

PRIMO TEOREMA DI ISOMORFISMO

35

E CONSEGUENZE

Teorema di isomorfismo

Sia $f: G \rightarrow G'$ omomorfismo di gruppi,

dati: $\pi: G \rightarrow G/\ker f$ $\pi(g) = g \ker f$

e $\bar{f}: G/\ker f \rightarrow G'$ $\bar{f}(g \ker f) = f(g)$

abbiamo che $\bar{f}$ è ben definito, π e $\bar{f}$ sono omomorfismi, $\bar{f}$ è iniettivo e il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & G/\ker f & \end{array}$$

dim per esercizio

Corollario 1 $\frac{G}{\ker f} \cong f(G)$ [$\cong$ isomorfi]

Corollario 2 Sia $f: G \rightarrow G'$ omom. di gruppi
e $H \triangleleft G$, sia $\pi: G \rightarrow G/H$ proiezione canonica
allora esiste $\bar{f}$ tale che $\bar{f} \circ \pi = f$

Se e solo se $N \subseteq \text{Ker } f$.

In questo caso $f(G) \cong \frac{G/N}{\text{Ker } f/N}$

[questo ci dice che $f: G \rightarrow G'$ induce un omom. su un quoziente G/N se e solo se $N \subseteq \text{Ker } f$]

Dimostrazione Corollario 2

Se esiste come è fatto $\bar{f}$?

$$\bar{f}(gN) = \bar{f}(\pi(g)) = f(g)$$

[se esiste $\bar{f}$ è unico]

Quindi definiamo $\bar{f}(gN) = f(g)$

" $\Leftarrow$ " bisogna far vedere che $\bar{f}$ è ben definita
il resto segue facilmente

$gN = g'N \Rightarrow$ esiste $m \in N$ tale che $g = g'm$

$$\bar{f}(gN) = f(g) = f(g'm) = f(g') \underbrace{f(m)}_{\substack{1_{G'} \\ \text{perché} \\ N \subseteq \text{Ker } f}} = f(g') = \bar{f}(g'N)$$

quindi $\bar{f}$ è ben definita

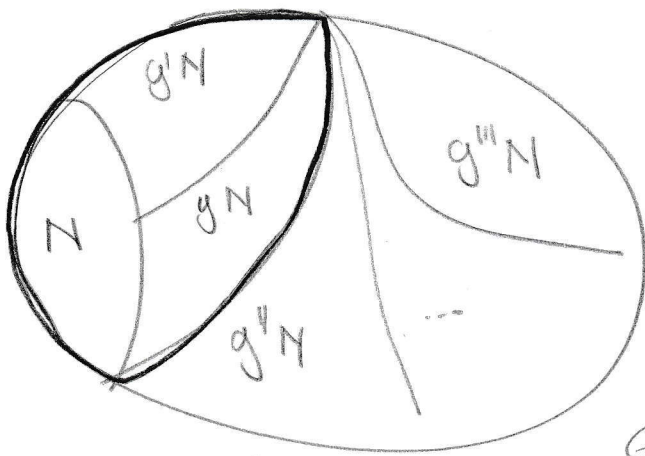
" $\Rightarrow$ " esiste $\bar{f}$ con quelle proprietà e sia $g \in N$ allora

$$1_G = \bar{f}(N) = \bar{f}(gN) = \bar{f}(\pi(g)) = f(g) \Rightarrow g \in \ker f$$

Questo conclude la prima parte

Dimostrazione seconda parte:

$$\begin{aligned} \ker \bar{f} &= \{gN \mid \bar{f}(gN) = 1_G\} = \{gN \mid f(g) = 1_G\} = \\ &= \{gN \mid g \in \ker f\} = \frac{\ker f}{N} \end{aligned}$$



$$f(G) = \bar{f}(G) \cong \frac{G/N}{\ker \bar{f}} = \frac{G/N}{\ker f / N}$$

direttamente
dalla definizione

Il teorema
di isomorfismo



Corollario 3 : Siano G gruppo, $N \triangleleft G$ e $N' \triangleleft G$
con $N' \subseteq N$ allora

$$\frac{G}{N} \cong \frac{\frac{G}{N'}}{\frac{N}{N'}}$$

Esempi 1) C ciclico di ordine n

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow C = \langle g \rangle \text{ con } \varphi(k) = g^k$$

Sappiamo che $g^k = 1_G \Leftrightarrow n \mid k$

quindi $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$ (multipli di n) e $C \cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$

1° teor. di isom.

