COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO

Sia $S_1 = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ un insieme di punti del piano con $m \geq 2$.

Definiamo induttivamente S_n.

$x \in S_n$ se vale una delle seguenti condizioni:

1) $x \in S_{n-1}$

2) x è nell'intersezione di due rette distinte ognuna congiungente due punti di S_{n-1}

3) x è nell'intersezione di una retta congiungente due punti di S_{n-1} ed una circonferenza con centro in S_{n-1} e raggio congruente ad un segmento con estremi in S_{n-1}

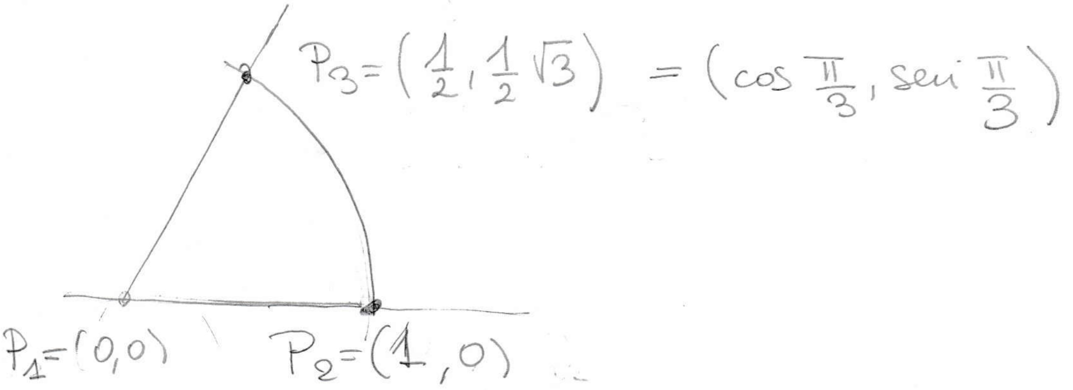
4) x è nell'intersezione di due circonferenze distinte ottenute come in 3

Definiamo $C(P_1, \dots, P_m) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$

<u>Definizione</u> Q può essere <u>costruito con riga e compasso</u> a partire da $P_1, \dots, P_m$ se e solo se $Q \in C(P_1, \dots, P_m)$

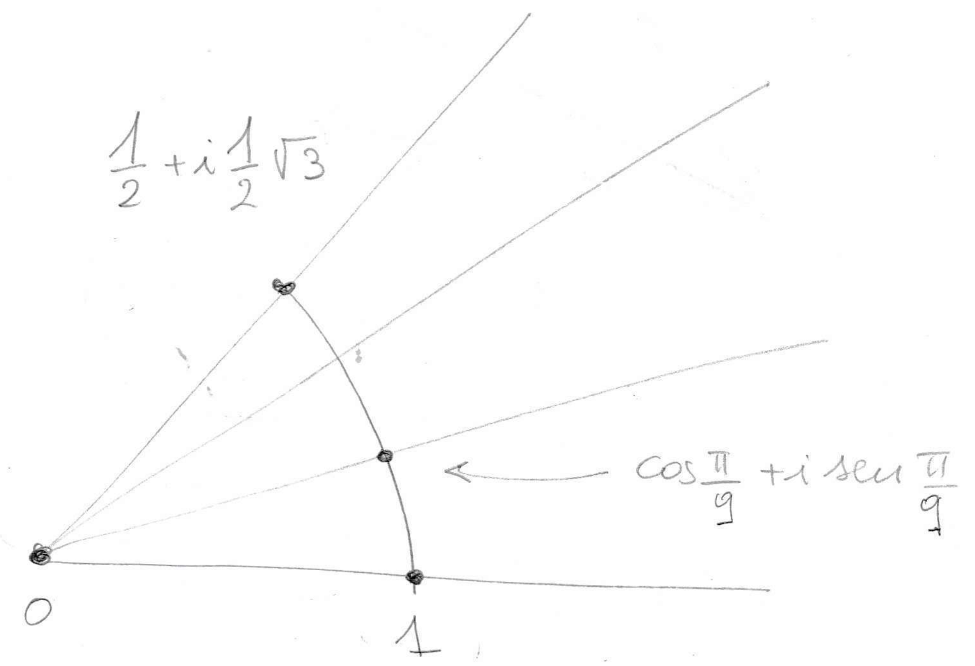
<u>Problema classico</u>: $\boxed{\text{trisecazione dell'angolo di } 60^\circ \text{ con riga e compasso}}$

Come si interpreta il problema in questo contesto.
Il fatto che l'angolo di 60° sia dato si può reinterpretare considerando i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ e $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ come insieme di partenza i.e $S_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$.



