TEORIA DEI GRUPPI (RIPRESA)

Def. Sia G gruppo, un insieme $\{G_1, \ldots, G_{s+1}\}$ di sottogruppi di G tali che:

$$1 = G_{s+1} \triangleleft G_s \triangleleft G_{s-1} \triangleleft \cdots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 = G$$

si dice una serie subnormale

(subnormale viene usato nel Suzuki mentre Jacobson usa normale)

Osservazione G_i non è in generale normale in G

Esempio: consideriamo S_4 e la serie subnormale:

$$\underset{G_5}{\{Id\}} \triangleleft \underset{G_4}{\{Id, (1,2)(3,4)\}} \triangleleft \underset{G_3}{\{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}} \triangleleft \underset{G_2}{A_4} \triangleleft \underset{G_1}{S_4}$$

Osserviamo che G_4 non è normale in $G_2 = A_4$

Def Ad una serie subnormale $\{G_i\}$ possiamo associare la serie di quozienti G_i / G_{i+1} con $i = 1, \ldots, s$

Oss: nel nostro esempio precedente la serie di quozienti associati alla serie subnormale è $G_4/G_5 \cong \mathbb{Z}_2$ $G_3/G_4 \cong \mathbb{Z}_2$ $G_2/G_3 \cong \mathbb{Z}_3$ $G_1/G_2 \cong \mathbb{Z}_2$

Def Un gruppo G si dice risolubile se ammette una serie subnormale con quozienti abeliani

Esempi: 1) S_4 è risolubile

2) G abeliano $\Longrightarrow$ G è risolubile $\left(\{1_G\} \triangleleft G \right)$

3) G semplice, non abeliano $\Longrightarrow$ G non risolubile
$\left(\text{infatti l'unica serie subnormale è } \{1_G\} \triangleleft G \text{ e } G/\{1_G\} \cong G \text{ non è abeliano} \right)$

[S_n con $n \geq 5$ non è risolubile]

Proposizione: Se G è un p-gruppo finito allora G è risolubile

Dim: G ha un sottogruppo normale massimale M tale che $G/M \cong \mathbb{Z}_p$, reiterando ottengo la tesi.

Proposizione: Sottogruppi e quozienti di gruppi risolubili sono risolubile

<u>Dim</u>: Sia G risolubile allora esiste una serie subnormale $\{1_G\} = G_{s+1} \lhd G_s \lhd \dots \lhd G_1 = G$ tale che G_i / G_{i+1} è abeliano per ogni $i = 1, \dots, s$

$\boxed{\text{Sia } H \leq G}$ Definiamo $H_i \overset{def}{=} H \cap G_i$

Osserviamo che:

- $H_{i+1} \lhd H_i$
- $H_1 = H \cap G_1 = H \cap G = H$

- $$\frac{H_i}{H_{i+1}} = \frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i+1}} = \frac{H \cap G_i}{(H \cap G_i) \cap G_{i+1}} \cong \frac{(H \cap G_i) \cdot G_{i+1}}{G_{i+1}} \leq \frac{G_i}{G_{i+1}}$$

per II teor di isom $\frac{A}{A \cap B} \cong \frac{AB}{B}$

Siccome G_i / G_{i+1} è abeliano allora H_i / H_{i+1} è abeliano

Otteniamo $\{H_i\}$ serie subnormale con quozienti abeliani e H risolubile

$\boxed{\text{Sia } H \lhd G \text{, consideriamo } G/H}$

Definiamo $K_i = \frac{H \cdot G_i}{H} \leq \frac{G}{H}$ [Siccome $H \lhd G$ $HG_i \leq G$]

Osserviamo che:

- $K_1 = \frac{H \cdot G_1}{H} = \frac{H \cdot G}{H} = \frac{G}{H}$

- $H G_{i+1} \triangleleft H G_i$

problema: dimostrare questo punto

- $$\frac{K_i}{K_{i+1}} = \frac{\frac{H G_i}{H}}{\frac{H G_{i+1}}{H}} \cong \frac{H G_i}{H G_{i+1}} = \frac{(H G_{i+1}) G_i}{H G_{i+1}} \cong$$

conseguenza I teor. di isom

$$\cong \frac{G_i}{(H \cdot G_{i+1}) \cap G_i} \cong \frac{\frac{G_i}{G_{i+1}}}{\frac{(H \cdot G_{i+1}) \cap G_i}{G_{i+1}}}$$

[si osservi che $(H G_{i+1}) \cap G_i \geq G_{i+1}$]

II teor. di isom

Siccome $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ abeliano allora $\frac{\frac{G_i}{G_{i+1}}}{\frac{(H \cdot G_{i+1}) \cap G_i}{G_{i+1}}} \cong \frac{K_i}{K_{i+1}}$

è abeliano e ho ottenuto una serie subnormale di G/H con quozienti abeliani $\Rightarrow G/H$ risolubile ∎

Corollario: Se G contiene o ha come quoziente un gruppo semplice non abeliano allora G non è risolubile

Corollario (del corollario): S_n con $n \geq 5$ non è risolubile