$$2) \varphi: G \rightarrow \text{Inn } G$$

$$g \mapsto \Delta g$$

φ omom. di gruppi in fatti

$$\begin{aligned} \varphi(gg')(x) &= \Delta_{gg'}(x) = (gg')^{-1}x(gg') = (g')^{-1}g^{-1}xgg' \\ &= \Delta_{g'}(\Delta_g(x)) = \Delta_{g'} \circ \Delta_g(x) = \\ &= \Delta_g \Delta_{g'}(x) = \varphi(g)\varphi(g')(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ker } \varphi &= \{g \in G \mid \Delta_g = \text{Id}\} = \{g \in G \mid x^g = x \forall x \in G\} \\
&= \{g \in G \mid g^{-1}xg = x \forall x \in G\} = \\
&= \{g \in G \mid xg = gx \forall x \in G\} = Z(G)
\end{aligned}$$

I teor. di isom. $\Rightarrow \frac{G}{Z(G)} \cong \text{Inn}(G)$

Esercizio : $f: G \rightarrow G' \quad H \leq G$

$$f^{-1}(f(H)) = H \text{ Ker } f$$

Corollario 4 Sia $f: G \rightarrow G'$ omomorfismo

Esiste una biezione

$$\varphi: \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G \\ \text{contenenti Ker } f \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sottogruppi di } G' \\ \text{contenuti in } f(G) \end{array} \right\}$$

con $\varphi(H) = f(H)$

Consideriamo $K, H \leq G$ con $\text{Ker } f \leq K, H$ allora :

$$1) \quad K \leq H \iff \varphi(K) \leq \varphi(H)$$

$$\text{Se } K \leq H \text{ allora } |H:K| = |\varphi(H):\varphi(K)|$$

$$2) K \triangleleft H \iff \varphi(K) \triangleleft \varphi(H)$$

$$\text{se } K \triangleleft H \text{ allora } \frac{H}{K} \cong \frac{\varphi(K)}{\varphi(H)}$$

$$(\text{caso particolare } K \triangleleft G \iff \varphi(K) \triangleleft \varphi(G))$$

$$3) H, K \text{ sono coniugati in } G \iff \varphi(H), \varphi(K) \text{ sono coniugati in } \varphi(G)$$

Dim i punti più importanti sono

- se $H \leq G$ allora $\varphi(H) \leq \varphi(G)$
 $\left[\begin{array}{l} \text{immagine di un sottogruppo} \\ \text{è un sottogruppo} \end{array} \right]$
- $\varphi^{-1}: \{H \mid H \leq \varphi(G)\} \rightarrow \{H \mid \ker \varphi \leq H \leq G\}$
 $\varphi^{-1}(H) = \varphi^{-1}(H)$
- se $H \leq \varphi(G)$ allora $\varphi(\varphi^{-1}(H)) = H$
 $\left[\begin{array}{l} \text{è importante } H \leq \varphi(G) \end{array} \right]$

risoluzione completa per esercizio

(41)

Caso particolare: $H \triangleleft G, \pi: G \rightarrow G/H$ (proiezione canonica
(che è suriettiva))

esiste una biiezione

$$\varphi: \{\text{sottogruppi di } G \text{ contenenti } H\} \rightarrow \{\text{sottogruppi di } G/H\}$$

$$\text{con } \varphi(K) = K/H$$

Applicazione: Chi sono i sottogruppi di $\mathbb{Z}_m$?

Sappiamo che

$$1) \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m \quad 2) H \leq \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } H = m\mathbb{Z}$$

Abbiamo una biiezione

$$\{\text{sottogruppi di } \mathbb{Z} \text{ contenenti } m\mathbb{Z}\} \leftrightarrow \{\text{sottogruppi di } \mathbb{Z}_m\}$$

$$H \leftrightarrow H/m\mathbb{Z}$$

Osserviamo che $m\mathbb{Z} \supseteq n\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid n$

per cui

$$\{\text{sottogruppi di } \mathbb{Z}_m\} = \left\{ \frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \mid m \text{ divisori di } m \right\}$$

Inoltre:

- $\frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ è un gruppo ciclico generato

$$\text{da } m + n\mathbb{Z}$$

- l'ordine di $m + n\mathbb{Z}$ è $\frac{m}{n}$

Possiamo concludere che:

per ogni divisore d di n esiste un sottogruppo ciclico di ordine d infatti

$$\frac{\frac{n}{d}\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \text{ ha ordine } d \left(\frac{\frac{n}{d}}{\frac{n}{d}} = d \right)$$

[Per i gruppi ciclici si inverte il teorema di Lagrange, è vero in generale?]