Osserviamo che di solito i punti si rappresentano come numeri complessi cioè $S_1 = \left\{0, 1, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$

La possibilità di trisecare l'angolo con riga e compasso è equivalente all'appartenenza di $\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}$ all'insieme $C(0, 1, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3})$



sviluppando l'argomento scopriremo se $\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9} \in C(0, 1, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3})$ cioè se l'angolo è trisecabile con riga e compasso

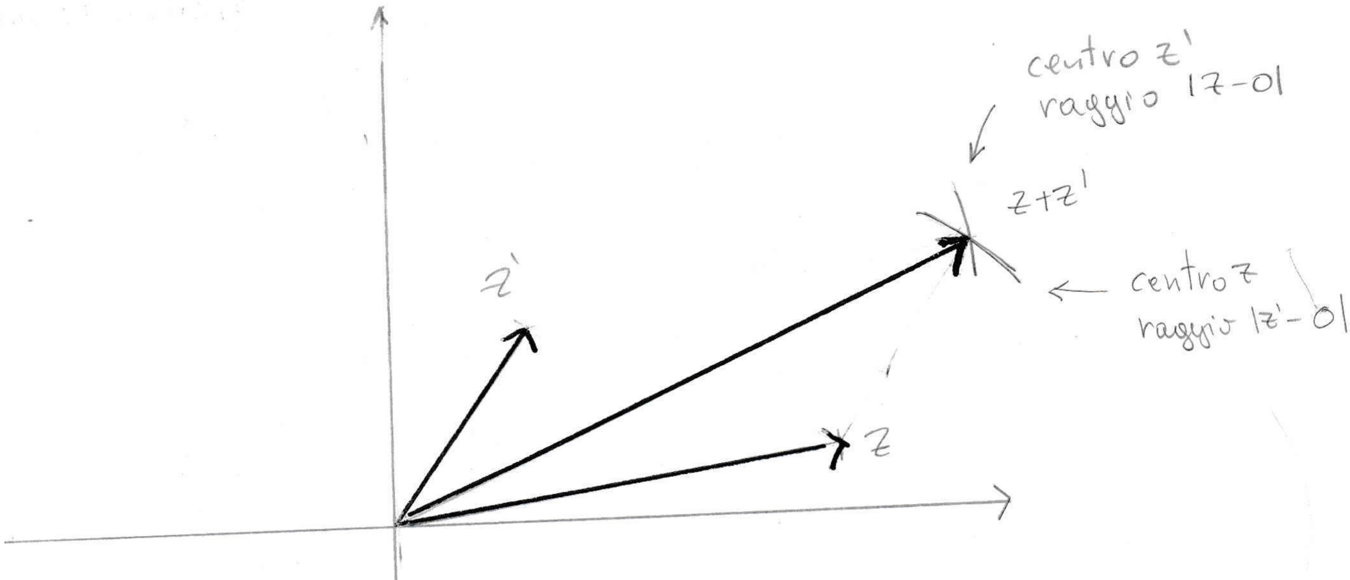
<u>Osservazione</u>: si suppone di norma che $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$

<u>Proposizione</u> $C(z_1, z_2, \dots, z_m)$ è il più piccolo sottocampo di $\mathbb{C}$ contenente $\{z_1, \dots, z_m\}$ chiuso per radici quadrate e coniugio.

chiuso per radici quadrate: $z^2 \in C(z_1, z_2, \dots, z_m) \Rightarrow z \in C(z_1 z_2, \dots, z_m)$

chiuso per coniugio: $z \in C(z_1, z_2, \dots, z_m) \Rightarrow \bar{z} \in C(z_1, z_2, \dots, z_m)$

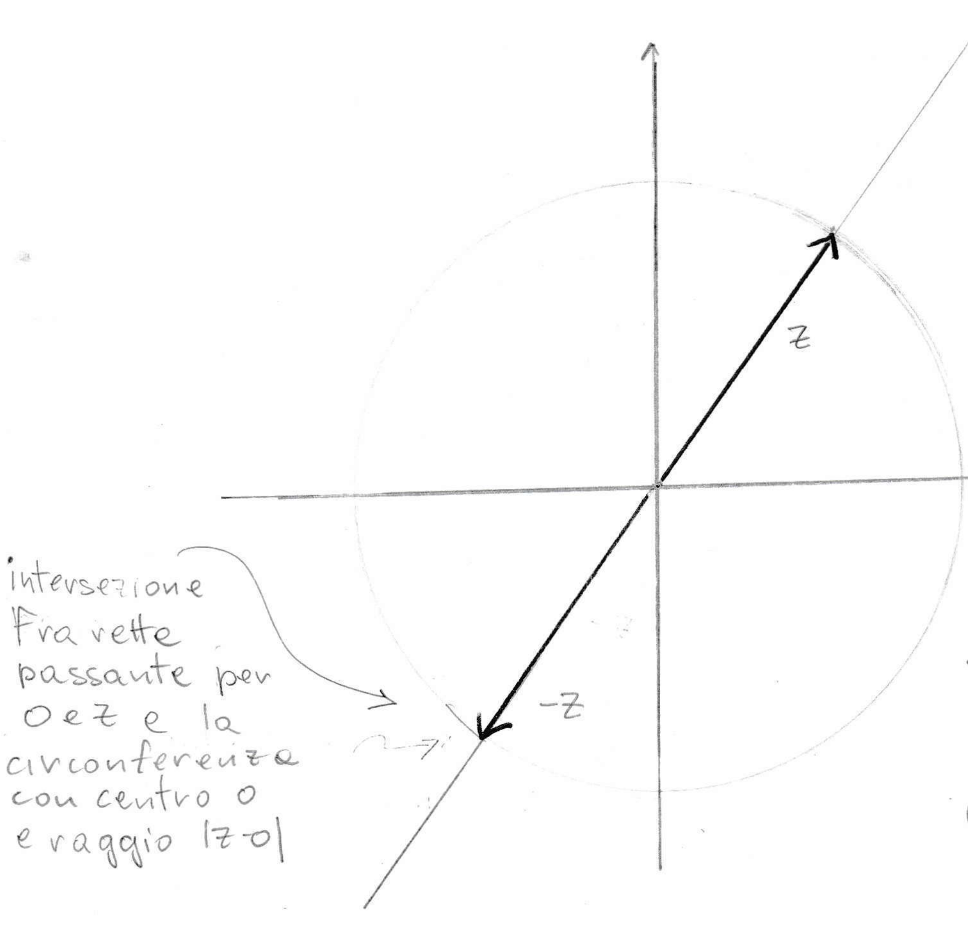
<u>Dimostrazione</u> Supponiamo $z_1=0$ $z_2=1$



[per vedere che è la somma si usa la regola del parallelogramma]

PUNTO 1

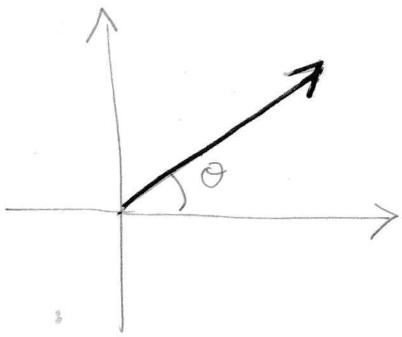
se $z, z' \in S_m$ allora $z+z' \in S_{m+1}$
questo implica che $C(z_1, z_2, \dots, z_m)$ è chiuso rispetto alla somma



PUNTO 2

Questo dimostra che se $z \in C(z_1, z_2, \dots, z_m)$ allora $-z \in C(z_1, \dots, z_m)$

Ricordiamo la <u>forma polare</u> per i numeri complessi $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$



