GRUPPI SIMMETRICI

$S_n = \Sigma(\{1,\dots,n\})$ agisce su $\{1,\dots,n\}$

Def $\alpha \in S_n$ si dice un *ciclo* se $\langle\alpha\rangle$ ha un'unica orbita non banale (i.e. un orbita con più di un elemento)

Esercizio

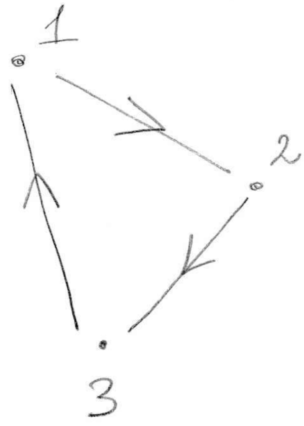
$$O_{\langle\alpha\rangle}(i) = \{i, \alpha(i), \alpha^2(i), \dots, \alpha^k(i)\}$$

dove k t.c. $\alpha^{k+1}(i) = i$ e $\alpha^t(i) \neq i$ per $0 < t \leq k$

(di solito invece di $O_{\langle\alpha\rangle}(i)$ si scrive $O_\alpha(i)$)

Esempio : in S_6

τ:
$1 \to 2$
$2 \to 3$
$3 \to 1$
$4 \to 6$
$5 \to 5$
$6 \to 4$



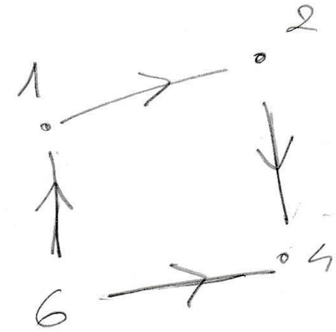
$O_\tau(1) = O_\tau(2) = O_\tau(3) = \{1,2,3\}$

$O_\tau(4) = O_\tau(6) = \{4,6\}$

$O_\tau(5) = \{5\}$

3 orbite (le orbite formano una partizione)

σ : $1 \longrightarrow 2$
$2 \longrightarrow 4$
$3 \longrightarrow 3$
$4 \longrightarrow 6$
$5 \longrightarrow 5$
$6 \longrightarrow 1$



$O_\sigma(1) = O_\sigma(2) = O_\sigma(4) = O_\sigma(6) =$
$= \{1,2,4,6\}$

<u>osservazioni</u>: 3 orbite di cui solo una non banale $\Rightarrow$ σ è un ciclo. σ si rappresenta con $(1,2,3,4)$

$O_\sigma(3) = \{3\}$

$O_\sigma(5) = \{5\}$

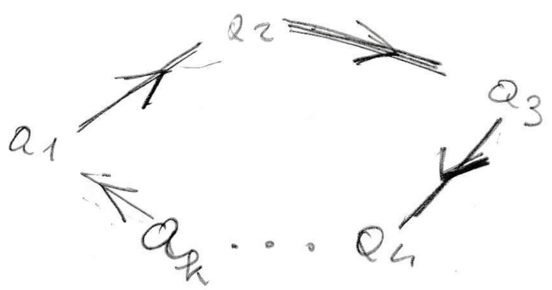
Come si rappresenta un ciclo in S_n:

Sia $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ (con $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$)

definiamo $(a_1, \dots, a_k)$ il ciclo tale che

$$(a_1, \dots, a_k)(x) = \begin{cases} a_{i+1} & \text{se } x = a_i \text{ con } i = 1, \dots, k-1 \\ a_1 & \text{se } x = a_k \\ x & \text{se } x \notin \{a_1, \dots, a_k\} \end{cases}$$

<u>Orbite</u>:



$x \neq a_i$

k si dice la lunghezza del ciclo

Definizione: due cicli $(a_1,\dots,a_k)$ e $(b_1,\dots,b_h)$ sono *disgiunti* se

$$\{a_1,\dots,a_k\}\cap\{b_1,\dots,b_h\}=\emptyset$$

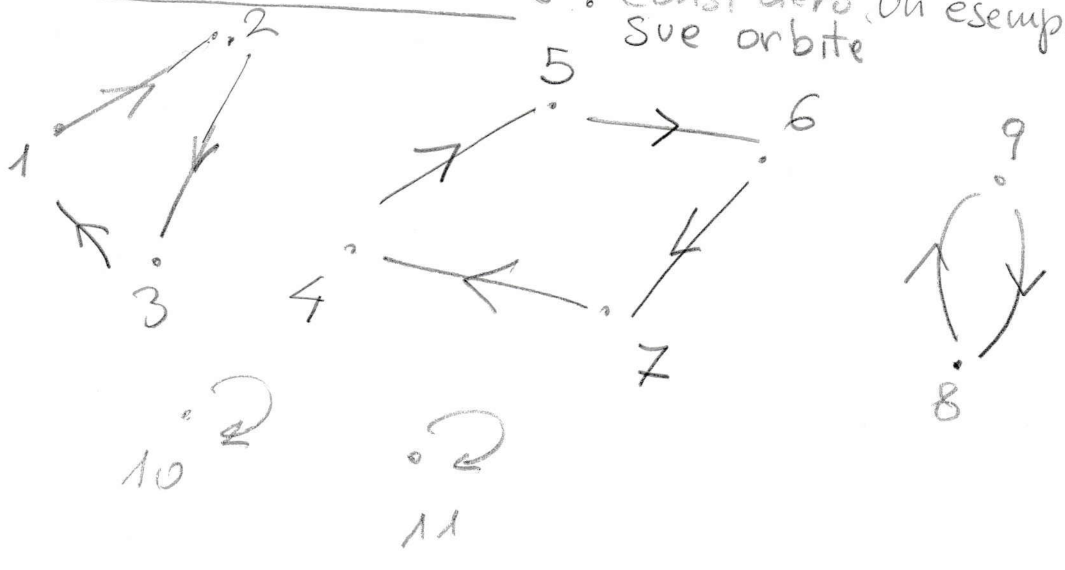
(le orbite non banali sono disgiunte)

Esercizio cicli disgiunti commutano

Teorema: Ogni permutazione non banale è prodotto di cicli disgiunti. La scomposizione è unica a meno di riordinamenti

Idea della dimostrazione: considero un esempio e le sue orbite

τ :



ogni orbita non banale individua uno dei cicli della scomposizione

$$\tau=(1,2,3)\,(4,5,6,7)\,(8,9)$$

Esempio $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & 4 & 5 & 6 & \boxed{7} & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 3 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$\tau = (1,4,8,10)(2,7,3)(5,6)$

Def Sia $\tau = \tau_1 \dots \tau_m$ con $\tau_1, \dots, \tau_m$ cicli disgiunti e e_i lunghezza di τ_i

Possiamo supporre $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_m$

allora la m-pla $(e_1, e_2, \dots, e_m)$

si dice il tipo di τ

Def Sia $\tau \in S_n$ di tipo $(e_1, e_2, \dots, e_m)$

definiamo

$$\operatorname{sgn} \tau \overset{def}{=} (-1)^{\sum_{i=1}^{m} (e_i - 1)} = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{m} e_i\right) - m}$$

il segno di τ

Osservazione
- sgn è ben definito perché le scomposizione è unica
- $\operatorname{sgn}(a_1, \dots, a_k) = (-1)^{k-1}$

Proposizione: $\operatorname{sgn} : S_n \longrightarrow \{+1, -1\}$ è un omomorfismo di gruppi

Dim. omessa

Def Se $\operatorname{sgn} \tau = +1$, τ si dice pari

Se $\operatorname{sgn} \tau = -1$, τ si dice dispari

<u>Def.</u> Definiamo $A_n \overset{def}{=} \operatorname{Ker} \operatorname{sgn}$ il gruppo <u>alternante</u> su n oggetti

<u>Osservazione</u>; $A_n \triangleleft S_n$ e $[S_n : A_n] = 2$ [Perché?]

