

PRODOTTO FRA SOTTOGRUPPI (22)

Def. Siano $H, K \leq G$ definiamo

$$HK = \{hk \mid h \in H \text{ e } k \in K\}$$

Proposizione $HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$

Dim per esercizio

Corollario $H \triangleleft G, K \leq G \Rightarrow HK \leq G$

Esercizio $H \triangleleft G, K \triangleleft G \Rightarrow HK \triangleleft G$

[è utile stimare la cardinalità del sottoinsieme HK (anche quando non è un sottogruppo)]

Def $H, K \leq G$ $x \in G$ definiamo

$$HxK = \{hxk \mid h \in H, k \in K\}$$

laterale doppio di x rispetto ad H e K

oss Siano $H, K \leq G$ $x, y \in G$

1) $y \in HxK \Leftrightarrow HxK = HyK$

2) $HxK \cap HyK \neq \emptyset \Rightarrow HxK = HyK$

3) $G = \bigcup_{x \in K} HxK$

4) $H \rtimes K$ è unione di $|K| \cdot (K \cap H^g)$ laterali destri di H (analogo per laterali sin di K)

Dim: 1) osserviamo $g = 1 \cdot g \cdot 1 \in HgK$
 quindi $H \rtimes K = HgK \Rightarrow g \in H \rtimes K$

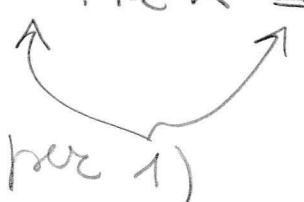
Supponiamo $g \in H \rtimes K$

allora $\exists h \in H, k \in K$ tale che $g = h \rtimes k$

$$HgK = H(h \rtimes k)K = (Hh) \rtimes (kK) = H \rtimes K$$

2) $H \rtimes K \cap HgK \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in H \rtimes K \cap HgK$

$$\Rightarrow H \rtimes K = HzK = HgK$$



3) ovvio 

$$4) \quad H \propto K = \bigcup_{k \in K} Hnk$$

HnK è unione di laterali destri di H

[cerchiamo di contarli]

Sia $\phi: K \longrightarrow \{Hnk \mid k \in K\}$

$$k \longrightarrow Hnk$$

- ϕ è suriettiva

- dato $\sim_\phi$ relazione di equivalenze
definite da $k_1 \sim_\phi k_2 \iff \phi(k_1) = \phi(k_2)$

abbiamo che:

$K/\sim_\phi$ è in biiezione con $\{Hnk \mid k \in K\}$

Inoltre osserviamo

$$k_1 \sim_\phi k_2 \iff \phi(k_1) = \phi(k_2) \iff Hnk_1 = Hnk_2 \iff$$

$$\iff \exists n k_1 k_2^{-1} n^{-1} = H \iff n k_1 k_2^{-1} n^{-1} \in H$$

$$\iff k_1 k_2^{-1} \in n^{-1} H n = H^n$$

$$\iff k_1 k_2^{-1} \in H^n \cap K$$

Le classi di equivalenza di $\sim \phi$ in K sono
i laterali destri di $H^\pi \cap K$ in K cioè

$$\text{card} \{ H^\pi k \mid k \in K \} = |K : (H^\pi \cap K)| \quad \square$$

Osservazione $2) + 3) \Rightarrow$ i laterali doppi
danno una partizione di G

Proposizione Siano $H, K \leq G$ con $|G:H| < \infty$

allora

$$|G:H| = \sum_{\pi \in X} |K : K \cap H^\pi|$$

dove X contiene esattamente un elemento
per ogni laterale doppio di H e K

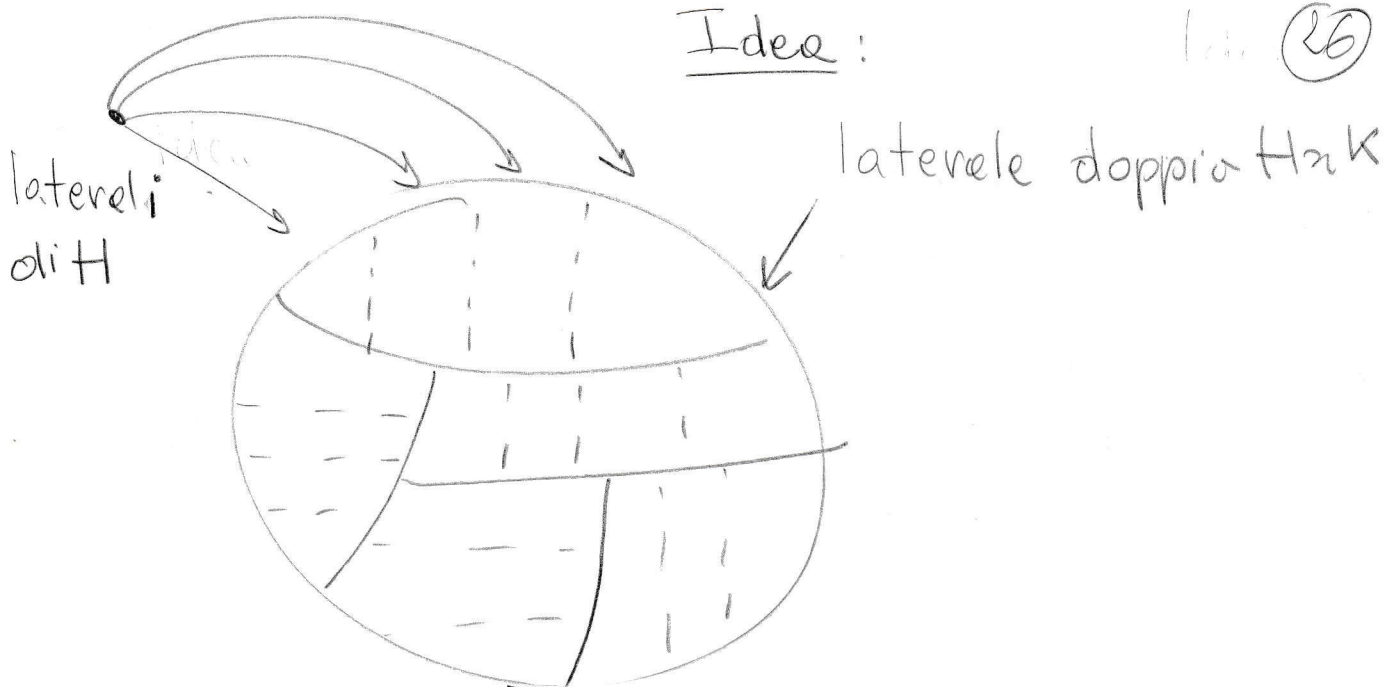
Dim $|G:H| = \text{card} \{ \text{laterali destri di } H \}$