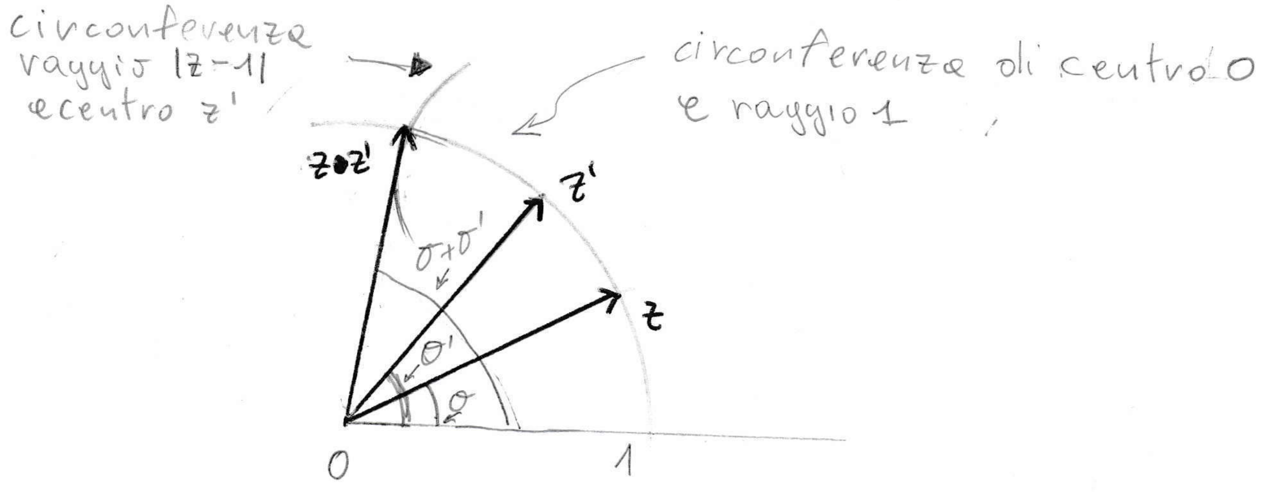
$r = (x^2+y^2)^{1/2}$

parte reale

parte immaginaria

Il prodotto in forma polare: se $z = re^{i\theta}$ e $z' = r'e^{i\theta'}$ allora $zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$

Supponiamo prima $z = e^{i\theta}$ e $z' = e^{i\theta'}$ e quindi $zz' = e^{i(\theta+\theta')}$



PUNTO 3

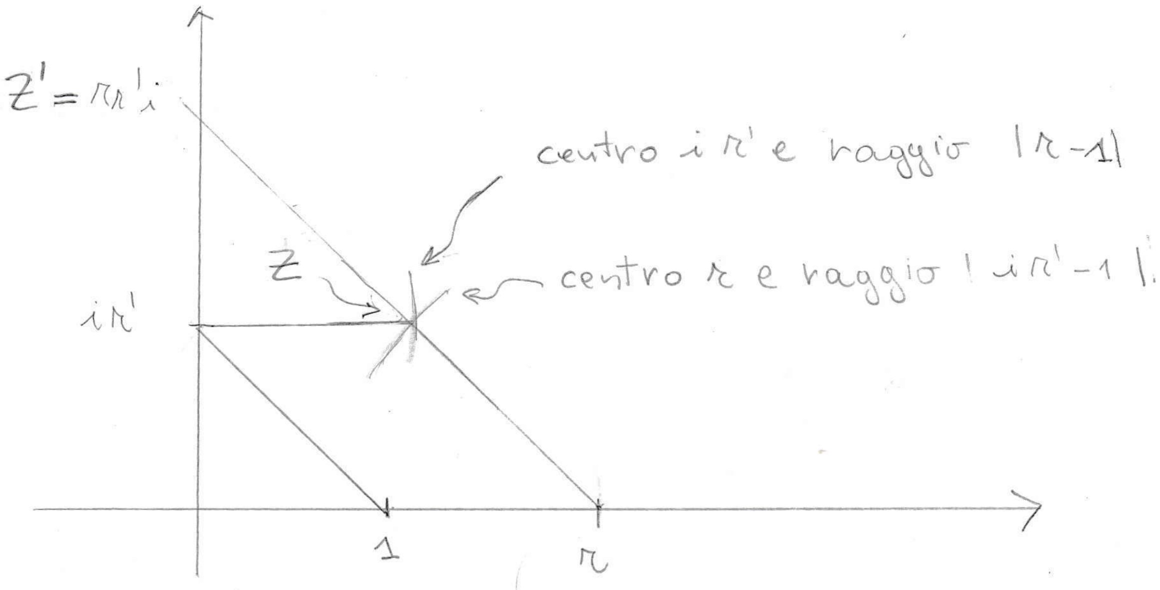
In questo caso abbiamo verificato che se $z = e^{i\theta}$ e $z' = e^{i\theta'} \in C(z_1, \dots, z_m)$ allora $zz' = e^{i(\theta+\theta')} \in C(z_1, \dots, z_m)$