<u>Def</u>: un ciclo di lunghezza 2 si dice <u>trasposizione</u>

<u>Proposizione</u>: $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_n)$

$$= (a_1, a_k) \circ (a_1, a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1, a_2)$$

<u>Teorema</u>: Ogni permutazione è prodotto di trasposizioni i.e. $S_n = \langle \{\text{trasposizioni}\} \rangle$

<u>Dim</u>: scomposizione in cicli + proposizione precedente

<u>Domanda</u>: la scomposizione in trasposizioni è unica? se σ ha due rappresentazioni come prodotto di trasposizioni, cosa hanno in comune?

CLASSI DI CONIUGIO

G agisce su se stesso tramite coniugio

$$G \longrightarrow \Sigma(G)$$
$$g \longrightarrow \delta_g$$

dove $\delta_g(h) = h^g$

Le orbite di queste azione si dicono <u>classi di coniugio</u>

Due elementi che stanno nella stessa classe coniugio si dicono <u>coniugati</u>

[d'ora in poi consideremo questa azione]

<u>Oss</u>: $\boxed{x \in O_G(z) \Longleftrightarrow \exists g \in G \text{ t.c. } \delta_g(z) = z^g = x}$

si dice che x e z sono coniugati tramite g

Se G è finito

$$|O_G(z)| = \frac{|G|}{|stab_G(z)|} = \frac{|G|}{|C_G(z)|}$$

$$stab_G(z) = \{g \in G \text{ t.c. } \delta_g(z) = z\} = \{g \in G \text{ t.c. } g^{-1}zg = z\}$$

$$= \{g \in G \text{ t.c. } zg = gz\} = C_G(z)$$

Equazione delle classi: (dalla formula per le orbite)

$$|G| = \sum_{z_i \in \Gamma} |O_G(z_i)| = \sum_{z_i \in \Gamma} \frac{|G|}{|C_G(z_i)|}$$

dove Γ contiene esattamente un elemento per ogni classe di coniugio

Osservazione: $z_i \in Z(G) \Leftrightarrow O_G(z_i) = \{z_i\}$

Possiamo modificare l'eq. delle classi:

$$|G| = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{elementi nel centro}} + \sum_{z_i \in \Gamma'} \frac{|G|}{|C_G(z_i)|} = |Z(G)| + \sum_{z_i \in \Gamma'} \frac{|G|}{|C_G(z_i)|}$$

dove Γ' contiene esattamente 1 elemento per ogni classe di coniugio con più di 2 elementi

(61)

<u>Esercizio</u> 1) $f: G \to G'$ $g \in G$ di ordine finito

$\Longrightarrow |f(g)| \setminus |g|$

Se f è un isomorfismo $|f(g)| = |g|$

<u>Osservazione</u>: due elementi nella stessa classe di coniugio hanno lo stesso ordine

<u>Problema</u>: caratterizzare le classi di coniugio di S_n

[suggerimento: rivedere quello che abbiamo fatto per A_4]

Coniugati di sottogruppi

G agisce per coniugio anche sull'insieme dei sottogruppi di G

$$\rho : G \longrightarrow \Sigma\{\text{sottogruppi di } G\}$$
$$g \longrightarrow \rho(g)(H) = H^g$$

Due sottogruppi nella stessa orbita si dicono <u>coniugati</u>

[Come sono fatte le orbite?]

nel caso finito

$$|O_G(H)| = |G : stab_G H| = \frac{|G|}{|N_G(H)|}$$

perchè

$$stab_G H = \{g \in G \mid H^g = H\} = N_G(H)$$

<u>Proposizione</u> se G è finito, il numero di coniugati di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo