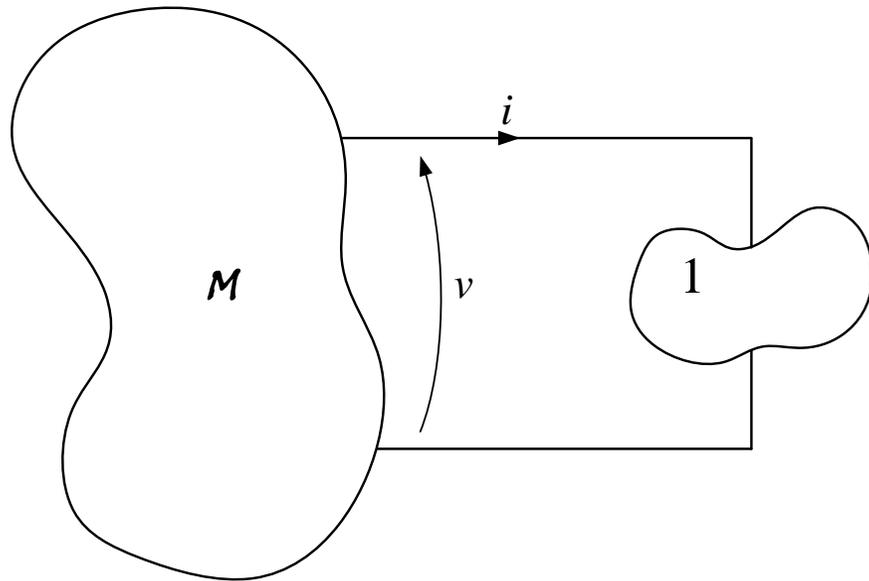


$$\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

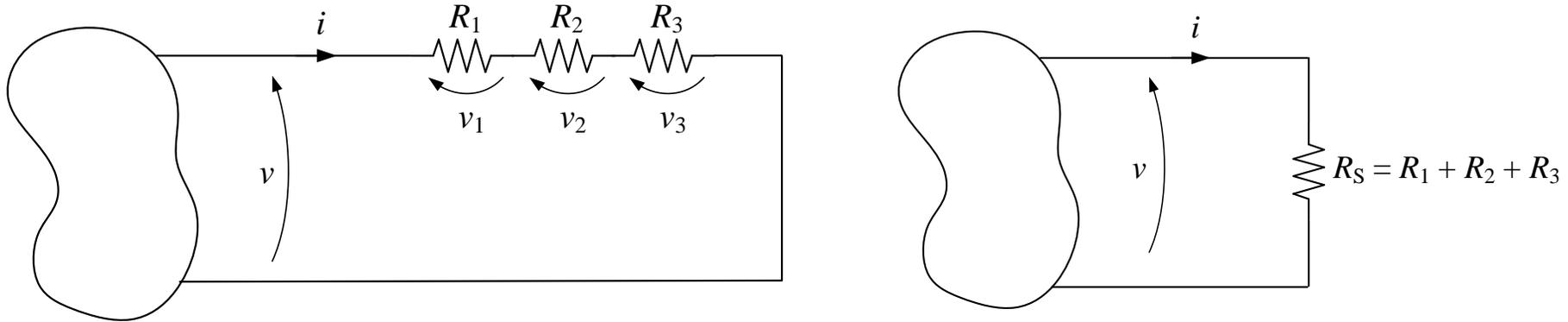
$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

BIPOLI EQUIVALENTI

Due bipoli sono equivalenti (dal punto di vista esterno)
se hanno la stessa relazione costitutiva



