OMOMORFISMI

Def. $f: G \to G'$ G, G' gruppi

è detto un omomorfismo (di gruppi)

se per ogni $x, y \in G$ abbiamo che

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

Osservazione 1) $f(1_G) = 1_{G'}$

2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

[Dimostrazione per esercizio]

Def $f: G \to G'$ f omomorfismo di gruppi

- se f iniettivo f si dice monomorfismo
- se f suriettivo f si dice epimorfismo
- se f biettivo f si dice isomorfismo
- se $G = G'$ e f biettivo f si dice automorfismo

Proposizione $f: G \to G'$ omom. di gruppi

Allora vale che

f isomorfismo $\Longleftrightarrow$ esiste $f^{-1}: G' \to G$ omom

t.c $f \circ f^{-1} = Id_{G'}$ $f^{-1} \circ f = Id_G$

[f rispetta la struttura e f biettiva $\Rightarrow$ f^{-1} rispetta la struttura]

non è sempre vero, quando non succede?

Dim per esercizio

Def Dati due gruppi G e G', se esiste $f: G \to G'$ isomorfismo allora G e G' sono detti isomorfi

Proposizione se $f: G \to G'$, $h: G' \to G''$ omomorfismi allora $h \circ f: G \to G''$ è un omomorfismo

Dim per eserc.

Def $f: G \to G'$ omomorfismo definiamo

$\ker f = \{ g \in G \mid f(g) = 1_{G'} \}$

Proposizione 1) $\ker f \triangleleft G$ 2) f monom. $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{1_G\}$

Dim per eserc.

Esempi

1) Si considerino $H \lhd G$ e $\pi : G \to G/H$ t.c $\pi(g) = gH$ (proiezione canonica)

allore $\ker \pi = H$

2) Sia $GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ← come operazione si considera la moltiplicazione

$$A \longrightarrow \det A$$

Per il teorema di Binet abbiamo che $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) \Rightarrow \det$ è omom. di gruppi

$$\ker \det = SL(n, \mathbb{R}) \lhd GL(n, \mathbb{R})$$

3) A gruppo abeliano, n intero e $f : A \to A$ t.c $f(x) = x^n$

$$f(xy) = (xy)^n = x^n y^n = f(x) f(y)$$

A è abeliano

$\Rightarrow$ otteniamo f omomorfismo

4) G gruppo $g \in G$

Sia $\gamma_g : G \longrightarrow G$

$$h \longrightarrow h^g$$

Osserviamo che γ_g omomorfismo

$$\gamma_g(hk) = g^{-1}hkg = g^{-1}hg\,g^{-1}kg$$

$$= h^g k^g = \gamma_g(h)\,\gamma_g(k)$$

Inoltre $\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g = Id_G$

per cui γ_g è un automorfismo

I γ_g vengono detti <u>automorfismi</u> <u>interni</u>

<u>Osservazione</u>, definiamo

$$Aut(G) \overset{def}{=} \{ f : G \longrightarrow G \mid f \text{ autom.} \}$$

con l'operazione $fg \overset{def}{=} g \circ f$

senza pallino

con pallino = composizione di applicazioni

[è un operazione diversa del solito in cui si inverte l'ordine dei fattori infatti i gruppisti scrivono a volte $(x)fg$ per $g \circ f(x)$ noi scriveremo $fg(x)$ applicando prima f]

- $Aut(G)$ <u>con questa operazione è un gruppo</u>
- definiamo $Inn(G) \overset{def}{=} \{ \gamma_g \mid g \in G \} \subseteq Aut(G)$

▶ Dimostriamo che $Inn(G) \leq Aut(G)$:

1) $\gamma_{1_G} = Id_G \in Inn(G)$

2) $\gamma_{g\bar{g}} = (g\bar{g})^{-1} x g\bar{g} = \bar{g}^{-1} g^{-1} x g \bar{g} =$

$= \bar{g}^{-1} \gamma_g(x) \bar{g} = \gamma_{\bar{g}} \circ \gamma_g(x) = \gamma_g \gamma_{\bar{g}}(x)$

3) $(\gamma_g)^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$

▶ Dimostriamo che $Imm(G) \triangleleft Aut(G)$:

$\varphi \in Aut(G) \quad \gamma_g \in Inn(G)$

$\varphi^{-1} \gamma_g \varphi(x) = \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}(x) =$

$= \varphi(\gamma_g(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(g^{-1} \varphi^{-1}(x)\, g)$

$= \varphi(g^{-1})\ \varphi(\varphi^{-1}(x))\ \varphi(g)$

$= \varphi(g)^{-1}\ x\ \varphi(g) = \gamma_{\varphi(g)}(x) \in Imm(G)$

$\dfrac{Aut(G)}{Imm(G)}$ si chiame $Out(G)$ "the outer automorphism group" e viene molto studiato in teorie dei gruppi

Probleme: caretterizzare $Aut(C)$ quando C è ciclico