PRODOTTI SEMIDIRETTI

Def Siano G e H due gruppi
Se esiste $\varphi : G \longrightarrow Aut(H)$ omomorfismo allora si dice che G agisce sul gruppo H e φ è l'azione di G sul gruppo H

[Attenzione: prima parlavamo di azioni su insiemi (anche se l'insieme era un gruppo]

Esempi 1) $\rho : G \longrightarrow \Sigma(G)$

$$g \longrightarrow \rho(g)(h) = hg$$

l'azione che dà il teorema di Cayley

$\rho(g)$ è una biezione ma se $g \neq 1_G$ non è un automorfismo perchè $\rho(g)(1_G) = g \neq 1_G$

In questo caso G agisce su G come insieme ma non come gruppo.

2) $$\gamma : G \longrightarrow \Sigma(G)$$
$$g \longrightarrow \gamma_g(h) = h^g$$

in questo caso $\gamma_g \in Aut(G)$

G agisce sul gruppo G per coniugio

Proposizione: Sia $\varphi : G \to Aut(H)$ azione di G sul gruppo H

Definiamo in $G \times H$ la seguente operazione

$$(g,h)(g',h') = (gg', \varphi(g')(h)\, h')$$

1) Con questa operazione $G \times H$ è un gruppo

2) $\lambda : G \longrightarrow G \times H$ e $\eta : H \longrightarrow G \times H$
$\quad g \longrightarrow (g, 1_H) \qquad\qquad h \longrightarrow (1_G, h)$

Sono monomorfismi (quindi $G \cong \lambda(G) \leq G \times H$ e $H \cong \eta(H) \leq G \times H$)

3) $G \times H = \underbrace{\lambda(G)\,\eta(H)}_{\text{prodotto di sottogruppi}}$ $\quad \eta(H) \trianglelefteq G \times H$

e $\lambda(G)\cap\eta(H)=\{(1_G,1_H)\}=\{1_{G\times H}\}$ (8.

4) $\lambda(g)^{-1}\eta(h)\lambda(g)=\eta(\varphi(g)(h))$

[l'azione di $\lambda(g)$ su $\eta(H)$ per coniugio
è la "stessa" che l'azione di G su H]

Dimostrazione: · l'operazione è interna

· associatività

$$((g,h)(g',h'))(g'',h'')=(gg',\varphi(g')(h)h')(g'',h'')$$

$$=(gg'g'',\varphi(g'')(\varphi(g')(h)\cdot h')\cdot h'')$$

$$=(gg'g'',\varphi(g'')\circ\varphi(g')(h)\cdot\varphi(g'')(h')\cdot h'')$$

$$=(gg'g'',\underbrace{(\varphi(g')\varphi(g''))}_{\text{prodotto in } Aut(H)}(h)\cdot\varphi(g'')(h')\, h'')$$

$$=(gg'g'',\varphi(g'g'')(h)\cdot\varphi(g'')(h')\cdot h'')$$

$$=(g,h)\cdot(g'g'',\varphi(g'')(h')\,h'')$$

$$=(g,h)((g',h')(g'',h''))$$

l'elemento neutro è $(1_G, 1_H)$

$$(1_G, 1_H)(g, h) = (1_G g, \underbrace{\varphi(g)(1_H)}_{1_H} \cdot h) = (g, h)$$

$$(g, h)(1_G, 1_H) = (g 1_G), \underbrace{\varphi(1_G)}_{Id_H}(h) \cdot 1_H) = (g, h)$$

l'elemento inverso di (g, h) è $(g^{-1}, \varphi(g^{-1}) h^{-1})$

$$\left[(g, h)^{-1} = (g^{-1}, \varphi(g^{-1})(h^{-1}) \right.$$

$$(g, h)(g^{-1}, \varphi(g^{-1})(h^{-1})) = (gg^{-1}, \varphi(g^{-1})(h) \cdot \varphi(g^{-1})(h^{-1}))$$

$$= (gg^{-1}, \varphi(g^{-1})(h) \underbrace{(\varphi(g^{-1})(h))^{-1}}_{\text{perché } \varphi(g^{-1}) \text{ autom}})$$

$$= (1_G, 1_H)$$

$$(g^{-1}, \varphi(g^{-1})(h^{-1}))(g, h) = (g^{-1}g, \varphi(g)(\varphi(g^{-1})(h^{-1}))h)$$

$$= (g^{-1}g, \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1})(h^{-1})h)$$

$$= (1_G, \varphi(g^{-1})\varphi(g)(h^{-1})h)$$

$$= (1_G, \varphi(g^{-1}g)(h^{-1})h$$

$$= \Big(1_G, \underbrace{\varphi(1_G)}_{= Id_H}(h^{-1}), h\Big)$$

$$= (1_G, h^{-1}h) = (1_G, 1_H)$$

▲

2) Per esercizio ▲

3) vale che: $(g\,h) = (g, 1_H)(1_G, h)$ da cui

si ricava $G \times H = \delta(G)\,\eta(H)$

Le altre verifiche per esercizio ▲

4) $\delta(g)^{-1}\eta(h)\,\delta(g) = (g\,1_H)^{-1}\underbrace{(1_G, h)\,(g, 1_H)}$

$= (g^{-1}, \varphi(g^{-1})(1_H))\,(1_G\,g, \varphi(g)(h)\cdot 1_H)$

$= (g^{-1}, 1_H)\,(g, \varphi(g)(h)) = (g^{-1}g, \varphi(g)(1_H)\,\varphi(g)(h))$

$= (1_G, \varphi(g)(h)) = \eta(\varphi(g)(h))$

$\boxed{\not\equiv}$

<u>Def</u> $G \times H$ con questo prodotto viene indicato con $G \ltimes_\varphi H$ (o $G \ltimes H$) e viene detto <u>prodotto semidiretto</u> di G e H rispetto all'azione φ.
[a volte si parla di prodotto semidiretto esterno]

<u>Def</u> Sia G un gruppo $H, K \leq G$

Se i) $H \triangleleft G$ ii) $G = HK$ iii) $H \cap H = \{1_G\}$

allora G si dice prodotto semidiretto (interno) di H e K e si indica $G = K \ltimes H$

[Questi due concetti coincidono]

<u>Osservazione 1</u> Dalla proposizione precedente si può ricavare che se $\varphi : G \to \mathrm{Aut} H$ azione di G sul gruppo H allora

$$G \ltimes_\varphi H = \delta(G) \ltimes \eta(H)$$

prodotto semidiretto interno

<u>Osservazione 2</u> Sia $G = K \ltimes H$ prodotto semidiretto interno, definiamo quindi

$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Aut} H$$
$$x \longrightarrow \varphi(x)(y) = y^x \quad [\text{ricordo } H \triangleleft G]$$

Allora $G \cong K \ltimes_\varphi H$ (prodotto semidiretto esterno)

Dimostrazione Oss 2

$$K \ltimes_{\varphi} H \xrightarrow{f} G$$

$$(x, y) \longrightarrow x\,y$$ prodotto in G

i) f è un omomorfismo

$$f((x,y)(x',y')) = f(xx', \varphi(x')(y)\,y')$$

$$= f(xx', y^{x'}y') = xx'\,y^{x'}y'$$

$$= xy\,x'\,y' = f(x,y)\,f(x',y')$$

ii) f è suriettivo (deriva da $G = H \cdot K$)

iii) f è iniettivo Sia (x,y) t.c. $f(x,y) = xy = 1_G$

Quindi $x = y^{-1}$ con $x \in K$ e $y^{-1} \in H$

Otteniamo quindi $x \in K \cap H = \{1_G\}$

Infine $(x,y) = (1_G, 1_G)$

Esempi 1) $\mathbb{A}_4$

Considero $S_2 = \{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$S_3 = \langle (1,2,3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{A}_4 = S_3 \ltimes S_2$

Sottolineamo che parte aperta verso il normale (qualcuno fa la scelta inversa)

L'azione di S_3 per coniugio su S_2 permuta i 3 elementi di ordine 2

$\mathbb{A}_4 \cong \mathbb{Z}_3 \ltimes_{\varphi} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

azione che permuta i 3 elementi di ordine 2

2) Se $\varphi : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ è l'azione banale ($\varphi(g) = Id_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ per ogni $g \in \mathbb{Z}_3$)

allora

$\mathbb{Z}_3 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{\text{prodotto diretto}}$

[L'azione φ gioca un ruolo importante]

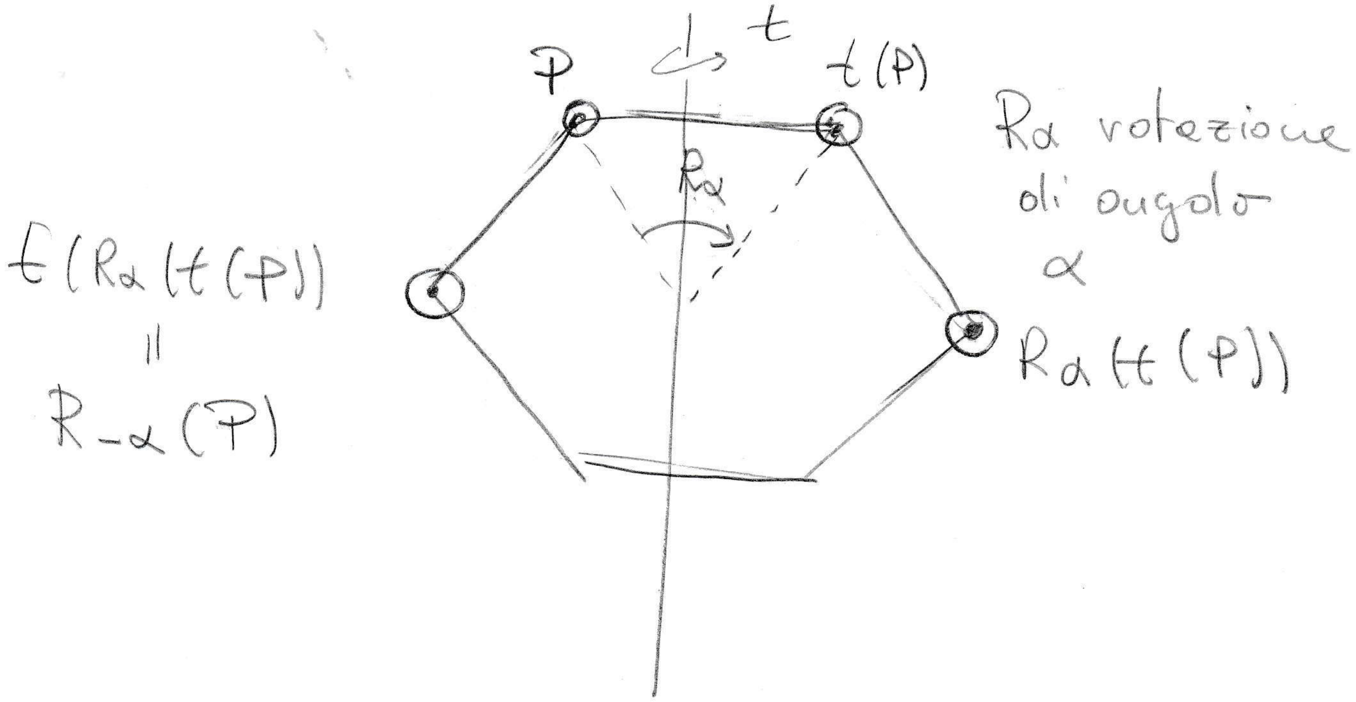
3.) Consideriamo $\mathbb{D}_{2n}$ e definiamo:

$$H = \{\text{rotazioni}\} \triangleleft \mathbb{D}_{2n}$$

$$K = \{Id, t\} \quad t \text{ una riflessione}$$

Allora

$$\mathbb{D}_{2n} = K \ltimes H$$



In generale si può ottenere che

$$t R_\alpha t = t R_\alpha t^{-1} = R_{-\alpha} = R_\alpha^{-1}$$

(Azione "diedrale")

$$\mathbb{D}_{2n} \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2 \quad \text{Dove } \varphi(t)(g) = g^{-1}$$

elemento di $\mathbb{Z}_n$

elemento di ordine 2 di $\mathbb{Z}_2$

<u>Osservazione</u> ricordo che se in $K \times H$ definisco l'operazione

$$(x,y)(x',y') = (xx', yy')$$

ottengo il prodotto diretto (esterno) fra sottogruppi

Se $\varphi: K \to Aut(H)$ è l'omomorfismo banale $K \ltimes_\varphi H = K \times H$

<u>Proposizione</u> Siano G gruppo, $K \leq G$ e $H \trianglelefteq G$ tali che $G = K \ltimes H$

Se $K \trianglelefteq G \Longrightarrow G \cong K \times H$

<u>Dim</u> Consideriamo $xyx^{-1}y^{-1}$ con $x \in K$ e $y \in H$

otteniamo $\underbrace{xyx^{-1}}_{\in H}\underbrace{y^{-1}}_{\in H} \in H$ e $\underbrace{x}_{\in K}\underbrace{yx^{-1}y^{-1}}_{\in K} \in K$

per cui $xyx^{-1}y^{-1} \in H \cap K = \{1_G\}$

da cui $xyx^{-1} = y$, l'azione per coniugio di K su H è banale $G \cong K \ltimes_\varphi H = K \times H$

azione banale

$\blacksquare$

Osservazione 1) se ho $H, K \triangleleft G$ tali che $H \cap K = \{1_G\}$ e $HK = G$ allora

$G \cong H \times K$ (G prodotto diretto interno di H e K)

2) Se $G = K \rtimes H$ prodotto semidiretto (interno) allora per ogni $g \in G$ posso esprimere $g = kh$ con $k \in K$ e $h \in H$ in un unico modo

Se G è finito allora $|G| = |K|\,|H|$

[Basta osservare che $G \cong K \rtimes_{\varphi} H$]

Problema Classificare i gruppi di ordine 51 e 14