1

APPUNTI DI ELETTRODINAMICA PER IL CORSO DI FISICA 4 - CdS IN MATEMATICA[1]

E. Smargiassi
Dipartimento di Fisica dell'Università di Trieste

Telefono 040.22.40.414
E-mail: smargiassi@ts.infn.it

[1]Disponibili su
http://www-dft.ts.infn.it/~esmargia/physics/fis4.tex,
http://www-dft.ts.infn.it/~esmargia/physics/fis4.tex

Indice

Capitolo 1

Richiami di elettrostatica

1.1 Carica elettrica e campo elettrico

A tutti i corpi può essere assegnata una grandezza, eventualmente nulla, chiamata *carica elettrica*, in funzione della quale essi si attraggono o si respingono. Esistono due tipi di carica elettrica, la positiva e la negativa; cariche di segno uguale si respingono, cariche di segno opposto si attraggono. Nel Sistema Internazionale (SI) di misura l'unità di misura della carica è il *Coulomb* (C), la cui definizione precisa è data nel par.2.4. La forza elettrica, nel vuoto, risulta dipendere, tra cariche in quiete relativa, esclusivamente dalla posizione delle cariche e dal loro valore.

La carica elettrica è *quantizzata*, ovvero si presenta sotto forma di "granuli" non ulteriormente divisibili. Tutte i valori delle cariche sono dunque multipli della carica elettrica $-e = -1.6022\ 10^{-19}$ C dell'elettrone[1], od e del protone. Data però la piccolezza di questa carica elementare, possiamo, in ogni problema macroscopico, trattare la carica come fosse una distribuzione continua senza praticamente commettere errori. Per questo definiamo anche una *densità di carica* $\rho(\mathbf{r}, t)$, ovvero la carica per unità di volume, che supporremo una funzione regolare delle coordinate e del tempo.

Gli elettroni sono solitamente i portatori della carica elettrica, in quanto sono le particelle più mobili. Va tenuto presente che in taluni casi, come nelle soluzioni elettrolitiche, anche gli atomi dotati di un elettrone in più od in meno del normale, e dunque carichi (*ioni*), fungono da portatori di carica.

Il problema dello studio dell' interazione elettrica e dei suoi effetti può essere diviso in due parti distinte:

[1]Escludiamo qui la carica dei costituenti di protone e neutrone, i *quark*, che in modulo vale $e/3$, in quanto tali particelle non sono osservabili singolarmente e non sono quindi di interesse per questo corso.

- Si definisce in ogni punto dello spazio e ad ogni tempo un campo, detto *campo elettrico* ed indicato con $\mathbf{E}$, generato dalle cariche elettriche;
- Si studia poi l'effetto di questo campo sul moto delle cariche.

Siccome la forza dipende solo dalla posizione della carica ed è proporzionale al valore della carica stessa, si può *definire* il campo come la forza sentita da una carica di prova q divisa per la q stessa, ovvero

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q \Leftrightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{E}$ dipende solo dalle altre cariche presenti, supponendo che q sia abbastanza piccola da non influenzarne la disposizione. Il campo $\mathbf{E}$ si misura in N C^{-1}, un' unità detta anche, più spesso, Volt/metro (V m^{-1}). Unendo la 1.1 con la seconda legge di Newton il problema di trovare il moto di cariche soggette ad un campo elettrico dato è in linea di principio risolto.

1.1.1 Le leggi di Gauss e di Coulomb

Rimane da stabilire come si determina il campo. Nel caso di due punti materiali reciprocamente a riposo, dotati di cariche di valore q_1 e q_2, la forza elettrica che si esercita tra di essi è data dall'espressione[2]

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{1.2}$$

detta *legge di Coulomb*. Ne segue che il campo generato da una carica puntiforme q è dato da

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{1.3}$$

In queste equazioni compare la costante empirica ϵ_0, detta *costante dielettrica del vuoto*, che vale 8.854 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2. Il problema della generazione del campo si riformula esprimendo la legge di Coulomb (e si vedrà che questa espressione è anche più generale) nella forma di Gauss tramite il *flusso del campo elettrico* Φ_E calcolato su di una superficie chiusa:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0 \tag{1.4}$$

[2]In queste note usiamo la diffusa convenzione secondo la quale il "cappelletto" posto su di un vettore ($\hat{\mathbf{v}}$) indica che si tratta di un versore, cioè di un vettore di modulo unitario. È chiaro che $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{v}/v = \hat{\mathbf{v}}$.

dove la carica q è tutta e sola quella contenuta nella regione di spazio delimitata dalla superficie sulla quale si calcola il flusso di $\mathbf{E}$. In forma differenziale l'equazione 1.4 diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \tag{1.5}$$

Si vede subito che dalla legge di Gauss si ottiene la legge di Coulomb per una carica puntiforme o comunque a simmetria sferica. Si può anche far vedere che se vale la legge di Coulomb vale anche la legge di Gauss; le due quindi, nel caso statico, sono equivalenti.

Si definiscono *linee di campo elettrico* le linee che ad ogni punto hanno come tangente il vettore $\mathbf{E}$. Si tratta di linee orientate: il loro verso è dato dal verso del campo elettrico nel punto tangente. Si vede dalla legge di Gauss che le linee di campo iniziano sulle cariche positive e terminano su quelle negative (si ricordi che le superfici su cui si calcolano i flussi, se chiuse, sono sempre orientate verso l'esterno). In altre parole, iniziano e terminano solo nei punti in cui la divergenza di $\mathbf{E}$ non è nulla. Il termine stesso "divergenza" nasce da qui.

1.1.2 Filo carico

Un caso importante è quello di un filo rettilineo infinito uniformemente carico. Sia λ la densità di carica per unità di lunghezza, allora in una sezione lunga L vi sarà una carica $q = \lambda L$. Il campo, per simmetria, sarà radiale. Applicando la legge di Gauss ad un cilindretto con l'asse principale parallelo al filo, di lunghezza L e avente raggio di base r, si ha allora

$$2\pi r L E(r) = \oint \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0 = \lambda L/\epsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \tag{1.6}$$

La forza per unità di lunghezza tra due fili identici paralleli distanti s vale allora

$$F/L = \int_0^{\lambda L} E(s)\ dq/L = \int_0^L \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\lambda\ dl/L = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 s}. \tag{1.7}$$

Immaginiamo ora che i fili, che sono composti da circa 10^{25} atomi per metro, presentino uno sbilanciamento di carica elettrica — per esempio un eccesso di elettroni — di una parte su 10^9. Ovvero, dei circa 10^{25} elettroni che trasportano la corrente, ce ne siano 10^{16} in più di quelli necessari a controbilanciare la carica positiva dei nuclei degli atomi che compongono il filo. Questo sbilanciamento implica un eccesso di carica negativa pari a

$\lambda = 1.6\ 10^{-19} \times 10^{16} = 1.6\ 10^{-3}$ C/m. In questo caso la forza per unità di lunghezza tra fili distanti 1 m varrebbe circa 5 10^5 N/m, corrispondente circa al peso di un corpo di massa 50 tonnellate per metro di filo. Basta quindi uno squilibrio piccolissimo tra cariche positive e negative per generare forze enormi.

1.1.3 Dipoli elettrici

Un sistema semplice ma importante è quello detto *dipolo elettrico*. Si definisce *momento di dipolo elettrico* di un sistema di N cariche di carica q_i e poste in $\mathbf{r}_i$, oppure di una distribuzione continua di densità di carica $\rho(\mathbf{r})$, la grandezza

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\ d\Omega \tag{1.8}$$

che per due cariche uguali ed opposte distanti $\mathbf{d}$ (vettore che punta dalla carica negativa alla positiva) diventa $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$.

Il momento di dipolo è semplicemente il secondo termine di un particolare sviluppo in serie del campo elettrico, detto *sviluppo in multipoli*, in cui ogni termine decade via via più velocemente con la distanza. Il termine di ordine più basso è il termine di "monopolo elettrico", proporzionale a Q/r^2, dove Q è la carica totale. Si dimostra che il campo di dipolo vale $[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]/4\pi\epsilon_0 r^3$. Il campo elettrostatico di un sistema neutro pertanto, a grandi distanze, ha sempre quest'ultima forma.

Si dimostra che il momento torcente che agisce su di un dipolo immerso in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$ vale

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{1.9}$$

e l'energia è

$$E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{1.10}$$

e risulta ovviamente minima quando $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}$ sono paralleli.

1.2 Il potenziale elettrostatico

La legge di Gauss non è in generale sufficiente per determinare univocamente il campo elettrico (nei calcoli precedenti si sono dovute invocare altre considerazioni, principalmente di simmetria). Ci vuole una seconda equazione, e risulta che è sufficiente un'equazione che determini la circuitazione di $\mathbf{E}$ o, equivalentemente, il suo rotore:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{1.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.12}$$

La prima di queste equazioni è equivalente all'affermazione che l'integrale di linea di $\mathbf{E}$, a estremi fissati, è indipendente dal cammino. Queste equazioni dicono che $\mathbf{E}$ è un campo *conservativo*, ovvero derivabile da una funzione scalare detta *potenziale elettrico* ϕ tramite la

$$\phi = -\int_O^P \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{1.13}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \tag{1.14}$$

Il potenziale, che si misura in Volt (V), è definito, come l'energia potenziale, a meno di una costante arbitraria, che può essere fissata scegliendo il punto di riferimento O. Solo le differenze di potenziale hanno significato fisico. L'energia potenziale elettrostatica U di una carica q è

$$U = -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -q\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q\phi. \tag{1.15}$$

Potenziale elettrostatico ed energia potenziale elettrostatica sono dunque grandezze strettamente imparentate, ma non sono la stessa cosa. L'energia guadagnata da una carica elementare positiva e che risale la differenza di potenziale di 1 V è detta *elettronvolt* (eV) e vale 1.6022 10^{-9} J.

Inserendo la definizione del potenziale elettrostatico nella legge di Gauss si ottiene l'equazione per il potenziale elettrostatico:

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{1.16}$$

L'equazione 1.16 prende il nome di *equazione di Poisson*. La sua versione omogenea, ovvero in assenza di cariche, è detta *equazione di Laplace*, ed è una delle equazioni fondamentali della Fisica Matematica.

Per trovare la soluzione formale della 1.16 partiamo dal fatto che la sua soluzione, nel caso di una carica puntiforme infinitesima dq posta in $\mathbf{r}'$, è la legge di Coulomb:

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{dq(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Se allora immaginiamo la distribuzione di carica in questione come la sovrapposizione di tante cariche approssimativamente puntiformi $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')d\Omega'$ possiamo scrivere la soluzione generale dell' equazione 1.16, in virtù della sua linearità, come somma di tutte le soluzioni dei problemi in cui è presente solo la carica $\rho(\mathbf{r}')d\Omega'$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{1.17}$$

1.3 La corrente elettrica

Un insieme di cariche in moto costituisce un'entità chiamata *corrente elettrica*, la cui intensità, che denota il numero di cariche che passano nell'unità di tempo attraverso una superficie data, è misurata in Ampère (A) = C s^{-1} e solitamente è indicata con la lettera I. Tale corrente può essere anche descritta in termini di un vettore detto *densità di corrente*

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1.18}$$

dove ρ è la densità di carica e $\mathbf{v}$ è la velocità delle cariche. Entrambe queste quantità saranno in generale funzione della posizione; la loro dipendenza dal tempo, finché tratteremo di campi elettrici e magnetici statici, sarà ignorata. Sfortunatamente risulta che nei fili elettrici a muoversi sono gli elettroni, carichi negativamente, per cui la velocità effettiva delle cariche è opposta al verso della corrente. Peraltro esistono molti casi in cui si muovono cariche positive o di entrambi i tipi; la conduzione nelle soluzioni elettrolitiche per esempio è di questo tipo. In questi casi la (densità di) corrente totale è la somma delle (densità di) corrente dei diversi tipi di cariche.

Le unità di misura di $\mathbf{j}$ nel SI sono chiaramente A m^{-2}. La relazione tra corrente e densità di corrente è data dal fatto che la prima è il flusso della seconda:

$$I = \int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}.$$

1.3.1 La legge di Ohm

Perché si abbia una corrente dal punto 1 al punto 2 bisogna che le cariche siano sottoposte ad una forza che le trascini da 1 a 2. Quasi sempre si tratta di una forza elettrica, dunque deve essere presente una differenza di potenziale $V = \Delta\phi$.

La *legge di Ohm* indica la relazione tra differenza di potenziale e corrente elettrica ai capi di una vasta classe di dispositivi, principalmente fili metallici:

$$V = RI \tag{1.19}$$

dove la costante positiva R è detta *resistenza* e si misura in Ohm (Ω) = V/A = kg m^2 C^{-2} s^{-1}. Un dispositivo descritto dalla legge di Ohm con un valore di R apprezzabile è pure detto resistenza o *resistore*. Si tenga però presente che tale legge vale anche per i conduttori.

La legge di Ohm si esprime in forma vettoriale come

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{1.20}$$

e la *conduttività* (o *conducibilità*) σ, che è una grandezza caratteristica del materiale in cui scorre la corrente, si misura in Ω^{-1} m^{-1} = kg^{-1} m^{-3} C^2 s. Il suo reciproco è detto *resistività* e si indica normalmente col simbolo ρ. Le tipiche conducibilità metalliche sono dell'ordine di $10^7 \div\ 10^8$ Ω^{-1} m^{-1}.

La potenza (eventualmente negativa) trasferita dal campo elettrico alle cariche che compongono una corrente I, soggetta ad una differenza di potenziale V, vale dunque

$$W = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} V = VI \tag{1.21}$$

e se vale la legge di Ohm la potenza dissipata P è espressa dalla *legge di Joule*

$$P = VI = RI^2. \tag{1.22}$$

1.4 Conservazione della carica elettrica

Come sappiamo dall'esempio dei due fili esposto in precedenza, basta uno sbilanciamento di carica veramente minimo per generare forze elettrostatiche enormi. Il fatto che queste forze non siano mai osservate è un forte argomento in favore del fatto che la carica totale non cambia mai in nessuna circostanza. Tutto quello che può fare è di spostarsi da un punto all'altro. In termini quantitativi possiamo scrivere che la carica inclusa in una regione di spazio Ω varia col tempo solo se c'è un flusso di carica in entrata o in uscita attraverso il bordo Σ di tale regione che compensa esattamente questa variazione. In formule, $dq/dt = -I$ (la corrente infatti è positiva quando esce e fa calare q), vale a dire:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{1.23}$$

Usando il teorema di Gauss C.15 e sfruttando il fatto che l'eq. 1.23 deve valere per ogni volume Ω ne otteniamo la forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{1.24}$$

L' equazione 1.23 o 1.24 è detta *equazione di continuità della carica*. Si può osservare che non abbiamo usato alcuna proprietà della carica tranne la sua conservazione (locale); pertanto queste equazioni, previa reinterpretazione dei termini, descrivono la conservazione di qualunque quantità. Per esempio, se ρ = densità di massa e ricordiamo che $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, queste equazioni rappresentano la legge di conservazione della massa, e come tali sono fondamentali, per esempio, in fluidodinamica.

1.5 Il campo elettrico nella materia

1.5.1 Induzione elettrostatica. Il condensatore

Quando un materiale è soggetto ad un campo elettrico esterno, le cariche che in esso sono presenti si spostano. Se si tratta di un conduttore lo spostamento è macroscopico, un fenomeno detto *induzione elettrostatica*. Le cariche positive si accumulano sul lato in cui il potenziale è minore e quelle negative sul lato dove è maggiore; all'interno del conduttore il potenziale è uniforme.

Siccome un insieme di cariche genera anche un campo elettrico, oltre che esserne influenzato, ne segue che se abbiamo due conduttori A e B, affacciati l'uno verso l'altro ma isolati tra loro, e vi è per una qualche ragione uno squilibrio di cariche per esempio positive sul lato di A affacciato su B, allora sul lato di B affacciato su A compaiono cariche negative per induzione. Queste cariche — positive su A, negative su B — si attraggono a vicenda e pertanto costituiscono un sistema stabile.

Un dispositivo del genere viene chiamato *condensatore* o *capacitore* e i due corpi A e B sono detti *armature*. Le armature possono poi essere connesse ad altri corpi, dai lati opposti a quelli con cui si affacciano vicendevolmente, in modo tale da far fluire via le altre cariche e da far sì che ciascuna armatura possa rimanere con una carica netta q e $-q$.