RESISTORI IN SERIE

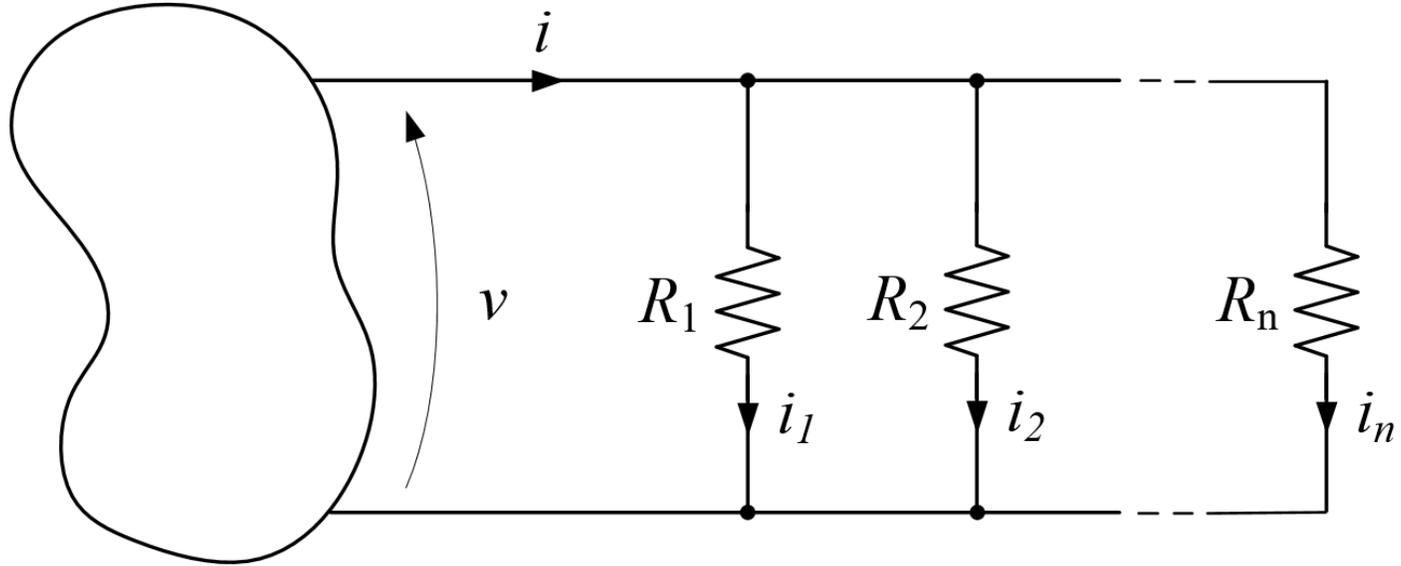


I due circuiti sono equivalenti!
(Stessa corrente e stessa tensione)

$$R_S = \sum_{k=1}^n R_k$$

$$\frac{1}{G_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}$$

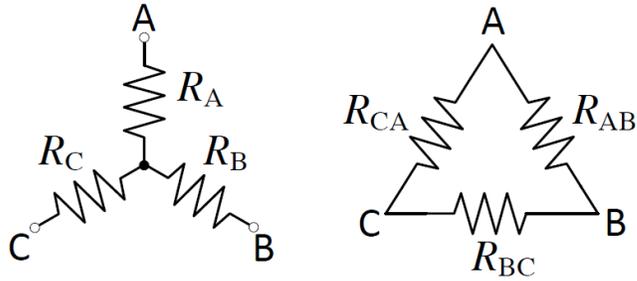
RESISTORI IN PARALLELO



$$G_p = \sum_{k=1}^n G_k$$

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

COLLEGAMENTI STELLA TRIANGOLO



$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

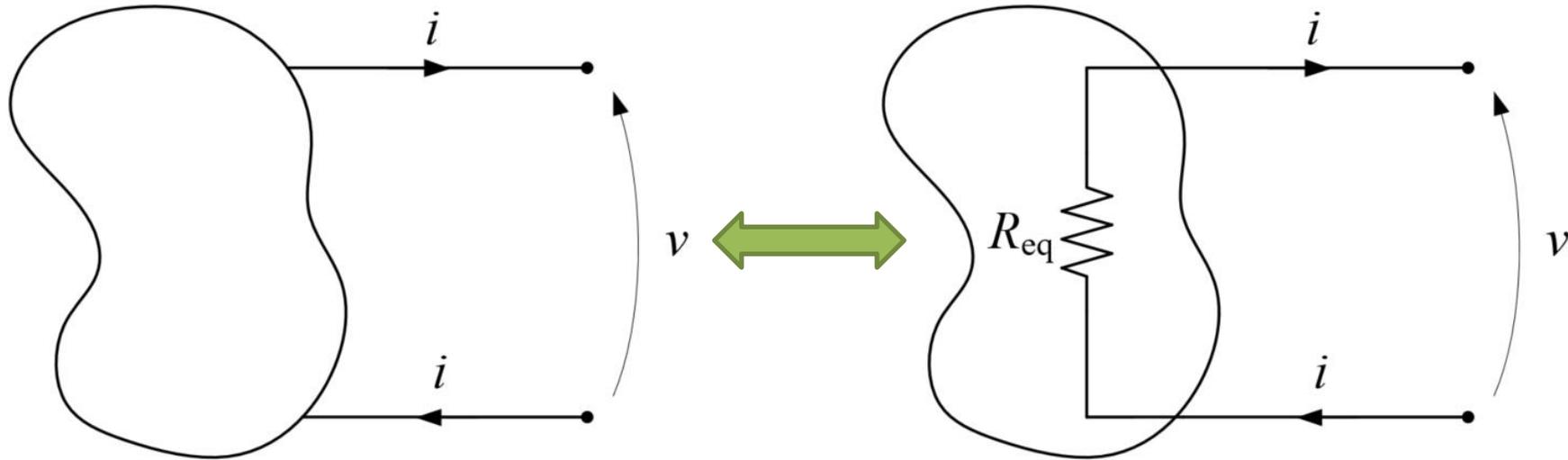
$$R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_B R_C}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_C R_A}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

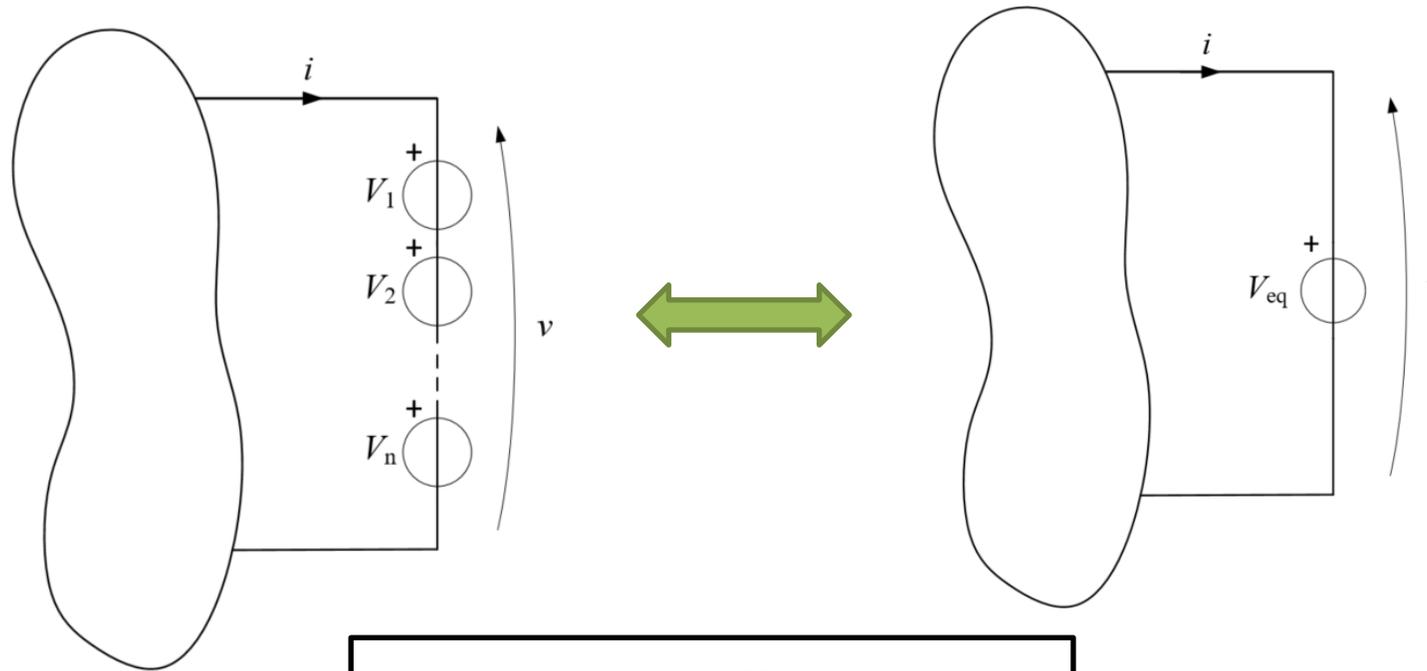
RESISTENZA EQUIVALENTE



Introduciamo la resistenza equivalente di un bipolo quando la relazione tra la corrente e la tensione ai suoi terminali è analoga alla legge di Ohm

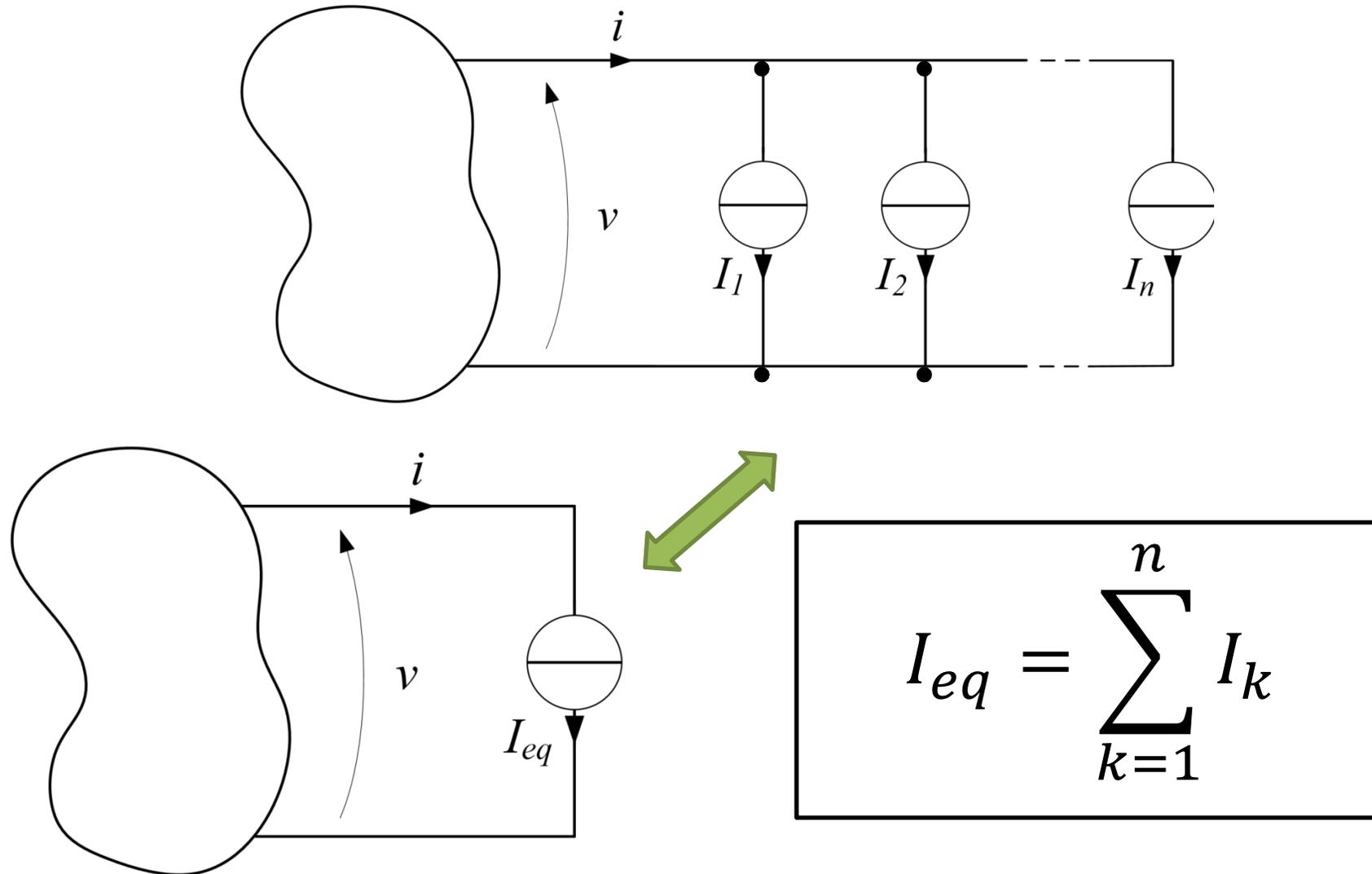
$$v = R_{eq} \times i$$

SERIE DI GENERATORI DI TENSIONE

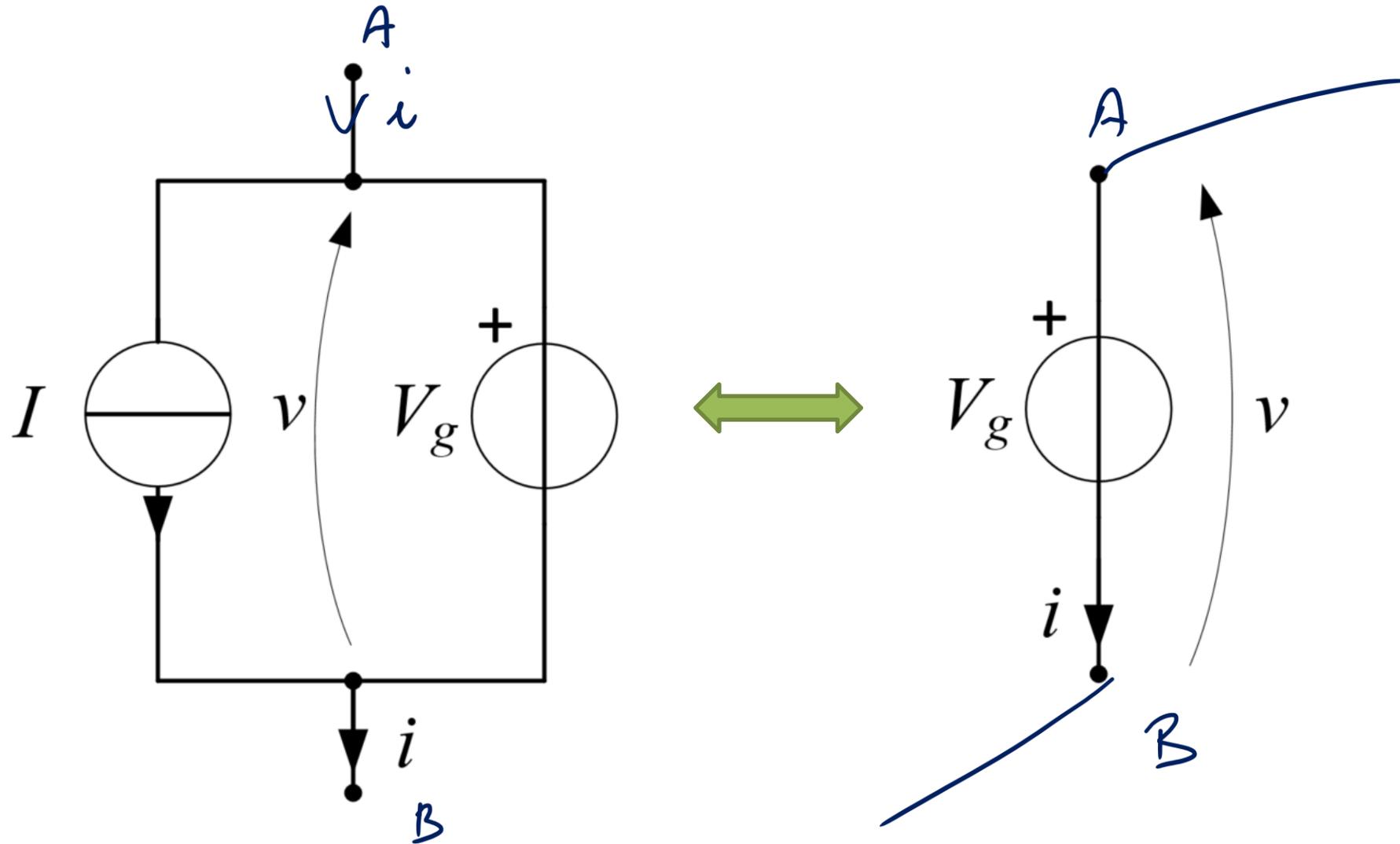


$$V_{eq} = \sum_{k=1}^n V_k$$

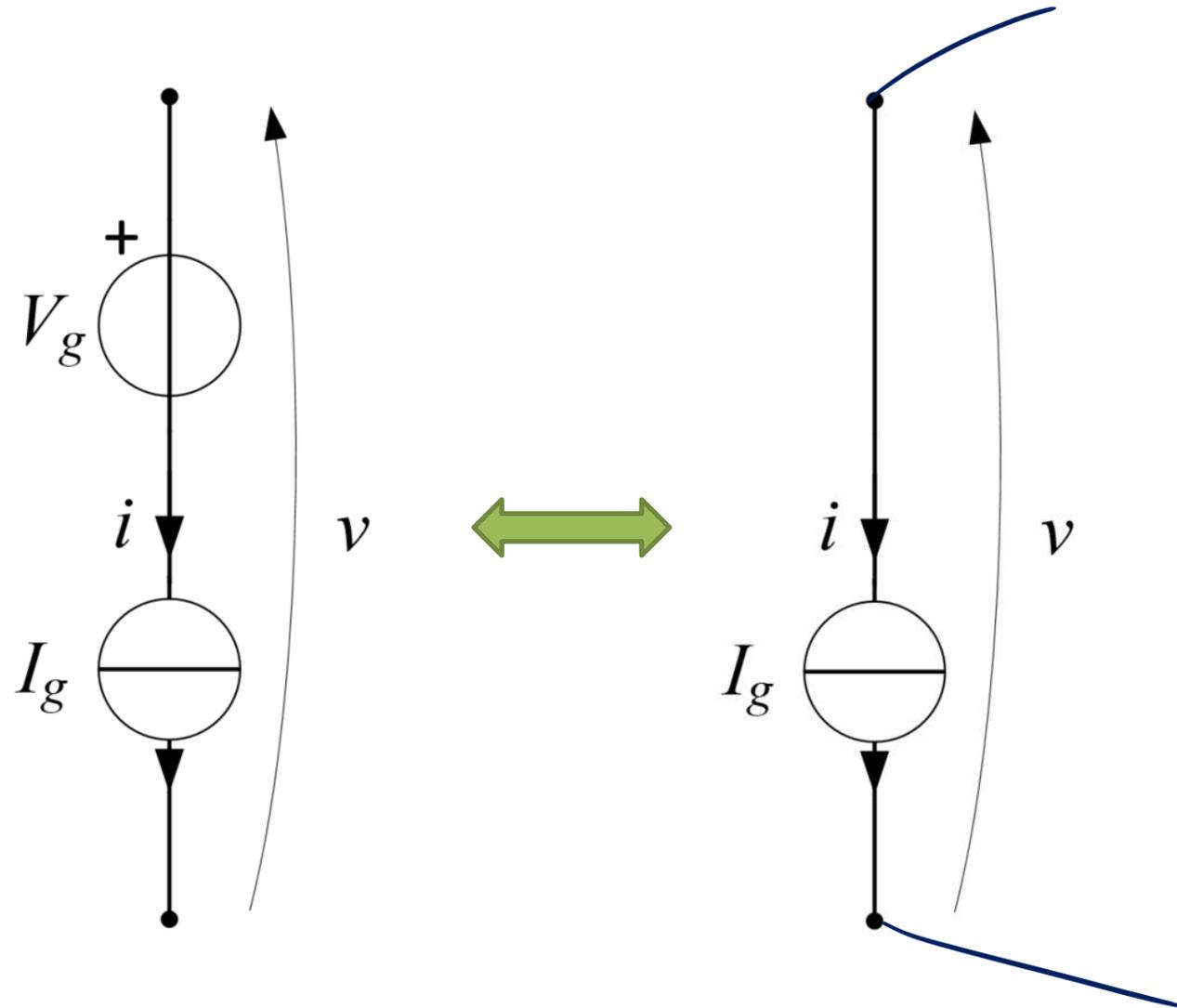
PARALLELO DI GENERATORI DI CORRENTE



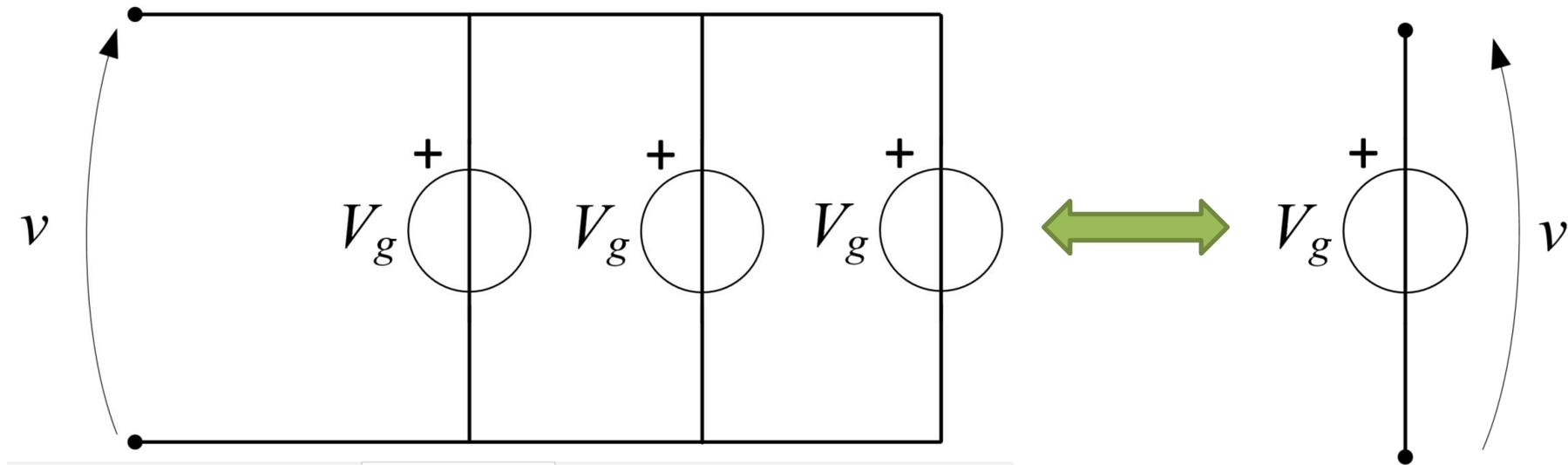
GENERATORI DI TIPO DIVERSO



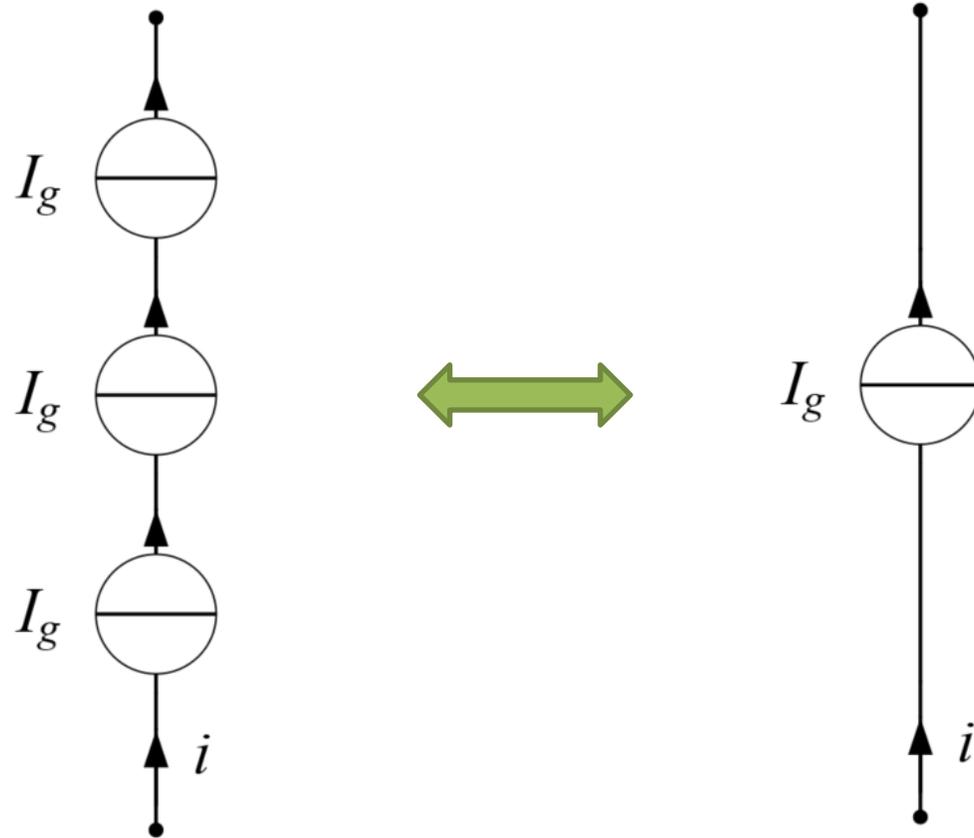
GENERATORI DI TIPO DIVERSO



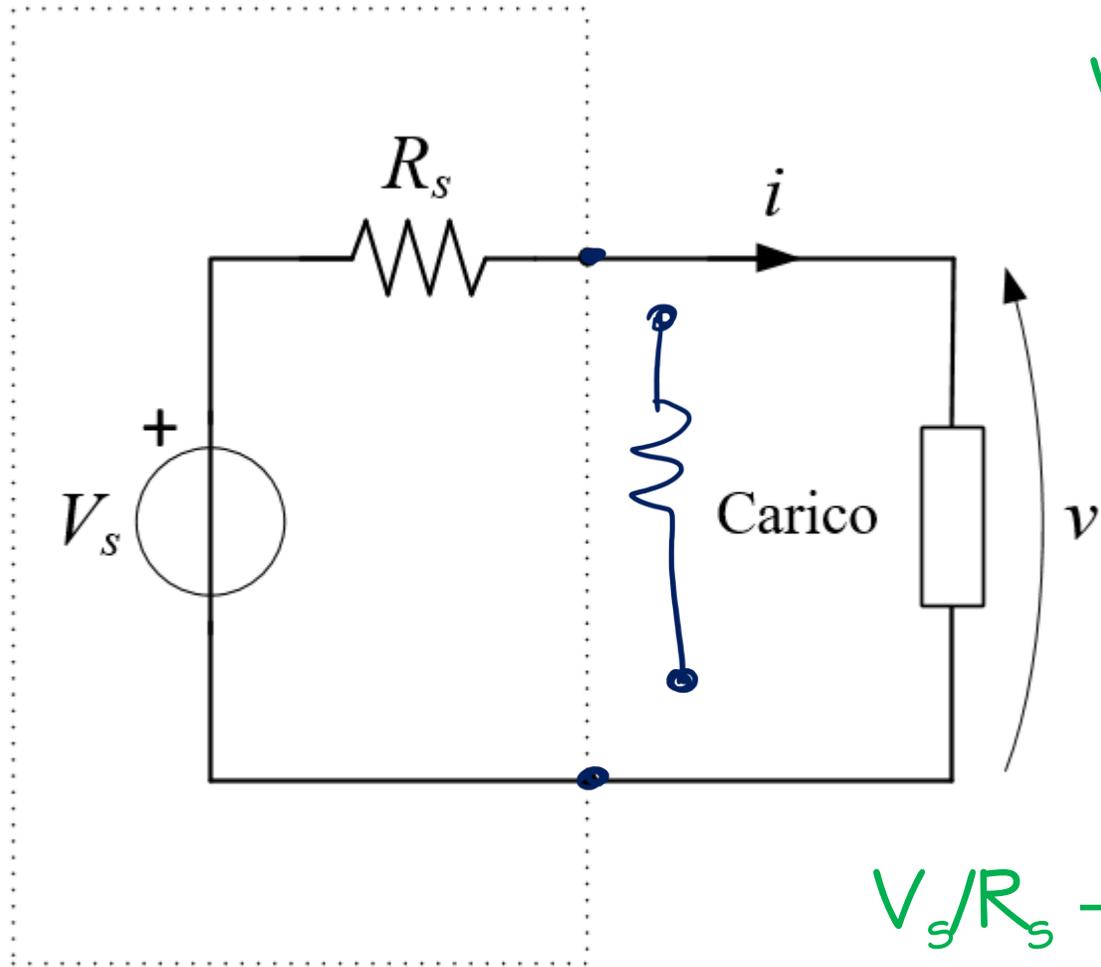
PARALLELO DI GENERATORI DI TENSIONE



SERIE DI GENERATORI DI CORRENTE



GENERATORE REALE DI TENSIONE

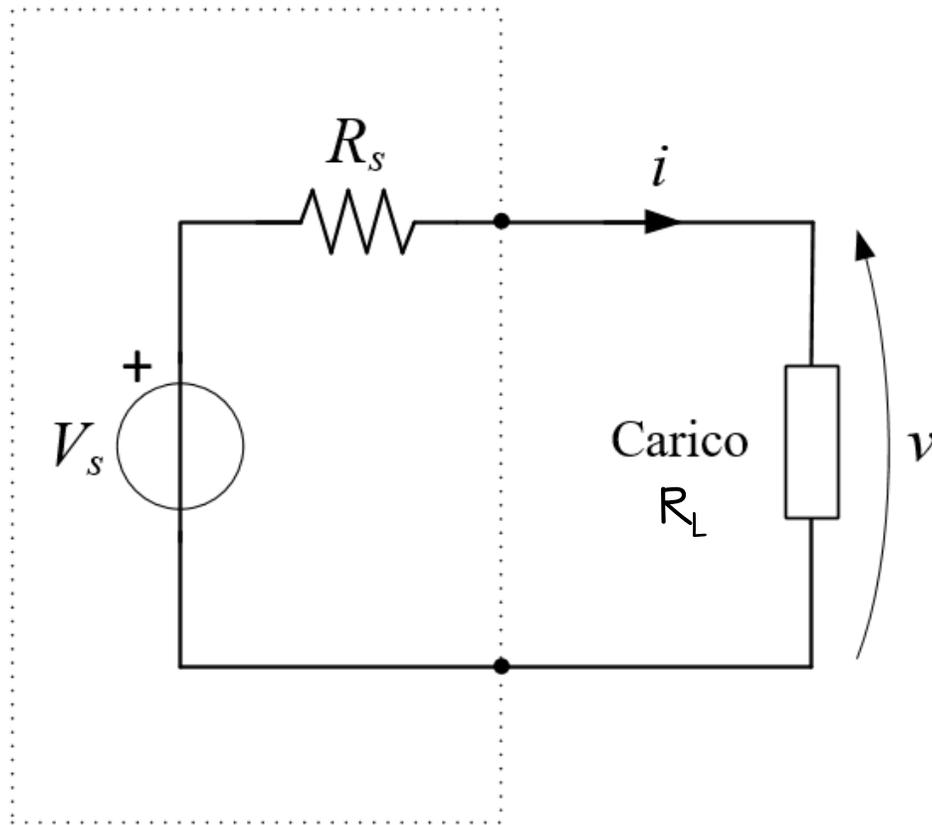


V_s – tensione a vuoto

V_s/R_s – corrente di corto circuito

TEOREMA DELLA MASSIMA POTENZA

P_{\max} – potenza disponibile



$$P_{\max} = \frac{v_s^2}{4R_s}$$

$$\eta = \frac{R_L}{R_L + R_s}$$