$$= \sum_{\pi \in X} \{ \text{laterali destri di } H \text{ in } H^\pi K \}$$

$$= \sum_{\pi \in X} |K : K \cap H^\pi|$$

Idea:

1. (26)



[sembra risultato tecnico ma lo utilizziamo
per dimostrare il seguente risultato]

Prop $H, K \leq G$ H, K di ordine finito

$$|HK| = \frac{|K| |K|}{|H \cap K|}$$

Dim: $HK = H \triangleleft K$ è un laterale doppio

$$HK = \bigcup Hx_k$$

↗ $x_k \in K$ ↖ laterali destri di H
Unione disgiunta

$$\text{card} \{ Hk \mid k \in K \} = |K : K \cap H| = |K : K \cap H|$$

$$|HK| = |H| \quad |K : K \cap H| = |H| \frac{|K|}{|K \cap H|} \quad \square$$

cardinalità
dei laterali

Teorema
di Lagrange

Esempi: 1) $D_{2n} = \left\{ R_{\frac{k \cdot 2\pi}{n}} \mid k=0, \dots, n-1 \right\}$ (rotazioni)
 $\cup \left\{ t_i \mid i=1, \dots, n \right\}$ (riflessioni)

definiamo

$$H = \left\{ R_{k \cdot 2\pi} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sottogruppo delle rotazioni} \\ \text{è un sottogruppo di ordine } n \end{array}$$

$$K_1 = \left\{ \text{Id}, t_1 \right\} \quad \begin{array}{l} \text{è un sottogruppo di ordine 2} \\ \text{una riflessione} \end{array}$$

$$H \triangleleft D_{2n} \quad (\text{perché ha indice 2})$$

K_1 non è normale

(28)

$$|HK_1| = \frac{|K| |K_1|}{|H \cap K_1|} = \frac{2m}{1} = 2m = |D_{2m}| \Rightarrow$$

$\Rightarrow HK_1 = D_{2m}$, HK_1 è un gruppo

Osserviamo che ogni elemento di D_{2m} è del tipo

$$Id \circ R_K \frac{2\pi}{m} = R_K \frac{2\pi}{m} \quad \text{oppure} \quad t_1 \circ R_K \frac{2\pi}{m} \quad (t_1 \text{ riflessione fissata})$$

Consideriamo ora;

$$K_2 = \{Id, t_2\}$$

$$|K_1 K_2| = 4$$

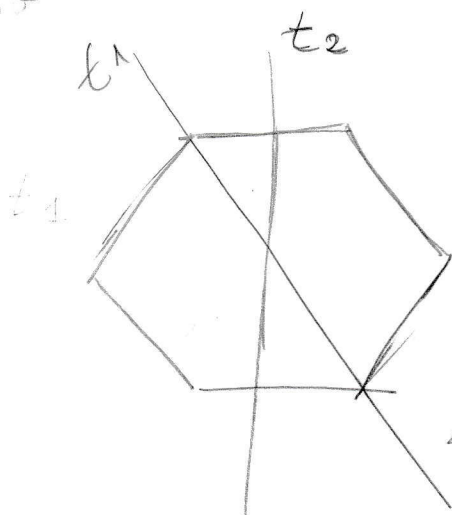
↗
altre riflessioni

$$K_1 K_2 = \{Id, t_1, t_2, t_1 t_2\}$$

$K_1 K_2$ non è in generale un sottogruppo

per esempio

in D_{12}



$$t_1 t_2 = R_{\pi/3} \text{ rotazione di } \pi/3$$

$$(R_{\pi/3})^2 = R_{2\pi/3} \neq K_1 K_2$$

asse di t_1

asse di t_2

Domande:

- i) Quando $\langle K_1 K_2 \rangle = ID_{2m}$?
- ii) esistono due riflessioni tali che $K_1 K_2$ è un sottogruppo ?

2) Consideriamo A_4 (gruppo alterno)

e $H \triangleleft A_4$ con $H = \{ Id, \text{prodotti di due trasp disgi.} \}$

Definiamo $K = \{ Id, (1,2,3), (1,3,2) \} \leq A_4$

$$|H| = 4 \quad |K| = 3 \Rightarrow |HK| = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow HK = A_4$$

Ogni elemento di A_4 può essere rappresentato come prodotto di un elemento di H con un elemento di K