Un condensatore è caratterizzato dalla sua *capacità*, ovvero dal rapporto (in modulo) tra la carica q su ciascuna armatura e la differenza di potenziale tra di esse:

$$C = q/V \tag{1.25}$$

capacità che si misura in Farad (F) = m^{-2} kg^{-1} s^2 C^2. L' energia totale accumulata sul condensatore vale

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}. \tag{1.26}$$

Il prototipo del condensatore è il *condensatore piano*, composto da due lastre metalliche di area S separate da una distanza d. Se $S >> d^2$ il campo elettrico può essere preso approssimativamente uniforme e pari a V/d, e la capacità è data da

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \tag{1.27}$$

Per questo condensatore l'energia accumulata U è esprimibile direttamente in funzione del campo elettrico $E = V/d$:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 S}{d}(Ed)^2 = \Omega\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \tag{1.28}$$

dove $\Omega = Sd$ è il volume del condensatore.

1.5.2 I dielettrici

Se il corpo soggetto al campo esterno è isolante lo spostamento di cariche al suo interno è microscopico, ovvero su scala atomica, e si rivela nella comparsa di un campo elettrico, sempre diretto in direzione opposta a quello esterno, che si aggiunge a quello esterno. Questo effetto viene detto *polarizzazione dei dielettrici*.

La polarizzazione si può descrivere tramite un vettore $\mathbf{P}$ definito come il momento di dipolo elettrico del materiale per unità di volume e si misura in C m^{-2}. A partire da $\mathbf{P}$ e da $\mathbf{E}$ si definisce un terzo vettore $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, detto *spostamento elettrico*. L'importanza di questo terzo vettore sta nel fatto che si può dimostrare che in funzione di esso la legge di Gauss assume una forma più semplice:

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q_{libera} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libera} \tag{1.29}$$

dove il pedice "libera" indica che non si considerano le cariche di polarizzazione all'interno del materiale; in pratica, si considerano solo le cariche accessibili direttamente allo sperimentatore.

Si tratta di una relazione del tutto generale; si osservi però che non si può dare una relazione altrettanto generale per il rotore di $\mathbf{D}$ — che non è un campo conservativo, se non nel vuoto — per cui è necessario conoscere la *relazione costitutiva* che lo collega con $\mathbf{E}$.

A questo fine, se si assume che $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{E}$ siano paralleli e proporzionali tra loro, si pone

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$$

dove il nuovo coefficiente ϵ è detto *costante dielettrica* del mezzo e indica di quanto viene ridotto il campo elettrico in presenza di un materiale. Infatti

$$\oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{libera} \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_{libera}/\epsilon$$

e confrontandola con la 1.4 si vede che l'effetto del materiale sul campo generato da una carica data è di sostituire ϵ_0 con ϵ. Si definisce infine una *costante dielettrica relativa* $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, adimensionale. Si vede immediatamente che, essendo $\epsilon > \epsilon_0$, l'interazione tra due cariche immerse in un dielettrico è diminuita di un fattore ϵ_r, e così pure le differenze di potenziale. Ne segue che la capacità di un condensatore viene *aumentata* di un fattore ϵ_r dalla presenza di un dielettrico.

Capitolo 2

Magnetostatica

2.1 Il campo magnetico

Esiste una seconda interazione tra cariche che dipende dal loro stato di moto, ed in particolare dalla loro velocità. Questa interazione è detta *interazione magnetica*. In completa analogia con il caso elettrostatico, si può dividere il problema dello studio di questa interazione e dei suoi effetti in due parti distinte:

- Si definisce un nuovo campo, detto *campo magnetico* ed indicato con $\mathbf{B}$[1], generato dalle cariche in moto, ovvero dalle correnti elettriche;

- Si studia poi l'effetto di questo campo sul moto delle cariche.

Una volta risolti entrambi i problemi, e conoscendo il campo elettrico e le altre forze eventualmente presenti, sarà possibile, a meno di difficoltà tecniche a volte notevoli, risolvere completamente il problema del moto di un qualunque sistema di cariche interagenti. In particolare, il problema delle interazioni magnetiche è in generale riconducibile ad un problema di interazione tra correnti.

Il campo magnetico, così come quello elettrico, compare quindi come un intermediario metodologico che non figura nel risultato finale dello studio di un sistema; vedremo però in seguito, nella sezione 3.8, come però questi campi possano vantare un "grado di realtà" più elevato di quanto questa presentazione possa far pensare.

[1]Molti testi, specie quelli più vecchi, chiamano **B** *induzione magnetica*.

2.2 La forza di Lorentz

Il secondo problema posto sopra è in realtà il più semplice dei due. L'esperienza insegna che la forza su di una carica dovuta ad una interazione magnetica è sempre perpendicolare alla velocità della carica. È ragionevole pertanto supporre che tale forza si possa esprimere nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{2.1}$$

visto che il risultato di un prodotto vettore è un vettore perpendicolare ad entrambi i fattori. In generale, se è presente anche un campo elettrico, la forza su di una carica è data da

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \tag{2.2}$$

Dalla 2.1 si vede che le unità di $\mathbf{B}$ sono kg s^{-1} C^{-1}; questa unità è chiamata Tesla (T), o a volte Weber/m^2 (il Weber è l'inità di misura del flusso magnetico $\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$). Il campo magnetico terrestre al suolo ha un'intensità di circa $0.4 \div 0.5\ 10^{-4}$ T. L'unità 10^{-4} T è chiamata Gauss, ma non fa parte del SI.

È immediato rendersi conto che il campo magnetico, qualunque sia, non trasferisce energia alla carica. Infatti l'energia trasferita per unità di tempo (ovvero la potenza) è

$$W = dE/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$$

siccome $\mathbf{F}$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$. Pertanto l'energia si conserva anche qualora $\mathbf{B}$ non sia conservativo nel senso dell'analisi vettoriale (ovvero abbia rotazionale nullo od obbedisca ad altre condizioni equivalenti; vedremo subito che in generale non ne soddisfa nessuna).

Infine si noti che si conserva anche la componente del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ lungo il campo $\mathbf{B}$. Infatti, ricordando che $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\overbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}^{=0} + q\ \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2.3}$$

e l'ultimo termine è perpendicolare a $\mathbf{B}$. Infatti dalla C.3 segue

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2.2.1 Lo spettrometro di massa

È elementare risolvere le equazioni del moto per una particella per cui $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ costante e uniforme[2]. Posto $\mathbf{r}_0 = 0, \mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, l'equazione del moto $m\mathbf{a} = \mathbf{F} = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\,(v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}) \times B\hat{\mathbf{z}} = qB\,(v_y\hat{\mathbf{x}} - v_x\hat{\mathbf{y}})$ diventa, scritta per componenti,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \quad qB\dot{y}/m \\ \ddot{y} &= -qB\dot{x}/m \\ \ddot{z} &= \quad 0 \end{aligned}$$

e la sua soluzione è semplice da trovare, usando le normali tecniche di integrazione dei sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} x &= v_0/\omega \sin(\omega t) \\ y &= v_0/\omega\,[\cos(\omega t) - 1] \\ z &= 0 \end{aligned}$$

dove si è introdotta la *frequenza di ciclotrone* $\omega = qB/m$. Si vede che la traiettoria ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 + 2v_0 y/\omega = 0$ ed è perciò un arco di cerchio di raggio v_0/ω, giacente sul piano xy e con centro in $(0, -v_0/\omega, 0)$. La deflessione delle particelle così lanciate dipende quindi, oltre che dai valori di B e di v_0, controllati dallo sperimentatore, dal loro rapporto carica/massa q/m. Particelle con valori di q/m diversi vengono deflesse in maniera diversa.

Questo fatto è alla base dello strumento di analisi chimica detto *spettrometro di massa*. Per determinare la composizione chimica quantitativa di un campione basta infatti vaporizzarlo, ionizzare in qualche modo controllato le molecole che si producono, ed inviarle a velocità nota (per esempio facendole passare attraverso una differenza di potenziale elettrico data) in un campo magnetico noto. Le molecole si raggrupperanno sul fianco dello strumento ed in base alle posizioni in cui sono raggruppate si determina q/m e da lì il tipo di molecola in questione. In questo modo si ottengono sensibilità estremamente elevate.

2.3 Solenoidalità di B

Veniamo al problema di determinare il campo magnetico dal moto delle cariche. Come per il caso del campo elettrico, è sufficiente trovare due equazioni, una per la divergenza di $\mathbf{B}$ ed una per il suo rotore. L'equazione alla divergenza risulta essere semplicissima:

[2] Si tenga presente sempre la differenza tra i due termini: *costante* si riferisce all'indipendenza dal tempo, *uniforme* all'indipendenza dalla posizione.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.4}$$

La corrispondente equazione in forma integrale, ovviamente, è

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2.5}$$

ed è equivalente all'affermazione che *il flusso di* $\mathbf{B}$ *è indipendente dalla superficie su cui lo si calcola*, purché il bordo di tale superficie sia fissato.

Prendiamo infatti due superfici A e B aventi lo stesso bordo λ; λ potrebbe essere, per fissare le idee, una circonferenza nel piano xy, orientata in senso antiorario per chi vede l'asse z puntare verso l'alto, A la superficie del cerchio incluso e B la semicirconferenza che "sporge" nella direzione dell'asse z positivo. Sia A che B sono, in questo caso, orientate nel senso positivo delle z. Il flusso di $\mathbf{B}$ su queste superfici sia rispettivamente Φ_A e Φ_B.

Consideriamo la superficie $C = A + B$: è una superficie chiusa; però bisogna notare che per convenzione le superfici chiuse sono orientate verso l'esterno. Perciò per calcolare Φ_C bisogna invertire l'orientazione di una delle due superfici, nel nostro esempio la superficie A. Pertanto il flusso su A cambia segno e $\Phi_C = \Phi_B - \Phi_A$, ma siccome il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo, abbiamo $\Phi_C = 0$, dunque $\Phi_B = \Phi_A$, CVD.

Il significato delle equazioni 2.4, 2.5 è chiaro: il campo magnetico non ha sorgenti nel senso in cui le ha il campo elettrico; alternativamente, si può dire che *non esistono cariche magnetiche*, altrimenti dette *monopoli magnetici*. Si tratta di un puro dato sperimentale: non esistono ragioni teoriche o di principio che vietino l'esistenza di monopoli magnetici. Di fatto, però, essi non sono mai stati osservati ed assumeremo dunque la validità delle equazioni 2.4, 2.5.

Le linee di campo magnetico quindi non hanno inizio né fine (si pensi, per confronto, a quelle di campo elettrico, che iniziano sulle cariche positive e terminano su quelle negative, nei punti in cui $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$) e possono solo essere o infinite o chiuse su sé stesse. Questo si esprime dicendo che il campo magnetico è *solenoidale*.

Il significato geometrico della solenoidalità rende evidente il fatto esposto più sopra dell'indipendenza dalla superficie del flusso di $\mathbf{B}$: il numero delle linee che passano attraverso una superficie deve essere lo stesso di quelle che escono da un' altra avente lo stesso bordo, e viceversa.

2.4 La legge di Ampère

Siccome l'equazione alla divergenza per il campo magnetico non contiene le sorgenti del campo, che sono le correnti, queste devono essere considerate nell'equazione al rotore, che prende la seguente forma (*equazione di Ampère*):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2.6}$$

e la corrispondente equazione integrale è, applicando il teorema di Stokes,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \tag{2.7}$$

visto che il flusso di $\mathbf{j}$ è I. Si intende che la corrente che compare a secondo membro dell'equazione 2.7 è la corrente totale — ovvero la somma algebrica di tutte le correnti — su di una qualunque superficie che abbia come bordo la curva su cui viene calcolata la circuitazione a primo membro. Si tratta naturalmente di curve e superfici orientate; convenzionalmente si intende orientata la superficie nel senso definito dalla regola della mano destra.

Questa regola dice che, se si osserva il bordo della superficie in modo tale che sia orientato in senso antiorario, allora la superficie è orientata verso l'alto. Così, per esempio, la superficie di un cerchio giacente nel piano xy il cui bordo è percorso in modo tale che un punto vada dall' intercetta con l' asse positivo delle x all'intercetta conl'asse positivo delle y ecc., è orientata verso l'asse z positivo. Un altro modo di definirlo è questo: se si stringe il pugno destro con le dita nel verso in cui è percorso il bordo della superficie, il pollice indica il verso di $\mathbf{S}$.

La costante μ_0 è detta *permeabilità magnetica del vuoto* ed è introdotta per rendere coerenti le unità di misura ai due membri dell'equazione di Ampère. È definita come *esattamente* $4\pi\ 10^{-7}$ m kg C^{-2}. Questa nuova unità di misura è anche nota come Henry/m. Ritroveremo l'Henry (H) più avanti. Si noti come μ_0 non sia una costante empirica come ϵ_0, che è invece *misurata*. La ragione sta nel fatto che l'unità di corrente, l' Ampère, è appositamente definita in modo tale che μ_0 abbia il valore summenzionato. Infatti nella versione attuale del SI l' Ampère è un'unità fondamentale ed il Coulomb è derivata, vale a dire che 1 C è definito come la quantità di carica che passa in un secondo in un filo percorso da una corrente di 1 A. In altri termini, per definizione 1 A è la corrente che, percorrendo due fili paralleli molto lunghi posti a distanza di 1 m, genera una forza tra di essi pari a 2 $10^{-}7$ N/m (si veda l'Appendice A).

2.4.1 Filo infinito

Applichiamo ora la legge di Ampère al caso di un filo rettilineo infinito percorso da una corrente I. Poniamo l'asse z del nostro sistema di riferimento lungo l'asse del filo. Per simmetria, ci aspettiamo che il campo dipenda solo dalla distanza r dal filo e non dalla coordinata z né dall'angolo di rotazione attorno al filo. Siccome le linee di campo devono essere chiuse, la simmetria ci dice anche che esse devono essere cerchi aventi il centro lungo il filo e giacenti su piani perpendicolari ad esso. Prendendo quindi come percorso d'integrazione uno di questi cerchi, di raggio r, abbiamo che ivi $\mathbf{B}$ è costante in modulo e sempre tangente al cerchio. Perciò $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi r} B\ dl = 2\pi r B$ e la 2.7 diventa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{2.8}$$

Il verso del campo è stabilito, anche in questo caso, dalla regola della mano destra: se si stringe il pugno destro puntando il pollice nel verso della corrente, le altre dita indicano il verso di $\mathbf{B}$. Pertanto, in forma vettoriale, la 2.8 diventa

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\,(-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}) \tag{2.9}$$

se si suppone positiva la corrente che scorre nel verso positivo dell'asse z (*Esercizio*: verificare l'identità delle due forme dell'equazione 2.9).

2.4.2 Solenoide

Un solenoide è un avvolgimento di filo sagomato ad elica molto stretta in modo da formare un cilindro, e può essere pensato, con ottima approssimazione, come un insieme di spire circolari (si chiama spira un filo che forma un circuito chiuso) collegate in serie. Tutte queste spire quindi sono percorse dalla stessa corrente I. Il caso più semplice da trattare, e che nel magnetismo svolge lo stesso ruolo illustrativo che il condensatore infinito a facce piane e parallele svolge in elettrostatica, è quello del solenoide infinito i cui avvolgimenti sono uniformemente distribuiti lungo la superficie del cilindro con densità lungo l'asse di $n = N/L$ spire per unità di lunghezza.

È semplice calcolare il campo all'interno di un tale solenoide ideale. Per simmetria il campo $\mathbf{B}$ sarà parallelo all'asse del cilindro, e siccome le linee di campo non possono uscire possiamo supporre che $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ al di fuori del solenoide. Prendiamo allora un circuito $ABCD$ tale che due lati — AB e CD — siano lunghi L e paralleli all'asse del solenoide, AB all'interno e CD all'esterno, e gli altri due — BC e DA — perpendicolari. Allora

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A\right) \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} =$$

$$= \int_0^L B\ dl + \int_B^C B\cos(\pi/2)\ dl + \int_L^0 0\ dl + \int_D^A B\cos(\pi/2)\ dl = BL$$

per cui dalla 2.7, tenendo conto che in un tratto lungo L ci sono $N = nL$ spire ciascuna percorsa dalla corrente I, segue

$$B = \mu_0 I_{totale}/L = \mu_0 NI/L = \mu_0 nI. \tag{2.10}$$

Un solenoide quindi è un buon modo per creare campi magnetici intensi senza dover ricorrere a correnti eccessivamente elevate: è sufficiente aumentare la densità degli avvolgimenti. Questo è il prototipo degli *elettromagneti*.

2.5 Forze magnetiche su correnti

Siccome la forza magnetica si esercita su cariche in moto, e la corrente non è altro che un insieme di cariche in moto, possiamo concludere che un filo percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico è sottoposto ad una forza. Si noti che questa forza esiste anche nel caso, quello più comune, in cui il filo è elettricamente neutro.

Per calcolare tale forza partiamo, com'è ovvio, dalla forza di Lorentz 2.1. Per applicarla, dobbiamo in qualche modo collegare i parametri macroscopici del filo — la sua lunghezza e la corrente I che lo percorre — con la velocità e la carica che figurano nelle equazioni 2.1 e 1.18.

Notiamo che $\mathbf{j}$ ha in ogni punto la stessa direzione del filo, e che questa direzione (e verso) è data dal versore tangente al filo $\hat{\mathbf{l}} = d\mathbf{l}/dl$. Inoltre possiamo scrivere per il modulo di $j = I/S$ se S è la sezione trasversale del filo e $\mathbf{j}$ è uniforme in esso, visto che I è il flusso di $\mathbf{j}$. Dunque $\mathbf{j}\, d\Omega = \hat{\mathbf{l}} I d\Omega/S = I d\mathbf{l}$, visto che $d\Omega = Sdl$ è il volume di un pezzo di filo lungo dl. Applicando la 1.18 troviamo quindi che la forza è

$$\mathbf{F} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = \int \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}\ d\Omega = \int \mathbf{j} \times \mathbf{B}\ d\Omega = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{2.11}$$

2.5.1 Forza tra fili paralleli

Combinando l' equazione 2.11 con la 2.9 otteniamo la forza per unità di lunghezza tra due fili infiniti paralleli, posti a distanza s e giacenti in direzione z, percorsi da correnti I_1 e I_2. Per la forza sul filo 1 si ha:

$$\mathbf{F}_1/L = I_1/L \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi s L} \int d\mathbf{l} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{s}})$$

dove l'integrale viene calcolato su di un tratto del filo 1 di lunghezza L e $\hat{\mathbf{s}}$ è un versore che punta dal filo 2 al filo 1. È immediato rendersi conto che il doppio prodotto vettore, nelle condizioni date, genera un vettore di modulo dl, la cui direzione è perpendicolare ad entrambi i fili e che passa per essi. Il verso dipende dalla direzione delle correnti: se sono concordi punta verso il filo 2, se sono discordi punta nel verso opposto.

È chiaro che lo stesso risultato si ottiene scambiando i ruoli dei due fili, cioè gli indici 1 e 2. Possiamo perciò concludere che *due fili percorsi da corrente si attraggono se le correnti sono concordi, si respingono se sono discordi.* Il modulo della forza per unità di lunghezza, uguale sia per il filo 1 che per il 2, è

$$F/L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi s}. \tag{2.12}$$

Prendiamo un caso abbastanza tipico: $I_1 = I_2 = 1$ A e $s = 0.1$ m. In questo caso abbiamo che $F/L = 2\ 10^{-6}$ N/m, una forza molto piccola: infatti la forza su di un metro di filo in questo caso corrisponde al peso di un corpo di circa 0.2 milligrammi. Il filo stesso pesa ben di più. Nella sezione 1.1.2 si è visto che la forza elettrica per unità di lunghezza tra fili in cui si abbia un minimo sbilanciamento di carica (una parte su un miliardo) vale $5\ 10^5$ N/m. Una differenza di undici ordini di grandezza rispetto al caso magnetico presentato qui!

Possiamo concluderne che le interazioni magnetiche sono in realtà piuttosto deboli, e che sono osservabili più facilmente rispetto alle interazioni elettriche per il solo fatto che queste ultime, essendo generate da cariche di due segni opposti, sono schermate facilmente (ovvero, è difficile trovare una carica positiva/negativa libera perchè viene quasi sempre neutralizzata dall' accorrere di cariche di segno opposto). Il campo magnetico invece, essendo generato da correnti, non permette una schermatura così facile.

2.5.2 Forze e momenti su spire quadrate

Consideriamo una spira rigida in foggia di quadrato $ABCD$ di lato a, e percorsa da una corrente I. Sia la spira immersa in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$ e supponiamola orientata in modo tale che i lati AB e CD siano paralleli all' asse z mentre i lati BC e DA vi siano perpendicolari e formino un angolo φ con l'asse x, e pertanto uno di $\theta = \pi/2 - \varphi$ con l'asse y. Il vettore $\mathbf{S} = a^2\hat{\mathbf{n}}$ che descrive la superficie orientata della spira è quindi anch'esso perpendicolare all'asse z e forma un angolo $-\pi/2 + \varphi = -\theta$ (o $\pi/2 + \varphi = \pi - \theta$, a seconda del senso di circolazione della corrente: qui si considererà $-\theta$) con l' asse x.

È facile vedere che la forza sul lato BC è perpendicolare al lato ed è uguale ed opposta a quella sul lato DA; queste forze pertanto tendono solo a deformare la spira, che però abbiamo supposto rigida, e pertanto si annullano semplicemente tra loro. Diversa è la situazione per le forze sui lati AB e CD: queste forze formano una coppia di braccio $a \sin\theta$ e di intensità IaB. Sulla spira pertanto agisce una forza di risultante nulla ma un momento pari a

$$\tau = a^2 IB \sin\theta \hat{\mathbf{z}} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} \tag{2.13}$$

e che pertanto tende a rendere paralleli $\mathbf{S}$ e $\mathbf{B}$ (il momento della forza è nullo quando il piano della spira è perpendicolare a B). Se la spira è composta da N avvolgimenti invece che da uno, il valore di τ naturalmente deve essere moltiplicato per N.

Se all'istante in cui $\mathbf{S}$ e $\mathbf{B}$ sono all'incirca paralleli invertiamo il senso della corrente o il verso del campo magnetico, la spira viene sospinta a fare un altro mezzo giro. Ripetendo indefinitamente il procedimento abbiamo un dispositivo che permette di fornire un momento torcente in maniera continua. Questo dispositivo è alla base di ogni *motore elettrico*.

Il momento magnetico

Definiamo *momento di dipolo magnetico*, o semplicemente *momento magnetico* il vettore

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} \, d\Omega. \tag{2.14}$$

Il momento magnetico, che si misura in m^2 C s^{-1}, nel caso di spire piane si riduce ad un vettore diretto lungo l'asse $\hat{\mathbf{n}}$ della spira, con verso dato dalla regola della mano destra, e di modulo pari al prodotto dell'area S per la corrente; infatti

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2}\int \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = IS\hat{\mathbf{n}} = I\mathbf{S} \tag{2.15}$$

visto che il modulo di $\frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$ è l'areola spazzata dal vettore $\mathbf{r}$ quando la sua estremità si sposta di $d\mathbf{l}$ (*Esercizio:* verificarlo) e la direzione e il verso sono stabiliti dalla regola della mano destra.

Utilizzando questa definizione possiamo riscrivere la 2.13 come

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \tag{2.16}$$

Integrando la 2.13 rispetto a θ possiamo anche scrivere che l'energia di una spira in un campo magnetico uniforme è

$$E = \int \tau_z d\theta = -mB\cos\theta = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \tag{2.17}$$

e risulta ovviamente minima quando $\mathbf{m}$ e $\mathbf{B}$ sono paralleli. Si confrontino le 2.16 e 2.17 con le corrispondenti, ed analoghe, relazioni valide per dipoli elettrici in un campo elettrico.

Il concetto di momento magnetico risulta utile in molti casi; lo vedremo, per esempio, nei paragrafi 2.7 e 2.8.

2.6 Il potenziale vettore

Dall'equazione di Ampère segue che il campo magnetico non può essere derivato da un potenziale nello stesso senso in cui il campo elettrico è derivato dal potenziale scalare. Questo sarebbe infatti possibile solo se il rotore di $\mathbf{B}$ fosse ovunque nullo. L'equazione 2.4 però ci dice che è sempre possibile trovare un campo vettoriale $\mathbf{A}$, detto *potenziale vettore*, e misurato in T m, tale che

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{2.18}$$

Infatti la divergenza di un rotore è sempre nulla. Si noti che l'equazione 2.18, essendo un'equazione differenziale a derivate parziali, determina $\mathbf{A}$ soltanto a meno di una funzione arbitraria, così come il potenziale elettrostatico ϕ è determinato a meno di una costante arbitraria. Tale funzione arbitraria, in considerazione del fatto che $\nabla\times\nabla\Lambda = 0$, può essere scritta come $\nabla\Lambda$, dove Λ è una qualunque funzione scalare delle coordinate e del tempo. Sfrutteremo spesso questa possibilità.

A volte è possibile trovare $\mathbf{A}$, noto $\mathbf{B}$, mediante una semplice ispezione della forma di quest' ultimo. Per esempio si verifica immediatamente che un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse z, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, può essere derivato da un potenziale vettore $\mathbf{A} = B/2\,(-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})$, ma anche da $\mathbf{A}' = B\,(x\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}/2)$ (*Esercizio:* verificare che $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ è effettivamente il gradiente di una funzione Λ e dare l'espressione esplicita di Λ). Si noti che in questo caso $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ma che $\nabla \cdot \mathbf{A}' \neq 0$.

2.6.1 L'equazione per il potenziale vettore

È naturalmente importante trovare un' equazione che permetta di determinare $\mathbf{A}$, note le correnti, nel caso generale. Questo lo si ottiene partendo dall'equazione di Ampère in forma differenziale. Inserendo l'equazione 2.18 nella 2.6 si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Utilizzando l' identità vettoriale C.11 e sfruttando l'arbitrarietà di $\mathbf{A}$ con l'imporre – si dimostra che è sempre possibile – che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, otteniamo infine l'equazione cercata:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{2.19}$$

La soluzione formale dell'equazione 2.19 può essere calcolata esplicitamente e rigorosamente ma qui ci limitiamo ad un semplice argomento per analogia. Possiamo infatti notare che l'equazione 1.16 è assai simile alla 2.19 a parte il fatto di essere una relazione vettoriale e non scalare. Confrontando le equazioni 1.16, 1.17 e 2.19 possiamo quindi immaginare che la soluzione di quest'ultima sia:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.20}$$

che in effetti risulta essere l'espressione corretta.

L'equazione 2.20 è del tutto generale ma, come capita spesso in questi casi, risulta scomoda da applicare direttamente. È in generale opportuno trovare delle formule più pratiche da applicare in casi particolari. Uno di questi, particolarmente importante, è quello in cui la densità di corrente è concentrata entro fili conduttori, in quanto è questo il caso di interesse per la teoria dei circuiti elettrici. Se ricordiamo che per un filo $\mathbf{j}\ d\Omega = I d\mathbf{l}$, dalla 2.20 si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{2.21}$$

Non ci si lasci confondere dalla forma dell'equazione 2.21: l'integrale è calcolato rispetto ad $\mathbf{r}'$, che indica punti sul filo, ed $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{r}')$. Inoltre, siccome stiamo trattando casi stazionari, l'equazione è valida solo per circuiti chiusi: se il circuito fosse aperto, ad una estremità avremmo uno svuotamento di carica ed all'altra un accumulo, contrariamente all'ipotesi di stazionarietà.

2.7 La legge di Biot e Savart

Già l' equazione 2.21 è una semplificazione importante, ma è possibile ottenere direttamente un'espressione per $\mathbf{B}$ che spesso risulta utile. Prendendo il rotore della 2.21 ed usando la 2.18 si ha infatti

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \nabla \times \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

visto che le derivate che compongono il rotore agiscono su funzioni del "punto campo" $\mathbf{r}$ e non del "punto sorgente" $\mathbf{r}'$ (pertanto non agiscono nemmeno su $d\mathbf{l}$) rispetto a cui è calcolato l'integrale.

Per calcolare il secondo membro osserviamo che, posto $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, si ha $\partial(1/s)/\partial x = \partial s/\partial x\ \partial(1/s)/\partial s = -s_x/s^3$ ed analogamente per y e z. Allora la componente x dell'integrando diventa

$$\nabla \times d\mathbf{l}/s\big|_x = \left| \begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ dl_x/s & dl_y/s & dl_z/s \end{array} \right|_x = dl_y s_z/s^3 - dl_z s_y/s^3 = d\mathbf{l} \times \mathbf{s}/s^3\big|_x .$$

Al posto del rotore rimane dunque un semplice prodotto vettore tra $d\mathbf{l}$ e $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{s}}{s^3}. \tag{2.22}$$

Questa equazione è nota come *legge di Biot e Savart*[3].

2.7.1 Filo infinito

Utilizziamo la legge di Biot e Savart per ricalcolare il campo magnetico generato dal solito filo rettilineo infinito percorso da corrente. Data la simmetria del sistema, se prendiamo il filo come giacente lungo l'asse z, possiamo senza perdere di generalità considerare un punto campo di coordinate $(x, y, 0) = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ e ad una distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dal filo.

Allora la distanza s tra il punto campo ed il punto sorgente si esprime in termini di r e dell'angolo θ fra $\mathbf{s}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ come $s \sin\theta = r$, e la posizione lungo il filo come $l = -s\cos\theta = -r\cot\theta$ (il segno negativo viene dal fatto di prendere negative le coordinate al di sotto del piano $z = 0$). Perciò $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}}\, r d\theta/\sin^2\theta$. Si può dare anche l'espressione del vettore $\mathbf{s} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}l$,

[3] A volte l'espressione 2.22 è indicata col nome di *formula di (Ampère-)Laplace*, o anche come *prima formula di Laplace*, ed il nome di Biot e Savart è riservato alla 2.8 o alla 2.9.

da cui $d\mathbf{l} \times \mathbf{s} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{s}\ rd\theta/\sin^2\theta = (-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})\, rd\theta/\sin^2\theta$. L'integrale 2.22 diventa dunque

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})\,\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta = (-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}$$

che coincide con la 2.9.

2.7.2 Spira

Consideriamo una spira circolare di raggio a che giaccia nel piano yz, percorsa da una corrente I. Il calcolo del campo in un punto generico è possibile ma complicato; ci limitiamo al calcolo lungo l'asse della spira, l'asse x, ipotizzando che la corrente scorra in senso orario se vista da un osservatore con la testa in direzione dell'asse x positivo.

La simmetria indica subito che il campo $\mathbf{B}$ su tale asse deve avere direzione $\hat{\mathbf{x}}$; infatti ogni contributo perpendicolare ad essa provenente da un tratto di spira viene cancellato da un contributo uguale ed opposto da un tratto di spira diametralmente opposto.

Per calcolare il campo parallelo ad $\hat{\mathbf{x}}$ nel punto x, vediamo per prima cosa che $|d\mathbf{l} \times \mathbf{s}| = s\ dl = \sqrt{a^2 + x^2}\ dl$, e con direzione angolata di un angolo tale che $s\cos\theta = a$, dove θ è anche l'angolazione rispetto all'asse x. Perciò $\mathbf{B}$ vale

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\cos\theta dl}{s^2}\ \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi s^3}\int dl\ \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}\ \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi(a^2 + x^2)^{3/2}} \tag{2.23}$$

dove $\mathbf{m}$ è il momento magnetico della spira. A grande distanza, a è trascurabile rispetto a x e si ottiene

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi x^3}. \tag{2.24}$$

Si vede che il campo a grandi distanze dipende esclusivamente dal valore di $\mathbf{m}$ e non separatamente dai dettagli della geometria o dal valore di I (si dimostra che in una direzione generica $\hat{\mathbf{r}}$ il campo vale $\mu_0[3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]/4\pi r^3$, in perfetta analogia col caso elettrostatico).

Questo è solo un esempio dello sviluppo del campo magnetico in multipoli (in completa analogia col caso elettrico), uno sviluppo in serie in cui ogni termine dello sviluppo decade via via più velocemente con la distanza ed in cui il termine di dipolo è semplicemente il primo termine. A differenza del caso elettrico, infatti, in quello magnetico il termine di monopolo non esiste. Pertanto, eccettuato il caso in cui $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, il campo magnetico di un sistema di correnti stazionarie a grandi distanze tende asintoticamente al campo di dipolo. Questo si può verificare, per esempio, calcolando i campi generati da spire piane di altra forma (*Esercizio:* spira quadrata) e verificando che a grandi distanze hanno tutti esattamente la forma 2.24.

2.7.3 Solenoide

Come abbiamo già visto, un solenoide può essere visto come una serie di spire identiche coassiali collegate in parallelo. Il campo al suo interno è quindi calcolabile come somma dei campi generati da tutte le spire. Posto parallelo all'asse x l'asse del solenoide e presa $x = 0$ la coordinata di un punto lungo l'asse posto a distanza L dall'estremità sinistra ed L' da quella destra, si vede subito che il campo in quel punto è la somma di tanti campi paralleli all'asse, dunque è anch'esso parallelo all'asse. Il suo modulo si calcola sommando i contributi di tutte le spire. Ricordando che ci sono $n = N/L$ spire per unità di lunghezza, vediamo che in un tratto dx ci sono $dN = ndx$ spire, ognuna delle quali fornisce un contributo dato dalla 2.23, per cui:

$$B = \int_{-L}^{L'} \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} n\ dx.$$

L'integrale si calcola con la sostituzione $x = a \tan t$:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\arctan(L/a)}^{\arctan(L'/a)} \frac{1 + \tan^2 t}{(1 + \tan^2 t)^{3/2}}\ dt = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\arctan(L/a)}^{\arctan(L'/a)} \cos t\ dt$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \sin t \Big|_{-\arctan(L/a)}^{\arctan(L'/a)} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{L/a}{\sqrt{1 + (L/a)^2}} + \frac{L'/a}{\sqrt{1 + (L'/a)^2}} \right].$$

Per $L, L' \to \infty$ il risultato coincide, come deve, con la 2.10. Si vede anche che il campo all'estremità di un solenoide semiinfinito (es. $L \to \infty, L' = 0$) è la metà di quello all'interno di uno infinito. (*Esercizio:* trovare il termine correttivo principale, nel caso di un solenoide finito con $L = L'$, al campo di un solenoide infinito).

Si sarà notato che laddove si è abbastanza fortunati da poter invocare considerazioni di simmetria l'utilizzo della legge di Ampère permette calcoli più rapidi e semplici.

2.8 Cenni sul magnetismo nella materia

2.8.1 I tre vettori magnetici

Quando un materiale è soggetto ad un campo magnetico esterno — e, come vedremo, a volte anche quando non lo è — si ha un effetto simile a quello della polarizzazione dei dielettrici nel caso elettrostatico, ovvero il materiale stesso genera un campo magnetico che si aggiunge a quello esterno. Questo effetto viene detto *magnetizzazione*. A differenza però del caso elettrostatico, in cui il campo addizionale è sempre diretto in direzione opposta a quello esterno, nel caso magnetostatico la magnetizzazione può creare un campo sia opposto a quello esterno, ed in questo caso si parla di *diamagnetismo*, sia concorde ad esso, e si parla allora di *paramagnetismo* o *ferromagnetismo*.

La magnetizzazione si può descrivere tramite il *vettore magnetizzazione* $\mathbf{M}$, ovvero il momento magnetico del materiale per unità di volume, che si misura in A m^{-1}. A partire da $\mathbf{M}$ e da $\mathbf{B}$ si definisce un terzo vettore $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, detto *campo magnetizzante*[4]. L'importanza di questo terzo vettore sta nel fatto che si può dimostrare che in funzione di esso la legge di Ampère assume una forma più semplice:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libera} \tag{2.25}$$

e in forma integrale

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{libera} \tag{2.26}$$

dove il pedice "libera" indica che non si considerano le correnti di magnetizzazione all'interno del materiale; in pratica, si considerano solo le correnti accessibili direttamente allo sperimentatore tramite fili ecc.. (Si confronti con la legge di Gauss espressa come $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{libera}$.) Si tratta di una relazione del tutto generale; si osservi però che non si può dare una relazione altrettanto generale per la divergenza di $\mathbf{H}$ — non è un campo solenoidale, se non nel vuoto — per cui è necessario conoscere la *relazione costitutiva* che lo collega con $\mathbf{B}$.

A questo fine, se si assume che $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{H}$ siano paralleli e proporzionali tra loro, si definisce un coefficiente χ, adimensionale, detto *suscettibilità magnetica*, dato da $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$. Tramite la relazione $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1+\chi)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ si definisce infine un nuovo coefficiente μ detto *permeabilità magnetica* che gioca un ruolo simile alla costante dielettrica ϵ in elettrostatica:

[4] O semplicemente "campo H". Tradizionalmente era il vettore $\mathbf{H}$ ad essere chiamato campo magnetico, e questo uso lo si trova ancora su alcuni testi.

indica cioè di quanto viene alterato il campo magnetico in presenza di un materiale. Infatti

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = I_{libera} \Rightarrow \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu I_{libera}$$

e confrontandola con la 2.7 si vede che l'effetto del materiale sul campo generato da una corrente data è di sostituire μ_0 con μ. (Ancora, è istruttivo confrontare con la legge di Gauss espressa come $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = q_{libera}/\epsilon$.)

Si noti che queste relazioni sono del tutto generali — si tratta più che altro di definizioni — purché valgano due ipotesi: che $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{H}$ siano paralleli, e che la relazione tra essi sia lineare. La prima può essere eliminata permettendo all'occorrenza che χ sia un tensore; la seconda, come si vedrà tra poco, è violata in casi importanti ed il discorso si fa più delicato.

A differenza del caso elettrostatico non è detto che la *permeabilità relativa* $\mu_r = \mu/\mu_0$ sia sempre maggiore o sempre minore di 1. Infatti, come già detto, esistono sia materiali *diamagnetici*, con $\chi < 0 \Rightarrow \mu_r < 1$, che *paramagnetici*, con $\chi > 0 \Rightarrow \mu_r > 1$ (i materiali *ferromagnetici* meritano un discorso a parte). I valori tipici di χ, per paramagneti e diamagneti, sono dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$, per cui μ_r è nella maggioranza dei casi praticamente uguale ad 1. Si confronti questo con ϵ_r che raggiunge facilmente valori elevati; per l'acqua, per esempio, $\epsilon_r = 78$.

2.8.2 Il meccanismo della magnetizzazione

Una spiegazione microscopica del fenomeno della magnetizzazione non può essere data in termini semplici. Bisogna tener conto che il magnetismo nella materia è un fenomeno che richiede *necessariamente* una trattazione quantistica; si può dimostrare facilmente che in un sistema all'equilibrio termico governato dalla meccanica classica non è possibile avere magnetizzazione di alcun tipo. Molte trattazioni che si trovano sui libri di testo sono ingannevoli, perché sebbene formalmente corrette non dimostrano ciò che sembrano voler dimostrare.

In termini molto generici, si può dire che la magnetizzazione nella materia è dovuta a due tipi di fenomeno:

- Magnetismo orbitale. Gli orbitali e le energie degli elettroni nel materiale vengono leggermente alterati dalla presenza del campo magnetico e di conseguenza gli elettroni, essendo particelle cariche in movimento, a loro volta generano un campo magnetico.

- Magnetismo di spin. Gli elettroni (anche i nuclei, ma qui importano poco) possiedono un momento magnetico intrinseco. Sottoposti ad un campo magnetico questi spin tendono ad allinearsi lungo la direzione di esso generando di conseguenza un campo netto aggiuntivo.

Nei materiali gli elettroni si raccolgono in quelle che sono chiamate *bande di energia*. Se tutti gli elettroni appartengono a bande totalmente riempite (*shell chiuse*, nel linguaggio della fisica atomica), il che accade negli isolanti e nei semiconduttori, si ha diamagnetismo; se alcuni elettroni appartengono a bande parzialmente riempite (*shell aperte*), come nei metalli, si ha spesso paramagnetismo. Spesso, non sempre, perché un contributo diamagnetico lo si ha comunque (per via delle shell chiuse) e tutto dipende da quale dei due è più forte.

Il caso dei ferromagneti è un po' diverso. In essi il magnetismo è essenzialmente di spin ed esistono interazioni - elettrostatiche, non magnetiche - fra gli elettroni che tendono a mantenere allineati gli spin stessi. Evidentemente se si applica un campo magnetico esterno, più spin elettronici si allineeranno lungo di esso generando un campo indotto più forte quanto più forte è il campo esterno inducente. In virtù delle interazioni elettroniche acccennate in precedenza, questo allineamento ed il relativo campo magnetico indotto rimane, almeno in parte, anche quando il campo esterno viene rimosso (*isteresi magnetica*), dando origine ai magneti permanenti.

Perché gli spin non sono sempre necessariamente allineati - in altre parole, perché un pezzo di ferro dolce non è sempre una calamita? Le ragioni sono fondamentalmente due.

Da una parte, c'è l'agitazione termica. Il moto caotico degli atomi squassa il sistema di spin, un po' come l' agitare una cassetta piena di biglie le mette in disordine. Man mano che la temperatura sale, la tendenza degli spin ad allinearsi viene soffocata e al di sopra di una temperatura critica T_c, detta *temperatura di Curie*, scompare del tutto ed il materiale è completamente privo di magnetizzazione.

Dall'altra parte, l'effetto del campo magnetico indotto è stato finora del tutto trascurato. Ogni elettrone contribuisce al campo magnetico a seconda della direzione del proprio spin; se gli spin sono antiparalleli gli effetti si cancellano, ma se sono paralleli si sommano; è proprio questo il campo magnetico indotto. Il contributo è piccolo, e finché gli spin allineati sono pochi si può trascurare. Però l'energia magnetica (quella che si deve spendere per generare un campo magnetico H) è proporzionale ad H^2.Quando il numero di spin allineati supera una certa soglia, la "spesa magnetica" risulta dominante ed il sistema trova sfavorevole, dal punto di vista energetico, allineare gli spin. Il risultato netto è che nel materiale si formano zone, dette *domini magnetici*, in cui gli spin sono allineati in un verso, ma ai bordi (*muri di Bloch*) si girano e si passa ad un altro dominio in cui sono allineati nel verso opposto. Questo permette di avere tanti spin orientati nel verso giusto per massimizzare il guadagno dovuto allo scambio, ma al tempo stesso di minimizzare il campo magnetico macroscopico, perché ogni dominio genera un campo che tende ad essere cancellato dal campo generato dal dominio adiacente.

Se si applica un campo magnetico esterno i domini paralleli al campo esterno saranno favoriti energeticamente rispetto agli altri, dunque si espanderanno a discapito dei secondi; il materiale si magnetizza in direzione parallela al campo esterno. Se poi tale campo è veramente intenso, tutti gli spin puntano nella sua direzione e da quel punto in poi la magnetizzazione non cresce più; è la *saturazione*.

Quando viene tolto il campo esterno, la situazione dovrebbe tornare in equilibrio; però di fatto la riconversione non è facile, ed il magnete rimane intrappolato in una situazione in cui i domini che puntano in una direzione rimangono in maggioranza. Questo fenomeno, detto *isteresi magnetica*, è alla base dell'esistenza dei magneti permanenti: le calamite.

Capitolo 3

Elettrodinamica

3.1 L'induzione elettromagnetica

Finora sono stati considerati solo campi statici. Si è visto che in queste condizioni i campi elettrici e magnetici sono due entità indipendenti tra loro e non vi è alcuna legge, eccettuata la forza di Lorentz, che li vede comparire insieme: essi possono essere determinati in modo separato, il campo elettrico da un lato e quello magnetico dall'altro.

Quando si ammette che i campi possano variare nel tempo le cose cambiano radicalmente. I due campi elettrico e magnetico risultano essere in stretto collegamento, come si poteva sospettare dal fatto che le sorgenti di $\mathbf{E}$ sono le cariche e quelle di $\mathbf{B}$ le correnti, ovvero cariche in movimento, e che entrambi i campi agiscono sulle cariche elettriche. Da qui in poi quindi non si potrà più a rigore parlare di campi elettrici e magnetici separatamente, ma solo di un'unica entità nota come *campo elettromagnetico*.

3.1.1 Campo variabile, circuito fisso

Ai tempi in cui il fisico inglese Michael Faraday era attivo era già noto che una corrente genera quello che noi ora chiamiamo campo magnetico[1]. Egli si chiese se, così come una corrente genera un campo magnetico, un campo magnetico genera una corrente. Dopo molti sforzi trovò che la risposta sperimentale è negativa: anche campi molto intensi non producono correnti misurabili. Trovò anche, però, che un campo magnetico *variabile nel tempo* genera una corrente elettrica. Ricordiamo che per fare circolare una corrente c'è bisogno di un campo elettrico: sappiamo infatti che un campo magnetico può solo variare la velocità delle particelle e non aumentarne (o diminuirne)

[1] Il concetto ed il nome stesso di campo lo dobbiamo a lui.

il modulo, quindi non può metterle in moto. Dalle osservazioni di Faraday si evince quindi che un campo $\mathbf{B}$ variabile col tempo genera una *forza elettromotrice*, o *tensione*, e precisamente risulta che tale tensione è pari alla variazione col tempo, cambiata di segno, del flusso di $\mathbf{B}$ concatenato col circuito:

$$V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_B \tag{3.1}$$

dove il flusso di $\mathbf{B}$ è appunto calcolato su di una superficie avente come bordo (o "che si appoggia a") il percorso sul quale si calcola l'integrale a primo membro. Questa legge è nota come *legge di Faraday(-Henry)*.

È lecito chiedersi: quale delle infinite superfici aventi tale percorso come bordo bisogna scegliere? Una qualunque; come si è visto nella sezione 2.3 il risultato non dipende da tale scelta.

3.1.2 Campo fisso, circuito in moto

Consideriamo adesso il caso, in apparenza del tutto diverso, di una sottile sbarra metallica di lunghezza l che si muove con velocità $\mathbf{v}$, misurata in un determinato sistema di riferimento S, che supponiamo inerziale, e immersa in un campo magnetico $\mathbf{B}$ costante e uniforme. Per semplicità — ma nulla nel ragionamento dipende crucialmente da questo — poniamo che $\mathbf{v}$ sia costante e che i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ e la direzione della sbarra $\hat{\mathbf{l}}$ siano tutti perpendicolari tra loro e formino una terna destrorsa ($\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{B}}$). Le cariche mobili nella sbarra potranno, in pratica, spostarsi solo nella direzione parallela ad essa. Per la legge di Lorentz 2.1, ognuna di esse sentirà una forza pari a $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB\hat{\mathbf{l}}$.

Mettiamoci ora nel sistema di riferimento S' solidale con la sbarra. Qui $\mathbf{v} = 0$ e pertanto non si ha forza magnetica. Per il principio di relatività però la forza misurata in S', che è anch'esso un sistema inerziale, deve essere la stessa che in S; se ne conclude che in S' esiste una forza $\mathbf{F} = qvB\hat{\mathbf{l}}$, sentita solo dalle cariche, che si esercita anche sulle cariche ferme. Deve perciò, per definizione, trattarsi di una forza elettrica, derivante da un campo elettrico $\mathbf{E}' = \mathbf{F}/q = vB\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Quindi *il campo magnetico in S è visto come campo elettrico in S'*.

Immaginiamo che la sbarra formi il quarto lato di un circuito, reale od immaginario, di forma rettangolare. Il lato opposto alla sbarra ha evidentemente lunghezza l; quelli perpendicolari avranno lunghezza $a + vt$, con a un valore arbitrario che scegliamo positivo (e siccome v è il modulo di un vettore, quindi anch'esso positivo, stiamo considerando un circuito che si ingrandisce). Allora la forza elettromotrice nel circuito vale, visto che $\mathbf{E}'$ è diverso da zero solo sulla sbarra ed è ivi uniforme, $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -E'l = -Blv$, dove il segno meno deriva dal fatto che il verso di percorrenza positivo del circuito è antiorario se visto da un osservatore orientato come $\mathbf{B}$.

Il flusso magnetico all'interno di questo circuito risulta funzione del tempo: $\Phi_B = BS = Bl(a + vt)$, e la sua derivata è $d\Phi_B/dt = Blv$. Pertanto anche in questo caso, oltre che in quello del circuito fisso, abbiamo

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Il ragionamento appena svolto può essere generalizzato a tutti i possibili casi di variazione del flusso, che però si riducono in essenza ai due visti finora (il ragionamento lo si può trovare nei testi indicati in Bibliografia). La legge di Faraday dunque vale sempre: *si ha forza elettromotrice ogniqualvolta varia il flusso magnetico attraverso un circuito, qualunque sia la causa di questa variazione, e tale forza elettromotrice è sempre data dalla 3.1.*

L'equazione 3.1 naturalmente ammette una forma differenziale

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.2}$$

che ci dice, tra le altre cose, che la legge di Faraday non è legata all'esistenza di un circuito, ma è *una relazione tra i campi valida in generale.*

Segue inoltre da questa legge che al di fuori del caso statico $\mathbf{E}$ non è più irrotazionale o, che è lo stesso, che il suo integrale lungo una superficie chiusa non è più necessariamente nullo. A sua volta questo implica che in generale non è possibile ricavare $\mathbf{E}$ come gradiente di una funzione scalare. La questione dei potenziali deve quindi essere riesaminata da capo, come vedremo nel seguito.

3.1.3 La conservazione dell'energia

Nel caso appena visto della sbarra che si muove, la 2.11 ci dice che la sbarra stessa è soggetta ad una forza. Infatti, ponendo per fissare le idee $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{z}}$, si ha

$$\mathbf{F} = I\mathbf{a} \times \mathbf{B} = I\left(-a\hat{\mathbf{y}} \times B\hat{\mathbf{z}}\right) = -IaB\hat{\mathbf{x}},$$

ovvero una forza diretta in modo tale da *opporsi* al movimento della sbarra, quindi alla variazione del flusso magnetico. Perché la sbarra si possa muovere di velocità costante è quindi necessario applicare una forza eguale ed opposta, o in altri termini spendere una potenza (energia per unità di tempo) pari a $W = |\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}| = IaBv$.

Dove va a finire questa energia? Immaginiamo per esempio che la sbarra sia connessa ad un circuito di resistenza R; allora la corrente vale $I = V/R = aBv/R$ e la potenza da fornire è $W = IaBv = a^2B^2v^2/R$. Sulla resistenza peraltro si dissipa una potenza pari a $P = RI^2 = R\ a^2B^2v^2/R^2 = W$. Il bilancio energetico dunque è in pareggio: l'energia fornita per far muovere la sbarra viene tutta dissipata sulla resistenza, e viceversa.

Si noti che per questo è essenziale che la legge di Faraday abbia il segno negativo davanti alla derivata del flusso (un risultato detto *legge di Lenz*). Se così non fosse, la sbarra riceverebbe una forza non opposta, ma concorde al movimento, e che tenderebbe a farla accelerare invece che rallentare. Di conseguenza la sbarra si autoaccelererebbe: non appena messa in moto aumenterebbe spontaneamente la propria velocità senza più bisogno di una forza esterna, producendo energia dal nulla.

Si noti che questo esempio ci mostra che *per variare il flusso magnetico bisogna spendere energia*. Questa conclusione è valida non solo per il caso qui esposto del circuito in moto, ma in generale.

3.1.4 L'alternatore

Consideriamo ora una spira di area S e costituita da N avvolgimenti che ruota in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$ con velocità angolare costante ω attorno ad un asse perpendicolare al campo. Il flusso magnetico sarà dato, scegliendo opportunamente l'origine dei tempi, da $\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \omega t$. Su ogni avvolgimento della spira viene dunque generata una tensione pari a $V = BS\omega \sin \omega t$, e la tensione totale è dunque

$$V = NBS\omega \sin \omega t.$$

Questo è il modo più semplice di generare una tensione, dunque una corrente elettrica. Dispositivi di questo tipo sono i prototipi dei generatori di tensione (corrente), e come si vede la tensione (corrente) generata è *alternata*, vale a dire cambia periodicamente verso, da cui il nome di *alternatore* dato al dispositivo. Per generare corrente continua $I =$ costante con questa tecnica è necessario ricorrere a qualche accorgimento.

Per generare la tensione è necessario spendere energia. Infatti si ottiene una corrente, e questo richiede una potenza istantanea $P(t) = V(t)I(t) = I(t)NBS\omega \sin \omega t$. Da dove viene questa energia? Da quanto detto nel paragrafo precedente, deve derivare dall'energia necessaria per mantenere in moto la spira; sappiamo infatti dall'esempio della sbarra che per muovere un conduttore in un campo magnetico c'è bisogno di applicare una forza. L'energia non potrebbe venire dal campo magnetico: basti pensare che questo potrebbe essere generato (anche se nei generatori pratici di solito non è così) da dei magneti permanenti, che proprio in quanto permanenti non necessitano di energia per mantenere il loro campo. Deve quindi venire da una forza esterna.

Calcoliamo dunque l'energia trasferita alla spira nell'unità di tempo. Derivando la 2.17 si ottiene

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = I(t)NSB\omega\sin\omega t$$

che è proprio l'energia richiesta per mantenere in circolo la corrente. Il generatore genera energia elettrica, ma non energia *tout-court* (altrimenti avremmo il moto perpetuo): si limita a convertire l'energia fornita per far girare la spira — che può derivare da una turbina a vapore alimentata a carbone, petrolio o energia nucleare, o da turbine ad acqua come nelle centrali idroelettriche, o da pale di mulini a vento, o dal motore di un'automobile, o magari dalla forza muscolare — in energia elettrica che può poi essere facilmente distribuita.

3.2 Induttanza

3.2.1 Autoinduzione

In tutti gli esempi visti finora, il flusso del campo magnetico è risultato proporzionale alla corrente I. Pertanto in casi simili, piuttosto frequenti, quando $\mathbf{B}$ varia col tempo la tensione V è proporzionale a dI/dt:

$$V = L\,\frac{dI}{dt}. \tag{3.3}$$

Il coefficiente L è chiamato *coefficiente di autoinduzione* e si misura in Henry (unità già incontrata in precedenza nella definizione della permeabilità magnetica) $\mathrm{H} = \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg}\ \mathrm{C}^{-2}$. Dispositivi con $L \neq 0$ sono chiamate induttanze; la tipica induttanza è il solenoide, per il quale nel caso ideale il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza vale $L/l = \mu_0 n^2 S$ (*Esercizio*: dimostrarlo).

Le induttanze accumulano energia, come i condensatori, ma a differenza di questi ultimi, in cui l'energia è dovuta all'attrazione elettrostatica tra le cariche sulle armature, nelle induttanze l'energia è dovuta all'opposizione (dovuta all'induzione elettromagnetica) che esercita il flusso al cambiamento della propria intensità, e che in questi casi è equivalente a dire che vi è un' opposizione della corrente al cambiamento della propria intensità. Il valore dell'energia accumulata lo si ottiene facilmente considerando che, se $v = v(t)$ e $i = i(t)$ sono rispettivamente la tensione e la corrente istantanee nell'induttanza, l'energia necessaria per instaurare una corrente I partendo dallo stato di assenza di corrente è

$$U = \int_0^I P(t)\ dt = \int_0^I v(t)i(t)\ dt = L\int_0^I i(t)\frac{di(t)}{dt}\ dt = \frac{1}{2}LI^2. \qquad (3.4)$$

Si noti l'affinità della 3.4 con l'equazione 1.26 che esprime l'energia accumulata in un condensatore $U = q^2/2C$, mentre l' analogia con la legge di Joule $P = RI^2$ è ingannevole in quanto la resistenza non accumula energia ma la dissipa, mentre condensatori ed induttanze (ideali) accumulano energia e non la dissipano.

In effetti le induttanze

$$V = L\ dI/dt,$$

i condensatori

$$V = q/C = \int I\ dt/C,$$

e le resistenze

$$V = RI$$

hanno in comune la caratteristica di avere una relazione *lineare* tra corrente e tensione. Si tratta dei dispositivi lineari più importanti e come tali sono alle fondamenta dell'elettrotecnica. Non si dimentichi però che nell' elettronica hanno amplissimo e fondamentale uso dispositivi *non lineari* come diodi e transistor. Un diodo a semiconduttore, per esempio, ha una relazione tra tensione e corrente data da $I = I_0\left(e^{kV} - 1\right)$, dove I_0 e k sono funzioni della temperatura caratteristiche dello specifico dispositivo.

3.2.2 Mutua induzione. Il trasformatore

Vi è un quarto importante tipo di dispositivo lineare, detto *mutua induttanza*. Nella discussione dell' induttanza non vi è nulla che imponga che il circuito che genera il flusso magnetico debba essere lo stesso nel quale si misura la tensione; se il flusso generato da un dispositivo ne attraversa un secondo, avremo una tensione V_2 nel secondo proporzionale alla variazione di corrente I_1 nel primo:

$$V_2 = M_{21}\ \frac{dI_1}{dt}. \qquad (3.5)$$

ed il coefficiente M_{21} è detto *coefficiente di mutua induzione.* Dispositivi del genere accoppiano circuiti o parti di circuiti che in corrente continua sarebbero separati. L' unità di misura della mutua induttanza ovviamente è ancora l'Henry.

Un esempio semplice ed importante di mutua induttanza è quello di due solenoidi 1 e 2, formati da N_1 e N_2 spire rispettivamente, avvolti attorno allo stesso traferro, di sezione S, piegato a forma di anello. Questa sistemazione permette di convogliare praticamente tutte le linee di campo magnetico generate da un solenoide all'interno dell'altro. Supporremo che si possano utilizzare le formule per solenoidi infiniti. Nel solenoide 1, detto *primario*, di lunghezza l_1, scorre una corrente I_1 che genera un campo magnetico $B = \mu N_1 I_1 / l_1 = \mu n_1 I_1$ e di conseguenza un flusso $\Phi_1 = \mu n_1 S I_1$. Questo flusso è, per l'ipotesi, concatenato con ogni spira del solenoide 2 — il *secondario* — per cui il flusso totale nel secondario è $\Phi_2 = \mu n_1 N_2 S I_1$. La mutua induttanza perciò è $M_{21} = \mu n_1 N_2 S$.

Siccome ai capi del primario si ha una tensione pari a $V_1 = L_1 dI_1/dt = \mu n_1^2 S l_1 dI_1/dt$, tra le due tensioni V_1 e V_2 vale la relazione

$$V_2/V_1 = M_{21}/L_1 = \mu n_1 N_2 S / \mu n_1^2 S l_1 = N_2/N_1. \tag{3.6}$$

Questo dispositivo permette dunque di trasformare una tensione alternata V_1 in un'altra V_2 più alta o più bassa a seconda del numero di avvolgimenti nel primario e nel secondario. È perciò chiamato *trasformatore.* La possibilità di trasformare la tensione a piacimento è probabilmente il maggior vantaggio offerto dalle correnti alternate rispetto a quelle continue.

3.3 Circuiti oscillanti

Il circuito basilare dell'elettrotecnica è il circuito ad una maglia in cui si suppone che le varie caratteristiche del circuito:

- Tensione applicata V
- Resistenza R
- Capacità C
- Induttanza L

siano *concentrate* ciascuna in un elemento circuitale. Perciò si suppone che un'induttanza abbia resistenza trascurabile, che una resistenza abbia capacità trascurabile e così via. È facile scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di un circuito del genere, chiamato per ovvie ragioni *circuito RLC a costanti concentrate*. Basta imporre che la somma algebrica delle variazioni di tensione sia nulla:

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI + q/C \tag{3.7}$$

da cui derivando

$$\frac{dV}{dt} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + I/C. \tag{3.8}$$

Naturalmente si può anche scrivere l'equazione per la carica accumulata (che, per le ipotesi fatte, è tutta sul condensatore)

$$V = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + q/C. \tag{3.9}$$

Si noti l'analogia formale della 3.8 e della 3.9 con l'equazione del moto di un oscillatore meccanico forzato e con attrito: quest'ultima si ottiene da quella per il circuito RLC identificando le varie grandezze seguendo la tabella:

Oscillatore meccanico	3.8			3.9		
Coordinata	x	$\leftrightarrow$	I	x	$\leftrightarrow$	q
Velocità	v	$\leftrightarrow$	dI/dt	v	$\leftrightarrow$	I
Forzante	F_{ext}	$\leftrightarrow$	dV/dt	F_{ext}	$\leftrightarrow$	V
Massa	m	$\leftrightarrow$	L	m	$\leftrightarrow$	L
Coefficiente di attrito	λ	$\leftrightarrow$	R	λ	$\leftrightarrow$	R
Costante elastica	k	$\leftrightarrow$	$1/C$	k	$\leftrightarrow$	$1/C$

Ne segue che l'energia accumulata sull' induttanza corrisponde all'energia cinetica dell'oscillatore e quella sul condensatore all'energia potenziale elastica.

3.3.1 Oscillazioni libere e risonanza

La soluzione della 3.8 si ottiene con i metodi elementari di soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Per prima cosa si risolve l'equazione omogenea associata, che corrisponde ad un sistema senza tensione applicata e che quindi esegue oscillazioni libere (nel parallelo con l'oscillatore meccanico si parlerebbe di un oscillatore armonico smorzato non forzato). L'equazione caratteristica è

$$L\omega^2 + R\omega + 1/C = 0$$

ed ha soluzioni

$$\omega_\pm = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Le soluzioni dell'equazione 3.8, per radici distinte, sono della forma $I(t) = Ae^{\omega_+ t} + Be^{\omega_- t}$ che a seconda del discriminante $\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$ si dividono in due tipi:

- se $\Delta \geq 0$, le $\omega_\pm$ sono radici reali negative ed $I(t)$ ha un decadimento esponenziale, tanto più rapido quanto maggiore è $|\omega_\pm|$; per $\Delta = 0 \Rightarrow \omega_\pm = -\frac{R}{2L}$ si parla di *smorzamento critico* (in questo secondo caso peraltro la soluzione non è una semplice somma di esponenziali);
- se $\Delta < 0$, $I(t)$ ha un andamento oscillante smorzato. Lo smorzamento dipende dalla parte reale di $\omega_\pm$, $-\frac{R}{2L}$: tanto più essa è grande, tanto più rapido è lo smorzamento, mentre la frequenza delle oscillazioni è proporzionale a $\sqrt{-\Delta}$.

Nel caso limite di assenza di smorzamento, $R = 0$, si ha sempre $\Delta < 0$ ed I oscilla con frequenza $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, detta *frequenza propria, autofrequenza* o *frequenza di risonanza* del circuito. La corrente ha un andamento semplicemente sinusoidale con frequenza ω_0, e così pure la carica sul condensatore, ma sfasata di $\pi/2$ rispetto alla corrente. Dalle espressioni 3.4 e 1.26 si vede che l'energia si rimpalla tra l'induttanza e la capacità, esattamente come in un oscillatore armonico si rimpalla tra l'energia cinetica e quella potenziale.

3.3.2 Oscillazioni forzate. Impedenza

Passiamo adesso al caso in cui vi sia una tensione applicata a guidare il circuito. Un modo generale di risolvere questa equazione è esposto nell'Appendice B. Qui usiamo tecniche più elementari e consideriamo il caso in cui tale forza sia periodica e precisamente tale che $V = V_0 \cos \omega t$ e pertanto $dV/dt = -\omega V_0 \sin \omega t$. La soluzione dell'equazione 3.8 è dunque data dall'integrale generale dell'omogenea associata sommato ad un integrale particolare dell'equazione completa che soddisfi alle condizioni iniziali; se ci limitiamo al caso a regime, in cui $t \to \infty$ e pertanto $t >> L/R$, il primo integrale è trascurabile e rimaniamo solo con l'integrale particolare. Quest'ultimo, come è noto, è in questo caso della forma $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ (corrente alternata).

Introducendo questa soluzione di prova nella 3.8 otteniamo le seguenti relazioni:

$$I_0 = V_0/Z;\ \tan\phi = X/R;\ Z = \sqrt{R^2 + X^2};\ X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{3.10}$$

dove X è detta *reattanza* e Z è detta *impedenza*. L'angolo ϕ è detto *angolo di fase* ed indica, com'è evidente, lo sfasamento tra tensione e corrente istantanee. Si vede che l'induttanza tende a dare un $\phi > 0$, ovvero a far si che la corrente "resti indietro" rispetto alla tensione esterna, mentre la capacità ha l'effetto opposto. La resistenza invece da questo punto di vista ha un effetto neutro. L'impedenza è la generalizzazione della resistenza al caso delle correnti alternate e la 3.10 è da parte sua la generalizzazione della legge di Ohm, ma si badi bene che sui tratta di una relazione tra le *ampiezze* di tensione e corrente e non tra i valori istantanei.

Data la presenza di due grandezze rilevanti, l'ampiezza e lo sfasamento, è in effetti impossibile scrivere una relazione del tipo di Ohm tra numeri reali nel caso di correnti alternate. È però possibile farlo introducendo una relazione tra grandezze *complesse*, che di per sé corrispondono a coppie di numeri reali. Definiamo allora una *tensione complessa* $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ ed una *corrente complessa* $\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$; il significato di questa posizione sta nel fatto che le tensioni e le correnti misurabili, che ovviamente sono grandezze reali, possono essere ottenute prendendo, alla fine dei conti, la parte reale (o immaginaria) del risultato. La linearità delle equazioni ci garantisce che il procedimento è corretto. Inserendo queste grandezze nell'equazione del circuito 3.8 si ottiene

$$L\hat{I}'' + R\hat{I}' + \hat{I}/C = \hat{V}' \tag{3.11}$$

ovvero, eseguendo le derivate e raggruppando,

$$\hat{V} = \hat{I}\left[R + i\overbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}^{\hat{X}}\right] = \hat{I}\hat{Z} \tag{3.12}$$

equazione che ha effettivamente la forma della legge di Ohm e vale per i valori istantanei di tensione e corrente. Le grandezze Z e X sono dunque il modulo delle grandezze complesse $\hat{Z}$ e $\hat{X}$.

Si noti che tutte le grandezze nella 3.10 sono funzioni della frequenza ω. In particolare Z è minima $\Rightarrow I_0$ è massima per $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, ovvero proprio per la frequenza di risonanza definita in precedenza. Tracciando un grafico di $I_0 = I_0(\omega)$ si vede che (*Esercizio*) l'ampiezza della corrente ha un picco attorno ad ω_0 tanto più alto quanto più R è piccola, arrivando a

V_0/R alla risonanza esatta. Ne consegue che un circuito RLC con bassa resistenza può essere usato come *sintonizzatore*: le frequenze della forzante molto prossime alla risonanza produrranno una corrente notevole, mentre le altre saranno pressoché ignorate.

3.4 La legge di Ampère-Maxwell

Riprendiamo in considerazione la legge di Ampère 2.6. È ancora valida nel caso in cui la corrente non sia stazionaria ma vari col tempo? Per capirlo, calcoliamo la divergenza di entrambi i membri. Il primo membro dà zero, mentre il secondo diventa $\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$ che, per l' equazione di continuità 1.24, coincide con $-\mu_0 \partial\rho/\partial t$; prese insieme queste due osservazioni implicano che la densità di carica deve essere indipendente dal tempo. Se ne conclude che *l'equazione di Ampère vale solo nei casi stazionari*, in cui non si hanno mutamenti della densità di carica spaziale. Questo naturalmente non significa che le cariche non si muovano, ma soltanto che ogni spostamento di una carica deve essere allo stesso momento compensato esattamente dal movimento delle altre. In altre parole, si possono avere correnti, ma non devono cambiare nel tempo, dunque anche i campi magnetici devono essere statici.

Come è possibile generalizzare la 2.6 in modo che valga anche nel caso dinamico? Il ragionamento esposto sopra ce ne fornisce la chiave. Bisogna aggiungere a secondo membro un termine la cui divergenza cancelli esattamente il termine $-\mu_0 \partial\rho/\partial t$. Ma un termine del genere è facile da trovare: basta semplicemente ricordarsi della legge di Gauss per il campo elettrico, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ e derivarla rispetto al tempo. Il termine da addizionare al secondo membro dell'equazione 2.6 è quindi $\mu_0\epsilon_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$ e si ottiene infine

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.13}$$

che, come è agevole verificare, rispetta l'equazione di continuità della carica in qualunque circostanza e si riduce alla legge di Ampère per situazioni stazionarie. Il termine $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ha le dimensioni di una velocità e vale $3\ 10^8$ m/s; come si vedrà ha un' importanza fondamentale in ciò che segue.

L'equazione così modificata prende il nome di *legge di Ampère-Maxwell* e la sua forma integrale è

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.14}$$

È istruttivo verificare (*Esercizio*) che con la legge di Ampère-Maxwell in questa forma la scelta della superficie su cui calcolare l'integrale a secondo membro è ininfluente, purché si scelga la stessa superficie per il calcolo di I. Il ragionamento fatto nella sezione 3.1 non è infatti direttamente trasponibile a questo caso in quanto la divergenza del campo elettrico non è identicamente nulla.

3.4.1 La corrente di spostamento

Il termine $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ ha le dimensioni di una corrente e viene chiamato *corrente di spostamento,* I_{spost}. Questo nome ha ragioni storiche, ma in realtà non rappresenta una corrente in quanto esiste anche nel vuoto, dove non ci sono cariche né correnti. Riscrivendo la 3.13 sotto la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{spost} \right)$$

si vede però che includendo $\mathbf{j}_{spost}$ nella densità di corrente totale otteniamo che *tutti i circuiti sono chiusi.* Infatti la divergenza del primo membro è nulla, quindi lo deve essere anche quella del secondo e ne segue che la corrente $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{spost}$ ha divergenza nulla: per il significato geometrico della divergenza, significa che la densità di corrente non "nasce" né "muore" in nessun punto dello spazio.

Verifichiamo questa affermazione in un caso particolare: un circuito costituito da un generatore di tensione e da un condensatore nel vuoto a facce piane e parallele, di superficie S e distanti d, pertanto di capacità $C = \epsilon_0 S/d$. Resistenze ed induttanze si considerano trascurabili. Siccome nel condensatore $V = q/C$ e $E = V/d =$ uniforme, possiamo calcolare

$$I_{spost} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{dV}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = \frac{dq}{dt} = I.$$

Pertanto laddove non scorre la corrente vera "scorre" una corrente di spostamento esattamente dello stesso valore, CVD.

Infine si noti che con l'introduzione della corrente di spostamento l' equazione di Ampère-Maxwell diventa analoga alla legge di Faraday: nel vuoto ($\mathbf{j} = 0$) infatti le due equazioni sono perfettamente simmetriche in $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, se si eccettua il segno ed il termine $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ che deriva esclusivamente dalla scelta delle unità di misura per i campi. La differenza principale però sta nel fatto che tipicamente il termine I_{spost} è piccolo rispetto ad I, quando quest'ultimo sia presente (nel caso appena visto del condensatore I_{spost} non è trascurabile perché I è assente), da cui si spiega la validità ampia della legge di Ampère 2.7 anche nei casi di campi variabili, tranne che nei casi in cui le variazioni siano effettivamente molto rapide. In questi ultimi casi la corrente di spostamento gioca un ruolo veramente fondamentale, come vedremo.

3.5 Le equazioni di Maxwell

Ci si può chiedere se nel caso dinamico sia necessario alterare le equazioni alla divergenza come abbiamo fatto con le equazioni al rotore. La risposta è no: il sistema di equazioni che abbiamo raggiunto, dette *equazioni di Maxwell*, rappresenta la forma definitiva delle equazioni dell'elettromagnetismo[2]. Come tale si tratta di uno dei massimi risultati ottenuti dalla Fisica e vale la pena di riportare tutte le equazioni insieme in forma sia differenziale che integrale:

$$\begin{array}{ll} \nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0 & \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=q/\epsilon_0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I+\epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \end{array} \tag{3.15}$$

La forma qui sopra vale per le equazioni nel vuoto o, comunque, ogni volta che si considerino esplicitamente tutte le cariche e le correnti presenti. Laddove siano presenti mezzi materiali, per molti usi risulta più conveniente utilizzare una forma che utilizzi i vettori **D** ed **H**:

$$\begin{array}{ll} \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{libera} & \oint\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=q_{libera} \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \\ \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_{libera}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & \oint\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=I_{libera}+\frac{d}{dt}\int\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \end{array} \tag{3.16}$$

dove il pedice "libera" indica che non si considerano cariche di polarizzazione né correnti di magnetizzazione.

Questa seconda forma, nonostante l'apparenza, è in realtà concettualmente più complicata della 3.15, in quanto bisogna anche conoscere le *relazioni costitutive* tra **D** ed **E** e tra **B** ed **H**, e queste relazioni, che variano da materiale a materiale, sono spesso difficili da conoscere, se non sperimentalmente. Normalmente si assume una relazione lineare, $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, ma non di rado questa ipotesi non è valida. Per esempio la relazione tra **B** ed **H** nei ferromagneti è, come discusso nel paragrafo 2.8, fortemente non lineare. Si danno poi casi in cui i vettori **D** ed **E**, **B** ed **H** non sono nemmeno paralleli fra loro per cui ϵ e μ non sono scalari ma tensori, eccetera. Nel seguito faremo uso solo delle equazioni 3.15.

[2]Almeno nel mondo macroscopico. La trattazione deve essere modificata, come si accennerà in seguito, quando entra in campo la Meccanica Quantistica.

A queste equazioni va aggiunta l'espressione 2.2 per la forza di Lorentz. Non c'è invece bisogno di stabilire esplicitamente la conservazione della carica, perché come si è già visto le equazioni di Maxwell implicano l'equazione di continuità (*Esercizio:* verificarlo per le equazioni 3.16).

3.5.1 L'equazione delle onde

Dalle 3.15 è possibile ottenere un insieme di equazioni più semplici, almeno nel vuoto ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$). Prendendo il rotore della terza, la derivata rispetto al tempo della quarta e combinandole si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2} = 0$$

e ricordando la C.11 e la prima delle 3.15 con $\rho = 0$

$$\Box^2 \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.17}$$

dove si è definito l'*operatore d'alembertiano*

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{3.18}$$

Analogamente si trova (*Esercizio*), per il campo magnetico,

$$\Box^2 \mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.19}$$

Le equazioni della forma 3.17 e 3.19 sono note come *equazioni delle onde* (si noti come queste equazioni non sarebbero state ottenibili se non si fosse introdotta la corrente di spostamento), e verranno studiate nel prossimo capitolo. Qui basti ricordare che queste equazioni impongono condizioni necessarie, ma non sufficienti, sul campo elettromagnetico. Infatti sono sei equazioni (due equazioni vettoriali per vettori a tre componenti) mentre le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono otto equazioni (due vettoriali più due scalari).

Non è difficile ottenere un'equazione corrispondente alla 3.17 valida all'interno dei metalli. Siccome in questo caso le cariche sono libere, è legittimo supporre $\rho = 0$, almeno per campi che non variano troppo velocemente, in quanto la carica è libera di spostarsi e di annullare rapidamente qualunque squilibrio si formi. Per la stessa ragione non è invece ammissibile trascurare la corrente; questa produce nella 3.17 un termine addizionale $-\mu_0 d\mathbf{j}/dt$, che si esprime in termini del campo elettrico tramite la legge di Ohm in forma vettoriale $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Si ottiene infine (*Esercizio*)

$$\Box^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{3.20}$$

3.6 Potenziali elettrodinamici

Ora che conosciamo le equazioni definitive del campo elettromagnetico, possiamo tornare sul problema della derivazione dei campi da dei potenziali. L'equazione di Faraday 3.1, 3.2, come si è visto, impedisce di considerare conservativo il campo elettrico nel caso generale, quindi di poterlo derivare da un potenziale scalare. D'altro canto la solenoidalità di $\mathbf{B}$ non è in discussione e la definizione del potenziale vettore $\mathbf{A}$ è ancora valida. Possiamo definire un potenziale anche per il campo elettrico non statico? Certamente. Infatti se riscriviamo l'equazione 3.2 in termini del potenziale vettore

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial/\partial t \, (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

vediamo che il termine tra parentesi nella seconda equazione è irrotazionale e può pertanto essere considerato come il gradiente di una funzione scalare, $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t = -\nabla \phi$, da cui si ottiene l'espressione generale per il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{3.21}$$

Il potenziale scalare ϕ che compare nella 3.21 si riduce evidentemente al potenziale elettrostatico nel caso in cui i campi non varino nel tempo. Non bisogna però dimenticare che ϕ ha un significato più ampio e può essere una funzione esplicita del tempo.

Rimane vero il fatto che i potenziali non sono definiti univocamente. Il fatto che ϕ ed $\mathbf{A}$ siano connessi nella 3.21 significa anzi che abbiamo più libertà di scelta; il potenziale scalare non è determinato semplicemente a meno di una costante additiva come nel caso statico. Infatti, possiamo senz'altro aggiungere un termine a ϕ purché ne sottraiamo uno opportuno ad $\mathbf{A}$ in modo tale che la 3.21 rimanga immutata. Questo si ottiene, come è facile verificare (*Esercizio*) introducendo una funzione arbitraria Λ delle coordinate e del tempo in modo tale che

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \nabla \Lambda. \end{aligned} \tag{3.22}$$

La trasformazione dei potenziali definita dalla 3.22 si chiama *trasformazione di gauge*[3] e l'invarianza dei campi che ne segue è detta *invarianza di gauge*. Di solito tale invarianza vene sfruttata per imporre una o più condizioni supplementari direttamente sui potenziali, senza esplicitare la funzione Λ. Una scelta comune, già vista in precedenza quando è stato introdotto il potenziale vettore, consiste nell'imporre

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{3.23}$$

scelta che prende il nome di *gauge di Coulomb* o *gauge trasverso* (le ragioni per questi nomi saranno chiarite più avanti). Un'altra scelta utile è quella del *gauge di Lorentz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \tag{3.24}$$

Si verifica (*Esercizio*) che in questo gauge la funzione Λ necessaria per passare da $(\mathbf{A}, \phi)$ a $(\mathbf{A}', \phi')$ soddisfa all'equazione delle onde.

3.6.1 L'equazione d'onda per i potenziali

Per definire i potenziali sono state usate la terza e la quarta equazione di Maxwell, ovvero quelle che non contengono le sorgenti dei campi. Questo è logico: la definizione dei potenziali deve consistere in una pura relazione tra essi ed i campi. Le altre equazioni, come si è già visto nel caso statico, forniscono la relazione tra i potenziali e le sorgenti. Per trovare questa relazione introduciamo le definizioni di $\mathbf{A}$ e ϕ nella prima e quarta equazione di Maxwell

$$\begin{aligned} \rho/\epsilon_0 &= \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Utilizzando la C.11 e riordinando

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\rho/\epsilon_0$$

[3]Il termine "gauge" in inglese significa "misura" o "apparecchio di misura". Si pronuncia più o meno "gheig", con la "g" finale dolce (come la parola inglese "engage" privata della prima sillaba).

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Non si tratta di equazioni particolarmene attraenti. Possiamo però renderle più simmetriche utilizzando il gauge di Lorentz 3.24 per eliminare $\mathbf{A}$ dalla prima equazione e ϕ dalla seconda:

$$\begin{aligned} \Box^2 \phi &= -\rho/\epsilon_0 \\ \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \tag{3.25}$$

e queste invece sono quanto di meglio ci si poteva aspettare: ogni potenziale ha la sua equazione d'onda, ciascuna contenente la sorgente "giusta": cariche per ϕ, correnti per $\mathbf{A}$. Inoltre sono evidentemente una generalizzazione delle equazioni 1.16 e 2.19. Si noti come invece nel gauge di Coulomb 3.23 l'equazione per ϕ sia formalmente identica a quella di Poisson 1.16, da cui il nome di questo gauge.

3.6.2 I potenziali ritardati

Le 3.25 sono equazioni d'onda, come le 3.17 e 3.19 per i campi, ma questa volta inomogenee. Trovarne la soluzione formale è possibile in modo completamente generale, ma qui ci limitiamo a fornirla senza dimostrazione (una giustificazione si trova nell'Appendice B):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\Omega' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d\Omega' \end{aligned} \tag{3.26}$$

identica a quella statica salvo che per la sostituzione di t con $t' = t \pm |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Possiamo quindi notare che se le sorgenti si estendono in una regione finita dello spazio e se ci poniamo a grande distanza da esse i relativi potenziali andranno a zero come $1/r$.

Le equazioni 3.26 dicono inoltre che i potenziali sono determinati dalla distribuzione di cariche e correnti *non com'è* all'istante in cui sono misurati ma da come essa *era* ad un istante anteriore di $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ se si sceglie il segno $-$, o da come *sarà* ad un istante posteriore di altrettanto se si sceglie il segno $+$. Nel primo caso si parla di *potenziali ritardati*, nel secondo di *potenziali anticipati*. È però difficile immaginare come possa il potenziale "sapere in anticipo" come si distribuirà la carica o la corrente che lo genera, per cui questa seconda soluzione viene sempre scartata ed i potenziali che si considerano sono solo quelli ritardati, $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.

Si vede quindi come le interazioni elettromagnetiche facciano sentire i loro effetti non istantaneamente, ma con un ritardo proporzionale alla distanza, con coefficiente di proporzionalità $1/c$; questo significa che *le interazioni elettromagnetiche, nel vuoto, si propagano a velocità c*. Nel caso di campi statici questo è irrilevante, visto che non vi sono dipendenze dal tempo; il campo "è sempre stato così" e non si propaga. Nel caso dinamico invece vedremo che le conseguenze sono di enorme importanza.

3.7 Lagrangiana ed Hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico

3.7.1 Formulazione lagrangiana

Siccome la forza di Lorentz dipende esplicitamente dalla velocità, ed i potenziali elettrodinamici non sono semplici potenziali scalari, non è ovvio che sia possibile porre l'equazione del moto di una particella (o più particelle) sotto forma Lagrangiana. Perché questo sia possibile bisogna trovare una funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ tale che l'equazione di Eulero-Lagrange[4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.27}$$

coincida con l'equazione di Newton

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = q\left(-\partial\phi/\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{A}/\partial t + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}\right). \tag{3.28}$$

Qui bisogna tenere ben presente la differenza tra derivata parziale e derivata totale di una funzione: la prima riguarda solo la dipendenza esplicita dalla specifica variabile rispetto alla quale si sta derivando, la seconda tiene anche conto dell'eventuale dipendenza implicita tramite le altre variabili. Così, la derivata di $\mathbf{A}$ rispetto al tempo nella 3.28 è una derivata parziale, perché connette il *campo* $\mathbf{A}$, pensato come funzione di quattro variabili indipendenti (tre spaziali ed una temporale), con il *campo* $\mathbf{E}$. Ma da qui in poi abbiamo bisogno di calcolare la variazione col tempo del valore di $\mathbf{A}$ *calcolato nel punto in cui si trova la particella*, quindi dobbiamo considerare

[4] In questo paragrafo usiamo la comune convenzione secondo cui la derivata rispetto ad un vettore rappresenta il gradiente rispetto alle componenti di quel vettore.

non solo che $\mathbf{A}$ può variare col tempo, ma che la particella può esplorare in tempi diversi regioni di spazio in cui $\mathbf{A}$ assume valori diversi.

In altri termini, dobbiamo considerare $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$ come funzione di una sola variabile, il tempo. Pertanto c'è differenza tra derivata parziale e totale rispetto al tempo di $\mathbf{A}$, e la relazione tra di esse è data, per esempio per la componente x, da

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right).$$

Torniamo ora all' equazione 3.28 e scriviamo esplicitamente la componente x dell'ultimo termine

$$\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}|_x = v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

ed aggiungiamo e sottraiamo $v_x \, \partial A_x / \partial x$ per avere un' espressione più simmetrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}|_x &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{dA_x}{dt}. \end{aligned}$$

Inserendo quest' espressione, componente per componente, nell' equazione 3.28 otteniamo

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-\phi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$$

e si vede che per soddisfare la 3.27 è sufficiente trovare $\mathcal{L}$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} &= m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (-q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.) \end{aligned}$$

Ricordando che né $\mathbf{A}$ né ϕ dipendono da $\mathbf{v}$ si ha come possibile Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.29}$$

La forma della Lagrangiana 3.29 è piacevolmente semplice e simmetrica, ma non è l'unica possibile. Sappiamo infatti che una trasformazione di gauge

3.22 lascia invariati i campi, e di conseguenza anche le equazioni del moto. Che succede alla Lagrangiana sotto una tale trasformazione? Succede che diventa un' altra

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi' + q\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi - q\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\mathbf{v} \cdot \nabla \Lambda$$

$$= \mathcal{L} - q\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Lambda\right) = \mathcal{L} + \frac{d\left(-q\Lambda\right)}{dt}$$

che però differisce dalla prima solo per la derivata totale di una funzione delle coordinate e del tempo, e fornisce di conseguenza le stesse equazioni del moto. Questo è perfettamente coerente col fatto che la scelta del gauge non può influenzare nulla di osservabile.

3.7.2 Formulazione hamiltoniana

Ottenere l'Hamiltoniana ora è semplice. Seguendo le normali prescrizioni, il momento generalizzato diventa

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \tag{3.30}$$

e non coincide più con la familiare espressione $m\mathbf{v}$. L'hamiltoniana allora diventa

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = mv^2 + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}mv^2 + q\phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi$$

da cui si vede che l'introduzione di un potenziale vettore non cambia la forma dell'hamiltoniana, se espressa in termini di v. Nel caso statico $\mathcal{H}$ coincide con l'energia ed $\mathbf{A}$ determina solo il campo magnetico, per cui vediamo confermato quanto detto nella sezione 2.2: un campo magnetico statico non cambia l'energia delle particelle.

Ovviamente questo non significa che le equazioni del moto siano le stesse che in assenza di campo, visto che tali equazioni si devono derivare dall'hamiltoniana espressa in funzione delle variabili "giuste" $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$. Visto che $\mathbf{v} = \left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)/m$, $\mathcal{H}$ diventa

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2}{2m} + q\phi. \tag{3.31}$$

Si vede quindi che l'unico effetto della presenza di un potenziale vettore è di ridefinire il momento generalizzato $\mathbf{p}$.

3.8 Leggi di conservazione per il campo elettromagnetico

3.8.1 Energia

Un sistema di cariche elettriche interagenti possiede, evidentemente, una certa energia potenziale. Si è visto nel paragrafo 1.5.1 che se prendiamo un condensatore nel vuoto a facce piane e parallele la densità di energia accumulata $u = U/\Omega$ è proporzionale al quadrato del campo elettrico.

Analogamente, in un solenoide (*Esercizio*)

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \Omega\frac{B^2}{2\mu_0} \tag{3.32}$$

ed anche in questo caso la densità di energia (che, a rigore, non è un'energia potenziale nel senso della meccanica in quanto non esiste un potenziale scalare magnetico) è proporzionale al quadrato del campo, in questo caso magnetico.

Quanto sono generali questi risultati? Per scoprirlo, calcoliamo la potenza $W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$ trasferita dalle cariche, o alle cariche, tramite il campo elettromagnetico:

$$W = \sum_i q_i\left(\mathbf{E}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_i\right) \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i q_i \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{v}_i = \int \rho\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\; d\Omega = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\; d\Omega.$$

Esprimiamo l'integrando $w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$, che è una densità di potenza trasferita da/alle cariche, in funzione dei soli campi, sfruttando le equazioni di Maxwell 3.15:

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \\ &= -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \epsilon_0 E^2\right) - \nabla \cdot \mathbf{N} \end{aligned}$$

dove è stata usata l'eq. C.10 ed è stato introdotto il *vettore di Poynting*

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{3.33}$$

Definendo $u = B^2/2\mu_0 + \epsilon_0 E^2/2$ e $U = \int u\; d\Omega$ otteniamo

$$w + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{N} = 0 \tag{3.34}$$

da cui integrando sul volume e sfruttando il teorema di Gauss otteniamo la forma integrale

$$W + \frac{dU}{dt} + \oint \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{3.35}$$

Queste equazioni, se le priviamo del primo termine, hanno un aspetto familiare. Infatti sono formalmente identiche alle due forme dell'equazione di continuità 1.23 e 1.24, se interpretiamo il flusso del vettore di Poynting come flusso di energia attraverso una superficie[5]. Ovvero, possiamo interpretare le 3.34 e 3.35 (con $W = w = 0$) come la legge che stabilisce la conservazione dell'energia per un sistema di campi elettromagnetici che non siano in interazione con particelle cariche.

Se ora reintroduciamo il termine W (o w), vediamo che l'energia del campo elettromagnetico non si conserva più, e che la mancata conservazione è interamente dovuta all'energia che viene trasferita dalle o alle cariche. Se ne conclude quindi che *il campo elettromagnetico possiede una sua energia* e che *in presenza di particelle cariche, questa energia si conserva se, e solo se, viene tenuto conto dell'energia meccanica posseduta dalle cariche.*

Lo stesso vale per le particelle: *la legge di conservazione dell'energia per un sistema di particelle cariche è valida se e solo se si tiene conto anche dell'energia del campo elettromagnetico.*

Il termine di flusso può spesso essere annullato scegliendo una superficie tale che il vettore di Poynting si annulli, per esempio scegliendo una superficie che va all'infinito se i campi vanno a zero più rapidamente di $1/r$. Questo peraltro, per campi statici, è sempre il caso in assenza di cariche o correnti all'infinito.

Dalla discussione precedente emerge una visione alternativa della trasmissione di energia nei circuiti. Prendiamo ad esempio un semplicissimo circuito in corrente continua, formato da un generatore di tensione V e da una resistenza R. Quest'ultima la schematizziamo come un cilindretto uniforme di raggio r e lunghezza l. La corrente che scorre è $I = V/R$ e la potenza trasferita dal generatore alla resistenza, e da questa dissipata in calore, è $W = RI^2$.

Siccome i campi sono statici, $U =$ costante ed il secondo termine della 3.35 è nullo. Il campo elettrico nella resistenza vale in modulo $E = V/l = RI/l$ ed è longitudinale, mentre il campo magnetico sulla superficie laterale vale, per la 2.8, $B = \mu_0 I/(2\pi r)$ ed è ad essa tangente ed è perpendicolare alla lunghezza del cilindro. Sulle basi invece $\mathbf{B}$ è parallelo ad esse.

[5] Una superficie *chiusa*. L'interpretazione non vale per superfici aperte, e tutta la deduzione riportata infatti fa riferimento a superfici chiuse.

Il vettore di Poynting perciò è parallelo alle basi del cilindro, ed ivi il suo flusso è nullo. Sulla superficie laterale invece $\mathbf{N}$ è ad essa perpendicolare e punta verso l'interno. Il modulo è $N = EB/\mu_0 = RI^2/(2\pi rl)$ ed il flusso $\oint \mathbf{N}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi rlRI^2/(2\pi rl) = RI^2$. Ne segue che *l'energia che il generatore di tensione trasmette alla resistenza la si può considerare trasmessa tramite il campo elettromagnetico, attraverso la superficie della resistenza* (e non tramite il filo).

3.8.2 Quantità di moto

Ragionamenti simili si possono svolgere per la quantità di moto. Vediamo che la densità di quantità di moto $\mathcal{P}$ è esprimibile in termini della densità di forza di Lorentz $\mathbf{f}$, e tramite essa e le equazioni di Maxwell in termini del campo elettromagnetico:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} = \epsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}$$

$$= \epsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{B}}_{=0} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \epsilon_0\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial t}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\mu_0\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$. Mettendo tutto in forma più simmetrica, utilizzando la C.12 e ricordando la definizione di c,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= \epsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \epsilon_0(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial t} \\
&= \epsilon_0\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} + \epsilon_0\left[(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2\right] \\
&+ \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla B^2\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Si tratta di un'espressione abbastanza complicata, per cui calcoliamola per una sola componente $x_\alpha \in \{x, y, z\}$, limitandoci alla parte relativa al campo elettrico (per quello magnetico il calcolo sarà identico). Abbiamo:

$$\left\{\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E} + \left[(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2\right]\right\}_\alpha =$$

$$= \sum_\beta\left\{E_\alpha\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\beta} + \left[E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_\beta^2}{\partial x_\alpha}\right]\right\} = \sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right).$$

L'ultimo termine può essere visto come la divergenza di un tensore di ordine 2 che ha la forma, reinserendo il fattore ϵ_0 ed il termine magnetico,

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)\delta_{\alpha\beta} \tag{3.36}$$

ed è noto come *tensore degli sforzi di Maxwell.* L'equazione del bilancio della quantità di moto assume finalmente la forma differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{P} + \frac{1}{c^2}\mathbf{N}\right) = \nabla \cdot \mathcal{T} \tag{3.37}$$

e quella integrale

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{1}{c^2}\int \mathbf{N}\, d\Omega\right) = \oint \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.38}$$

Anche qui come nell'espressione dell'energia il termine di flusso può spesso essere annullato scegliendo una superficie tale che il tensore degli sforzi sia nullo: per esempio scegliendo una superficie che va all'infinito, se i campi vanno a zero più rapidamente di $1/r$.

Si possono ripetere qui gli stessi commenti fatti per le equazioni 3.35 e 3.34: *il campo elettromagnetico possiede una sua quantità di moto,* e *in presenza di particelle cariche tale quantità di moto si conserva se, e solo se, viene tenuto conto della quantità di moto meccanica posseduta dalle particelle.*

Da un altro punto di vista, vediamo che *la legge di conservazione della quantità di moto per un sistema di particelle cariche è valida se e solo se si tiene conto anche della quantità di moto del campo elettromagnetico.* In particolare, se c' è un certo ammontare di quantità di moto "in volo" tra due cariche interagenti, *non possiamo aspettarci che valga la terza legge di Newton* (di azione e reazione), che deve quindi essere soppiantata dalla legge più generale 3.37 o 3.38.

Si noti che la densità di quantità di moto del campo elettromagnetico è data dal vettore di Poynting che svolge il ruolo di "flusso di energia" nell'equazione di conservazione dell'energia; il flusso della quantità di moto è dato dal flusso del tensore degli sforzi. Vediamo così da questo ruolo duale di $\mathbf{N}$ che nel campo elettromagnetico energia e quantità di moto sono strettamente collegate, esattamente come per una particella materiale libera, per la quale $U = p^2/2m$. Questa connessione si vede anche dal fatto che la traccia (somma dei termini diagonali) di $\mathcal{T}$ non è altro che l'energia del campo elettromagnetico.

Il campo elettromagnetico possiede dunque proprietà dinamiche indipendentemente dalla presenza o meno di materia ponderabile, e questo conduce a vederlo come dotato di una sua esistenza al di là del ruolo di puro intermediario tra le particelle per cui era stato introdotto.

Capitolo 4

Onde

4.1 Propagazione per onde

Si è visto che dalle equazioni di Maxwell è possibile dedurre delle equazioni per il campo elettrico, quello magnetico e per i potenziali, equazioni che, nel vuoto, hanno tutte la stessa forma:

$$\Box^2 f(\mathbf{r},t) = \nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

dove $f(\mathbf{r},t)$ nel caso elettromagnetico è una funzione vettoriale, ma in altri casi può essere, *mutatis mutandis*, una funzione scalare. Infatti tale equazione descrive molti altri fenomeni fisici: la propagazione del suono in un gas, delle onde di superficie in un fluido, delle vibrazioni di una corda e nei solidi, eccetera. La grandezza f di volta in volta rappresenta una diversa grandezza fisica: la pressione locale del gas, il livello del fluido, lo spostamento della corda o degli atomi. L'equazione 4.1 è dunque una delle equazioni più importanti e versatili della fisica. Perciò verrà qui trattata, per quanto possibile, nella sua generalità senza fare necessariamente sempre riferimento al caso elettromagnetico.

4.1.1 Onde piane e onde sferiche

Per studiare il tipo di soluzioni che tale equazione può avere, partiamo dal caso scalare e unidimensionale. Con quest'ultima espressione qui s'intende che consideriamo una funzione $f = f(x,t)$ che, ad un dato tempo, dipenda solo da x, per cui abbia lo stesso valore indipendentemente da y e z. I punti dello spazio in cui f ha un determinato valore rappresentano dei fasci di piani paralleli, da cui il nome di *onde piane*.

L'equazione 4.1 diventa, per le onde piane,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x,t) = 0 \tag{4.2}$$

e l'operatore a primo membro somiglia vagamente al prodotto notevole algebrico $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Sfruttiamo questa somiglianza cercando di fattorizzarlo, ed a tal fine poniamo $s = x - ct$ e $\sigma = x + ct$, ottenendo, in funzione di queste nuove variabili,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \sigma}; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial s \partial \sigma}; \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial s \partial \sigma}$$

per cui, posto $f(x,t) = f[x(s,\sigma), t(s,\sigma)] = g(s,\sigma)$ l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 g(s,\sigma)}{\partial s \partial \sigma} = 0$$

che ha soluzioni della forma

$$g(s,\sigma) = h_1(s) + h_2(\sigma) \Rightarrow f(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

La soluzione generale dell' equazione 4.2 è perciò composta da funzioni in sé arbitrarie, ma che dipendono da una combinazione particolare delle variabili indipendenti. In special modo si vede che, supponendo per esempio $f_2 = 0$, il profilo della funzione $f(x - ct)$ è identico a quello della condizione iniziale $f(x, 0) = \psi(x)$ ma spostato verso destra di una distanza pari a ct. In altri termini, la funzione f_1 rappresenta una funzione che si sposta rigidamente in direzione dell' asse x, nel verso delle x crescenti, a velocità c. Similmente, la funzione f_2 rappresenta una funzione che si sposta rigidamente nel senso delle x decrescenti a velocità c. Si noti che questo dipende solo dal segno *relativo* di x e t; una funzione $f(ct - x)$ rappresenta ugualmente un'onda in moto nel verso positivo dell'asse x.

Caratteristica delle onde è quindi di essere una perturbazione di un campo esteso, di solito un campo continuo, che si sposta più o meno rigidamente nello spazio. In senso stretto, comunque, si chiamerà onda ogni perturbazione di un campo che obbedisce all'equazione 4.1. In senso lato, viene solitamente chiamata onda qualunque perturbazione in un campo di grandezze.

Un altro tipo importante di onde è quello delle onde sferiche, ovvero onde che si diramano simmetricamente da un punto, poniamo il punto $\mathbf{r} = 0$. In questo caso, f è una funzione solo del modulo di r, e nel laplaciano dell'equazione 4.1 espresso in termine delle coordinate polari sferiche sopravvive solo il termine radiale:

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rf(r)\right].$$

Ne segue che la soluzione generale dell'equazione 4.1 nel caso di onde sferiche si ottiene da quella della 4.2 mediante la sostituzione $f \to rf$, ovvero

$$f(x,t) = \frac{1}{r}f_1(x-ct) + \frac{1}{r}f_2(x+ct).$$

Si tratta quindi di onde la cui ampiezza decade come $1/r$. È evidente che a grandi distanze dall'origine un'onda sferica è approssimabile *localmente* con un'onda piana.

4.1.2 Onde monocromatiche

Considereremo in particolare le onde piane (co)sinusoidali:

$$f(x,t) = f_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{4.3}$$

le cui parti reali e immaginarie hanno evidentemente la forma richiesta: basta riscrivere il termine tra parentesi, detto *fase*, come $k(x-\omega t/k)$ e porre $\omega = ck$. La grandezza f_0 si chiama *ampiezza* dell'onda e può anche essere, in questo formalismo, una grandezza complessa. I punti dello spazio in cui la fase ha un valore fissato si chiamano *fronti d'onda* e nel caso di onde piane sono evidentemente dei piani perpendicolari alla direzione di propagazione.

