Prodotto diretto: caso con più fattori

Caso esterno: H_i gruppo

$H_1 \times \dots \times H_n$ con l'operazione

$$(h_1, \dots, h_n)(k_1, \dots, k_n) = (h_1 k_1, \dots, h_n k_n)$$

è il prodotto diretto degli H_i.

Teorema (caso interno): G gruppo, $H_i \triangleleft G$ $i=1,\dots,n$ tali che $G = H_1 \cdot \ \cdot H_n$

Sono equivalenti

1) per ogni $i=1,\dots,n$ $H_1 H_2 \cdots H_{i-1} \cap H_i = \{1_G\}$

2) per ogni $g \in G$, $g \neq 1_G$ esistono unicamente determinate $h_i \in H_i$ t.c. $g = h_1 \cdots h_n$

3) Esiste $\varphi : G \longrightarrow H_1 \times \dots \times H_n$ isomorfismo tale che

$$\varphi(H_i) = \{(1_G, \dots, 1_G, h_i, 1_G, \dots, 1_G) \mid h_i \in H_i\}$$

Dimostrazione: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sia $g \in G$

$G = H_1 \cdot \ \cdot H_n \Rightarrow \exists\, h_i \in H_i$ tali che $g = h_1 \cdot \ \cdot h_n$

Supponiamo esista un'altra rappresentazione

$g = h_1 \dots h_n = h_1' \dots h_n'$ con $h_i' \in H_i$

Sia $u = h_1' \dots h_{n-1}'$

$$\underbrace{u^{-1} h_1 \cdots h_{n-1}}_{\in H_1 \cdots H_{n-1}} = h_n' h_n^{-1} \in H_n$$

$\Longrightarrow$

$$u^{-1} h_1 \cdots h_{n-1} = h_n' h_n^{-1} = 1_G$$

$\Longrightarrow$

$$h_n = h_n' \quad e \quad h_1 \cdots h_{n-1} = h_1' \cdots h_{n-1}'$$

Reiterando il processo $h_i = h_i'$

le altre implicazioni per esercizio

GRUPPI ABELIANI

FINITAMENTE GENERATI

In questa parte del corso G sarà un gruppo abeliano e useremo la notazione additiva

Def: X sottoinsieme di G si dice un sistema di generatori di G se $\langle X \rangle = G$

$$\left(\text{i.e. } G = \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x x \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_x \in \mathbb{Z} \\ \alpha_x \text{ quasi tutti nulli} \end{array} \right\} \right)$$

[$\alpha_x x$ è una potenza in notazione additiva]

Def $X \subseteq G$ sistema di generatori si dice una base di G se $\sum \alpha_x x = \sum \beta_x x$ con $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{Z}$ e α_x, β_x quasi tutti nulli implica $\alpha_x = \beta_x$ per ogni $x \in X$

Oss 1) se X è una base di G, ogni x ha un'unica rappresentazione del tipo $g = \sum_{\substack{x \in X \\ \alpha_x \text{ q.t.n.}}} \alpha_x x$

2) X sistema di gen. di G

$$X \text{ base di } G \iff \left(\sum_{\substack{x\in X \\ \alpha_x \text{ q.t.n.}}} \alpha_x x = 0 \implies \alpha_x = 0 \ \forall x \in X \right)$$

<u>Def</u> • Se G ha una base, G si dice <u>gruppo abeliano libero</u>

• Se G ha un sistema di generatori finito, G si dice <u>finitamente generato</u>

<u>Oss</u>: Un gruppo abeliano libero fin gen ha una base finita

[perchè se $g_1, \dots, g_n$ è un sist. di gen finito ogni g_i può essere rapp con un numero finito di elementi della base]

<u>Esempi</u> • $\mathbb{Z}$ è un gruppo ab. lib. fin. gen. le possibili basi sono $\{+1\}$ e $\{-1\}$

• $\mathbb{Z}_n$ è fin. gen. ma non è libero

Infatti se $x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq 0$ appartenesse ad una base $nx = 0$ lo zero avrebbe una rappresentazione non banale

<u>Oss</u>: (generalizzando) se G contiene elementi di ordine finito non può essere libero

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$ è un gr. ab. lib. fin. gen con base $\{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$

- G gr. ab. lib. fin. gen. con base $\{x_1, \dots, x_n\}$ esiste $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ isomorfismo

[baste definire $\varphi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$]

<u>Oss</u>: $\varphi : F \longrightarrow F'$ isomorfismo

Se F è un gr. ab. lib. con base $\{x_1, \dots, x_n\}$ allora F' è un gr ab. lib. con base $\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$

<u>Teorema</u> (<u>importante</u>) Sia F gr. ab. lib. con base X e G un gruppo abeliano

Sia $h : X \longrightarrow G$ un applicazione, allora esiste un unico $\varphi : F \to G$ omomorfismo tale che $\varphi(x) = h(x)$ per ogni $x \in X$

<u>Dim</u> per esercizio

[l'equivalente del teor. di determinazione di un'applicazione lineare su una base

<u>Oss</u>: F gruppo ab lib. Siano $\{y_1, \dots, y_n\}$ e $\{x_1, \dots, x_m\}$ basi di F, allora $n = m$

<u>Dim</u>: $2F = \{2y \mid y \in F\} \leq F$

Considero $\frac{F}{2F} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + 2F \mid \alpha_i = 0, 1 \right\}$

[così ho 1 rappresentante per laterale]

$\frac{F}{2F}$ ha 2^n elementi $\left(F/_{2F} \cong \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2 \right)$

Posso fare lo stesso ragionamento con l'altra base ottenendo $2^n = 2^m$ e $n = m$ $\blacksquare$

<u>Def</u>. Sia F gr. ab. lib. finit. gen. con base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Definiamo n il <u>rango</u> di F $(n = \operatorname{rank} F)$

[Il rango non dipende dalla base]

<u>Teor</u>. F gr. ab. l.b. fin. gen., $H \leq F$ e $H \neq \{0\}$
Allora H gr ab. l.b. fin. gen e $\operatorname{rank} H \leq \operatorname{rank} F$

Dim: per induzione su $n = \text{rank}\, F$

$\boxed{\text{Se } n=1}$ $F \cong \mathbb{Z}$

$H \leq \mathbb{Z} \implies H = m\mathbb{Z}$ e $\{m\}$ è una base di H

[notiamo che può succedere $H \leq F$, $\text{rank}\, H = \text{rank}\, F$ ma $H \neq F$]

$\boxed{\text{passo induttivo}}$ Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ base di F

Sia $F' = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ gruppo abeliano libero con una base di $n-1$ elementi

Se $H \leq F'$ per induzione otteniamo la tesi

Supponiamo quindi che H non sia contenuto in F'

Consideriamo

$H \cap F' \leq F'$, per ipotesi induttiva $H \cap F'$ ha una base

$\{y_1, \dots, y_k\}$ con $k \leq n-1$

Consideriamo

- $\dfrac{HF'}{F'}$ sottogruppo di $\dfrac{F}{F'} \cong \mathbb{Z}$; $\dfrac{HF'}{F'}$ non banale perchè $H \nsubseteq F'$
- $\dfrac{HF'}{F'}$ gruppo abeliano libero con rango 1 [per passo con $n=1$]

- Per II teorema di isomorfismo $\frac{HF'}{F'} \cong \frac{H}{H \cap F'}$

quindi $\frac{H}{H \cap F'}$ ha rango 1. Sia $\{y + H \cap F'\}$ base di $\frac{H}{H \cap F'}$

Claim: $\{y_1, \dots, y_k, y\}$ è una base di H (e $k+1 \leq n$)

è sist. di gen.: $h \in H \Rightarrow h + H \cap F' = my + H \cap F'$

$\Rightarrow h = my + h'$ con $h' \in H \cap F'$

$\Rightarrow h = my + m_1 y_1 + \dots + m_k y_k$

è una base: $my + m_1 y_1 + \dots + m_k y_k = 0$

$\Rightarrow my + H \cap F' = 0 + H \cap F' \Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow m_1 y_1 + \dots + m_k y_k = 0 \Rightarrow m_i = 0 \ \forall i$ $\boxtimes$

Oss: i sottogruppi di gruppi abeliani liberi sono liberi, quozienti di gruppi ab. lib. possono non essere liberi (esempio: $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$)