Consideriamo r, r' numeri reali maggiori di 0 che appartengono a $C(z_1, \dots, z_m)$.
Osserviamo che:

1) supponendo $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ abbiamo sempre $i \in C(z_1, \dots, z_m)$

2) se $r \in \mathbb{R}$ e $z_1 = 0$; $z_2 = 1$ allora $r \in C(z_1, \dots, z_m)$ se e solo se $ir \in C(z_1, \dots, z_m)$

Problema: dimostrare queste osservazioni.



$r, r' \in C(z_1, \dots, z_m) \Rightarrow r, ir' \in C(z_1, \dots, z_m)$

- prendo z l'intersazione fra le circonferenze con centro ir' e raggio $|r-1|$ e la circonferenza con centro r e raggio $|ir'-1|$

- ottengo il parallelogramma con vertici $1, r, ir', z$

- prendo il punto z' di intersezione fra la retta passante per r e z e quelle passante per 0 e i

- i triangoli $0, 1, ir'$ e $0, r, z'$ sono simili e ottengo $z' = rr'i$
- questo implica che $rr'i \in C(z_1, \dots, z_m)$ e quindi $rr' \in C(z_1, \dots, z_m)$

PUNTO 4

abbiamo verificato che se due numeri reali positivi sono in $C(z_1, \dots, z_m)$ il loro prodotto è in $C(z_1, \dots, z_m)$

PUNTO 3 e PUNTO 4 implicano

PUNTO 5

$C(z_1, \dots, z_m)$ è chiuso rispetto al prodotto

PUNTO 6

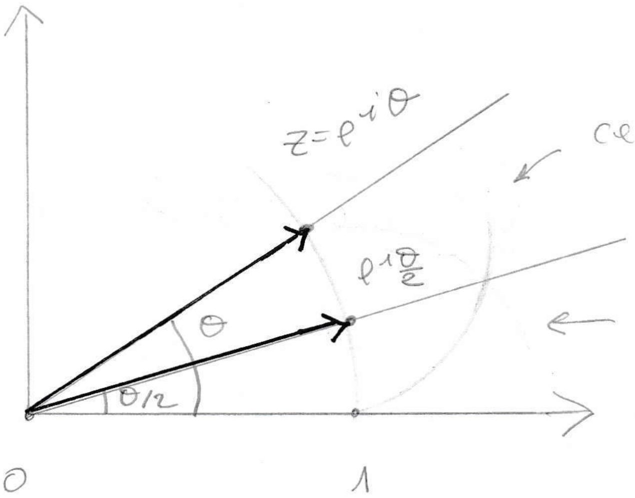
PROBLEMA: dimostrare che se $z = re^{i\theta} \in C(z_1, \dots, z_m)$, $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \frac{e^{-i\theta}}{r} \in C(z_1, \dots, z_m)$

PUNTO 1 + PUNTO 2 + PUNTO 5 + PUNTO 6 $(+\ 0, 1 \in C(z_1, \dots, z_m))$

$\Longrightarrow$

$C(z_1, \dots, z_m)$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$

Consideriamo $z = e^{i\theta} \in C(z_1, \dots, z_m)$.



centro z e raggio $|1-z|$

centro 1 e raggio $|1-z|$

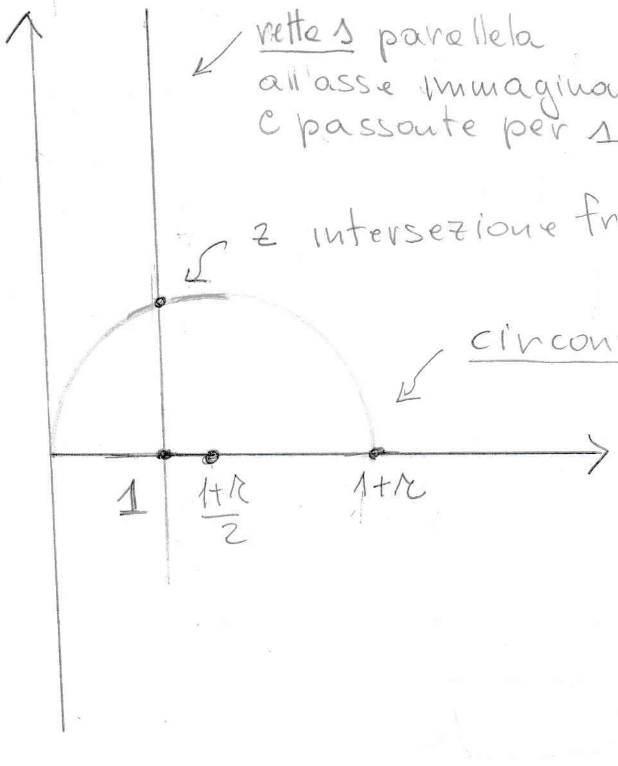
PUNTO 7

Con le classica procedure di bisezione dell'angolo abbiamo dimostrato che se $z = e^{i\theta} \in C(z_1, \dots, z_m)$ allora $e^{i\frac{\theta}{2}} \in C(z_1, \dots, z_m)$

Consideriamo $r \in C(z_1, \dots, z_m)$ numero reale > 0.

Siccome $C(z_1, \dots, z_m)$ campo e $z_2 = 1$

sappiamo che $1+r$ e $\frac{1+r}{2} \in C(z_1, \dots, z_m)$



retta s parallela all'asse immaginario e passante per 1 → [PROBLEMA: Come si costruisce]

z intersezione fra retta s e circonferenza $\mathcal{C}$

circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $\frac{1+r}{2}$ raggio $\left|\frac{1+r}{2} - 0\right|$

la circonferenza $\mathcal{C}$ ha la seguente equazione:

$$\left[x - \frac{(1+r)}{2}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{1+r}{2}\right)^2$$

la retta s ha equazione $x = 1$

Calcoliamo i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ e s

$$\left[1 - \left(\frac{1+r}{2}\right)\right]^2 + y^2 = \left(\frac{1+r}{2}\right)^2$$

$$\frac{1+r^2-2r}{4} + y^2 = \frac{1+r^2+2r}{4}$$

$$y^2 = r \qquad y = \pm\sqrt{r}$$

I punti di intersezione sono $1+i\sqrt{r}$ e $1-i\sqrt{r}$ espressi in forma complessa e appartengono a $C(z_1, \dots, z_m)$

Osservazione: se $x+iy \in C(z_1, \dots, z_m)$ allora $x, y \in C(z_1, \dots, z_m)$

i.e. se $z \in C(z_1, \dots, z_m)$ allora $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in C(z_1, \dots, z_m)$

[la dimostrazione sfrutta di nuovo la costruzione di una retta parallela ad una retta data e passante per un punto fissato]

PUNTO 8

Abbiamo dimostrato che se $r \in C(z_1,\dots,z_m)$ numero reale maggiore di 0 allora $\sqrt{r} \in C(z_1,\dots,z_m)$

PUNTO 7 + PUNTO 8 implicano

PUNTO 9

Se $z = re^{i\theta} \in C(z_1,\dots,z_m)$ allora $\frac{r}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \in C(z_1,\dots,z_m)$
i.e. $C(z_1,\dots,z_m)$ è chiuso per radici quadrate

con le osservazioni fatte è facile dimostrare

PUNTO 10

Se $z = x+iy \in C(z_1,\dots,z_m)$ allora $\bar{z} = x-iy \in C(z_1,\dots,z_m)$
i.e $C(z_1,\dots,z_m)$ è chiuso per coniugio

Abbiamo concluso la dimostrazione che $C(z_1,\dots,z_m)$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$ chiuso per radici quadrate e coniugio ora dimostriamo che $C(z_1,\dots,z_m)$ è il più piccolo campo con queste proprietà

Sia C' un sottocampo di $\mathbb{C}$ contenente $z_1, \dots, z_m$ chiuso per coniugio e radici quadrate

<u>Obiettivo</u>: dimostrare $C' \supseteq C(z_1, \dots, z_m)$

Osserviamo che:
- $i \in C'$ perchè $i^2 = -1 \in C'$
- $x+iy \in C' \Rightarrow x-iy \in C' \Rightarrow 2x \in C'$ (somma $z, \bar{z}$)
  $\Rightarrow x \in C'$ [se $z \in C'$ allora $\operatorname{Re} z \in C'$]
- analogamente $x+iy \in C' \Rightarrow y \in C'$
  [se $z \in C'$ allora $\operatorname{Im} z \in C'$]

Supponiamo $ax+by+c=0$ retta del piano passa per x_0+iy_0 e x_1+iy_1 punti di C'
[osserviamo che $a, b, c \in \mathbb{R}$]

Allora
$$\begin{cases} ax_0+by_0+c=0 \\ ax_1+by_1+c \end{cases}$$

con $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ e $x_i, y_i \in C'$

- Considero $c \neq 0$, posso supporre $c=1$
  ottengo il sistema in cui considero come incognite a, b

$$\begin{cases} ax_0+by_0=-1 \\ ax_1+by_1=-1 \end{cases}$$

- Se $\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \neq 0$ ottengo

$$(a,b) = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siccome $x_i, y_i, -1 \in C'$ allora $a, b \in C'$

- Se $\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$ posso supporre

$x_1 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda y_0$ e quindi ottengo

che le rette passa per $O \to$ vedi caso successivo

- Supponiamo $c = 0$ ottengo il sistema

$$\begin{cases} a x_0 + b y_0 = 0 \\ a x_1 + b y_1 = 0 \end{cases}$$

Se $b \neq 0$ posso supporre $b = 1$ e ottenere

$a = -\dfrac{y_0}{x_0} \in C'$ [se $x_0 = 0$ considero altro punto]

Se $a \neq 0$ posso supporre $a = 1$ e ottenere

$b = -\dfrac{x_0}{y_0} \in C'$

Riassumendo:

> Se s è una retta passante per due punti di C' posso scegliere i coefficienti dell'equazione di s in C'

Per risultati sui sistemi lineari otteniamo che:

> l'intersezione di due rette a coefficienti in C' è un punto di C'

Osserviamo che se $x+iy \in C'$ allora anche $|x+iy| \in C'$ [Dimostrazione per esercizio]

La circonferenza con centro $x_0+iy_0 \in C'$ e raggio $|z_1-z_2|$ con z_1 e $z_2 \in C'$ ha la seguente equazione:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = |z_1-z_2|^2$$

> Posso scegliere i coefficienti della equazione in C'

Le intersezioni di <u>una retta</u> $y=mx+b$ e di <u>una circonferenza</u> $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ con coefficienti reali in C' si ottengono risolvendo l'equazione

$$x^2+(mx+b)^2+dx+e(mx+b)+f=0$$

Per risolverla si parte da m, b, d, e, f si effettuano operazioni di campo e radici quadrate $\Rightarrow$ $\boxed{\text{le intersezioni sono in } C'}$

Considero <u>due circonferenze</u> con coefficienti in C'

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \quad e \quad x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$$

Per calcolare le intersezioni posso sostituire una delle due circonferenze con la seguente retta

$$(d-d')x+(e-e')y+(f-f')=0$$

riportandoci al caso precedente e ottenendo che $\boxed{\text{le intersezioni sono in } C'}$

Le osservazioni precedenti ci dicono che se $\boxed{S_n \subseteq C' \Longrightarrow S_{n+1} \subseteq C'}$

Siccome $S_1 \subseteq C'$ per ipotesi ottengo induttivamente che $C(z_1, \dots, z_m) \subseteq C'$