La periodicità spaziale — ovvero la distanza tra due punti con lo stesso valore di f a t fissato — è data dalla *lunghezza d'onda* $\lambda = 2\pi/k$; k è detto *numero d'onda*. La periodicità temporale — ovvero l'intervallo di tempo che intercorre tra il passaggio di due punti corrispondenti di f in un punto fissato — è data dal *periodo* $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$; le grandezze ω e ν si misurano entrambe in s^{-1} (l'unitá di misura corrispondente è detta Hertz) e sono chiamate rispettivamente *pulsazione* e *frequenza* dell'onda (a volte si usa il termine frequenza anche per ω). È pure immediato (*Esercizio*) vedere che $\lambda\nu = c$.

L'ipotesi di onda sinusoidale non è limitativa perché, come spiegato nell' Appendice B, ogni funzione dotata di sufficienti regolarità può essere scritta come combinazione lineare, detta anche *sovrapposizione*, di funzioni del tipo della 4.3; data la linearità dell' equazione delle onde 4.1 le conclusioni tratte dallo studio di una di queste funzioni periodiche potranno essere facilmente estese ad una funzione qualsiasi. Qualora però l'onda sia esattamente del tipo 4.3 e non una sovrapposizione di esse, e si abbia quindi un ben determinato valore di ω, l'onda è detta *monocromatica*; la ragione di questa denominazione sarà vista più avanti.

Le considerazioni precedenti si estendono facilmente al caso di onde piane in tre dimensioni ed al caso di campi vettoriali. È sufficiente scrivere, invece dell'equazione 4.3, l'equazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{4.4}$$

dove sia $\mathbf{f}$ che $\mathbf{f}_0$ che $\mathbf{k}$ sono ora vettori. In particolare $\mathbf{k}$ prende il nome di *vettore d'onda* ed è evidentemente perpendicolare ai piani a fase costante. Siccome, come si è visto, l'onda si propaga perpendicolarmente a questi piani, ne segue che $\mathbf{k}$ indica la direzione di propagazione dell'onda. Il modulo di k evidentemente vale $2\pi/\lambda$.

4.2 Velocità di fase e velocità di gruppo

La definizione di velocità data nel paragrafo precedente si riferisce alla velocità di propagazione di un determinato punto di un'onda; per esempio, in un'onda sinusoidale, la velocità di spostamento di una cresta o di un ventre. Tuttavia, quando la forma dell'onda subisce deformazioni importanti durante la propagazione, questa velocità diventa non solo di dubbia utilità, ma anche difficile da definire.

Deformazioni nella forma d'onda sono possibili quando il coefficiente c nell'equazione 4.1 non è costante. Di solito conviene descrivere questa occorrenza definendo una velocità diversa per ogni onda sinusoidale, vale a dire ponendo $c = c(\omega)$. In questo modo le componenti a determinate frequenze viaggeranno più velocemente di quelle a frequenze differenti e tenderanno a "sorpassarle"; la forma d'onda totale, somma di tutte le forme d'onda delle componenti, di conseguenza non si conserverà (si pensi al gruppo formato dai concorrenti ad una maratona, inizialmente compatto ed in seguito sgranato per via delle differenze di velocità dei corridori).

Vediamo questo fenomeno in un semplice caso specifico, quello di un'onda scalare piana composta da due onde sinusoidali di frequenze e lunghezze d'onda poco diverse ($k' = k + \Delta k,\ \Delta k \ll k;\ \omega' = \omega + \Delta\omega,\ \Delta\omega \ll \omega$) e con la stessa ampiezza:

$$\begin{aligned} f &= f_0 \sin(kx - \omega t) + f_0 \sin(k'x - \omega' t) \\ &= 2 f_0 \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \frac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t] \end{aligned}$$

$$\simeq \quad 2f_0 \cos\frac{1}{2}(\Delta kx - \Delta\omega t)\sin(kx - \omega t).$$

L'onda complessiva quindi risulta essere un'onda con approssimativamente la stessa frequenza (*frequenza portante*) e lunghezza d'onda delle onde componenti, ma *modulata* da un termine che a sua volta si propaga con velocità $\Delta\omega/\Delta k \to d\omega/dk$, che non necessariamente coincide con c. In effetti la *velocità di gruppo*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k\frac{dc}{dk} \tag{4.5}$$

coincide con la *velocità di fase* $c = \omega/k$ solo se quest'ultima non dipende da k, quindi da ω. Qualora questa condizione non si verifichi si dice di essere in presenza di un *mezzo dispersivo*.

Come si vede, velocità di fase e di gruppo in linea generale sono grandezze diverse. Dal punto di vista pratico la velocità di fase è quella con meno importanza. Essa si riferisce infatti ad onde esattamente monocromatiche, le quali a rigore non esistono: esse infatti avrebbero durata infinita. Di solito si è interessati a *treni d'onde* di durata limitata, e la velocità con cui si propagano effetti fisici ed informazione è quella di gruppo. Non è quindi vietato, e di fatto si verifica in diversi casi, che la velocità di fase delle onde elettromagnetiche sia superiore a quella della onde elettromagnetiche nel vuoto.

4.2.1 Onde di compressione nei solidi

Un caso importante di onde dispersive si ha nel caso dei solidi. Schematizziamo il solido come una sequenza infinita di atomi tutti di massa m, costretti a muoversi in una sola dimensione — diciamo l'asse x — connessi da molle di costante elastica G solo con i primi vicini (cioè l'$n-$mo solo con l'$n-1$-mo e l'$n+1$-mo), e con posizioni di riposo $x_n = an,\ n \in \mathbf{Z}$. La posizione dell'$n-$mo atomo, all'istante t, sia $x_n(t) = x_n + u_n(t) = an + u_n(t)$, ed ipotizzeremo se necessario piccole oscillazioni: $u_n \ll a\ \forall n$. L'equazione del moto per l'atomo $n-$mo è data dunque da

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = F_n = G(u_{n+1} - u_n) - G(u_n - u_{n-1}) \tag{4.6}$$

visto che le forze agenti sono proporzionali alle differenze degli spostamenti degli atomi dalle loro posizioni di equilibrio. Cerchiamo soluzioni del tipo "onda viaggiante":

$$u_n(t) = \varepsilon e^{i(kan-\omega t)} \tag{4.7}$$

dove compare l'indice intero n invece della coordinata reale x in quanto stiamo trattando un sistema discreto e non continuo. Introducendo la 4.7 nella 4.6 otteniamo la relazione

$$\begin{aligned} - \quad & m\omega^2 \varepsilon e^{i(kan-\omega t)} = G\varepsilon \left[e^{i(ka(n+1)-\omega t)} - 2e^{i(kan-\omega t)} + e^{i(ka(n-1)-\omega t)} \right] \\ = \quad & G\varepsilon e^{i(kan-\omega t)} \left[e^{ika} + e^{ika} - 2 \right] \end{aligned}$$

da cui si ottiene la *relazione di dispersione*

$$\omega^2 = \frac{2G}{m}[1 - \cos(ka)] \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{G}{m}}\sin(ka/2). \tag{4.8}$$

Questa relazione non è lineare, e pertanto la velocità di gruppo delle onde di compressione varia con la lunghezza d'onda:

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{G}{m}}\cos(ka/2).$$

Per lunghezze d'onda estremamente corte, paragonabili alla spaziatura degli atomi nel reticolo, le onde si muovono a velocità via via più basse, fino a raggiungere velocità nulla quando $\lambda = 2a$ (*Esercizio:* verificarlo). Per onde di lunghezza macroscopica invece la *velocità del suono* $v = \lim_{\lambda\to\infty}(\omega/k) = a\sqrt{\frac{G}{m}}$ è indipendente dalla frequenza e pertanto velocità di fase e di gruppo coincidono.

4.3 Effetto Doppler

Uno degli effetti più vistosi e noti della meccanica delle onde — vistoso e noto, però, solo nel mondo moderno dove siamo abituati a velocità dell'ordine delle decine di kilometri all'ora — consiste nella variazione apparente della frequenza di un'onda a seconda dello stato di moto della sorgente o dell'osservatore.

Consideriamo una sorgente S di onde, per esempio sonore, ed un osservatore O, distanti l al tempo $t = 0$. Sia c la velocità dell'onda e ν la sua frequenza, ed immaginiamo che S ed O siano in moto con velocità rispettivamente v_s e v_o lungo la stessa direzione. Supporremo per fissare le idee che le velocità siano concordi, ma nulla cambia se sono discordi, salvo qualche segno. Possiamo invece scartare il caso $v_o \geq c$ in quanto in questo caso i fronti emessi da S non raggiungono mai O.

Un fronte d'onda emesso da S a $t = 0$ raggiungerà O non al tempo $t = l/c$ ma ad un tempo successivo t_1, in quanto l'osservatore durante il tempo di volo dell'onda si è allontanato. Si deve avere

$$ct_1 = l + v_o t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{c - v_o}$$

Al tempo successivo $\tau = 1/\nu$ viene emesso un secondo fronte d'onda. In questo momento S si è spostato di una distanza $v_s\tau$ rispetto al punto in cui si trovava a $t = 0$, ed O di una distanza $v_o\tau$. Siccome O continua a spostarsi durante il viaggio del secondo fronte d'onda, questo lo raggiunge quando O si è spostato di un'ulteriore distanza $c(t_2 - \tau)$, ed il tempo t_2 in cui questo avviene è di conseguenza dato dall'equazione

$$v_s\tau + c(t_2 - \tau) = l + v_o t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l + (c - v_s)\tau}{c - v_o}$$

per cui O sente i fronti d'onda consecutivi arrivare ad intervalli

$$\tau' = t_2 - t_1 = \frac{c - v_s}{c - v_o}\tau. \tag{4.9}$$

Si noti che per $v_s = c$ i fronti d'onda arrivano con intervallo nullo. Questa stranezza è dovuta al fatto che la sorgente, muovendosi alla stessa velocità dell'onda, emette un fronte senza che il precedente abbia potuto "staccarsi". I fronti pertanto si accavallano, e questo corrisponde alla formazione di un'*onda d'urto*, che nel caso delle onde sonore genera il cosiddetto *bang supersonico*.

L' intervallo di tempo τ' è proprio il periodo dell'onda percepito da O, per cui O percepisce una frequenza *diversa* da quella emessa, e precisamente

$$\nu' = \frac{c - v_o}{c - v_s}\nu. \tag{4.10}$$

La frequenza percepita è perciò più alta di quella emessa se sorgente ed osservatore si avvicinano, mentre è più bassa quando si allontanano, e questo è bene in accordo con l'esperienza quotidiana. La distanza invece non ha alcuna importanza (influirà ovviamente sull'intensità dell'onda), né importano le accelerazioni.

Per velocità v_s e v_o entrambe molto più piccole di c possiamo applicare lo sviluppo binomiale

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots \tag{4.11}$$

all'ordine più basso e pertanto si ottiene

$$\nu' \simeq [1 - (v_o - v_s)/c]\nu \tag{4.12}$$

e questa formula si può facilmente generalizzare al caso in cui S ed O non si muovano sulla stessa retta; se θ è l'angolo fra le direzioni dei moti si ha (*Esercizio*)

$$\nu' \simeq [1 - (v_o - v_s)\cos\theta/c]\nu. \tag{4.13}$$

Si noti che è solo in questa approssimazione che la formula è simmetrica nelle velocità di osservatore e sorgente; in generale lo spostamento di frequenza dipende non solo dalla velocità relativa ma anche dalla "velocità assoluta" di S ed O, ovvero la velocità che O ed S hanno rispetto al mezzo in cui la velocità dell'onda è c.

Se immaginiamo di avere una sirena che emette un La centrale (circa 440 Hz) e che si muova a 20 m/s=72 km/h rispetto ad un osservatore fermo rispetto all'aria, considerando che la velocità del suono è di circa 330 m/s, la frequenza percepita sarà di circa 25 Hz più alta o più bassa. Tale differenza corrisponde a circa un semitono ed è quindi perfettamente percepibile. Velocità relative inferiori ai 5 m/s = 18 km/h danno d'altra parte differenze di meno di un ottavo di tono, difficilmente distinguibili da parte di un orecchio non allenato. Non sorprende quindi che la teoria dell'effetto Doppler, pur semplice, risalga solo al 1842 e la sua verifica sperimentale a due anni dopo; in precedenza non si aveva avuto modo di prendere in considerazione il problema.

4.4 Le onde elettromagnetiche

4.4.1 Onde elettromagnetiche piane

Vediamo cosa si può dire di specifico sulle onde piane elettromagnetiche nel vuoto. Non perdiamo in generalità se supponiamo che l'onda si propaghi lungo l'asse $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{k}}$ e che sia monocromatica. I campi pertanto possono essere scritti come

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Le equazioni alla divergenza nel vuoto $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ implicano immediatamente (*Esercizio*) che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono perpendicolari alla direzione di propagazione $\mathbf{k}$ ($E_x = B_x = 0$)[1], a meno di un campo uniforme.

Peraltro scrivendo le equazioni al rotore nel caso di spazio vuoto, ovvero $\rho = 0,\ \mathbf{j} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Siccome stiamo considerando onde piane propagantisi lungo x, non si ha dipendenza da y né da z in $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, per cui i rotori di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non hanno componente x. Ne segue immediatamente che B_x e E_x sono indipendenti anche dal tempo. Ma un campo indipendente da spazio e tempo non è un'onda viaggiante, per cui lo scarteremo. Ne segue l'importante conclusione che *le onde elettromagnetiche piane nel vuoto sono trasversali*, ovvero che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione.

Nel caso di onde monocromatiche del tipo descritto dall'equazione 4.14, la prima delle equazioni scritte sopra diventa (analogamente si procede per la seconda), per componenti,

$$\begin{aligned}
\left(0, -ikE_{0z}e^{i(kx-\omega t)}, ikE_{0y}e^{i(kx-\omega t)}\right) &= \left(0, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = \nabla \times \mathbf{E} \\
= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \left(0, i\omega B_{0y}e^{i(kx-\omega t)}, i\omega B_{0z}e^{i(kx-\omega t)}\right)
\end{aligned}$$

ovvero, in forma vettoriale, e ricordando che $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \frac{\hat{\mathbf{k}}}{c} \times \mathbf{E} \tag{4.15}$$

che significa che *in un' onda piana* $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ *formano una terna destrorsa* ed in particolare che $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ *sono ortogonali tra loro.*

Si noti che $B = E/c$ e che perciò B in un certo senso è "piccolo"; infatti se calcoliamo la forza di Lorentz magnetica F_B su di una carica q su di cui incide un'onda elettromagnetica piana otteniamo

$$F_B = q\,|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = q|\mathbf{v} \times \frac{\hat{\mathbf{k}}}{c} \times \mathbf{E}| \le q\frac{v}{c}E = \frac{v}{c}F_E. \tag{4.16}$$

[1] Questa connessione tra divergenza nulla e trasversalità giustifica il nome di *gauge trasverso* dato in precedenza al gauge in cui $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Ovvero la forza magnetica è più debole della forza elettrica F_E generata dalla stessa onda sulla stessa particella di un fattore v/c, fattore che solitamente è $\ll 1$.

4.4.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche

Il fatto che le onde elettromagnetiche piane siano onde vettoriali trasversali implica che esse sono caratterizzate non da una sola direzione — quella di propagazione $\hat{\mathbf{k}}$ — ma anche da una seconda, quella del campo elettrico[2] $\mathbf{E}$. Questa direzione è detta *direzione di polarizzazione*. Il piano formato da questa direzione e da $\mathbf{k}$ è detto *piano di polarizzazione* ed in generale è una funzione del tempo.

Prendiamo al solito un'onda monocromatica con $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{k}}$, e scriviamo le componenti del campo elettrico direttamente in forma reale come

$$\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= \mathcal{I}m\left[E_{0y}e^{i\phi}e^{(kx-\omega t)}\right] = E_{0y}\sin(kx-\omega t+\phi) \\
E_z &= \mathcal{I}m\left[E_{0z}e^{i\theta}e^{(kx-\omega t)}\right] = E_{0z}\sin(kx-\omega t+\theta)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dove, per far sì che le componenti di $\mathbf{E}_0$ (E_{0y} ed E_{0z}) siano reali, si sono esplicitate le loro fasi θ e ϕ, che possono essere diverse. Il modulo del vettore $\mathbf{E}$ è dato da

$$E^2 = E_{0y}^2\sin^2(kx-\omega t+\phi) + E_{0z}^2\sin^2(kx-\omega t+\theta)$$

e ovviamente in genere non è costante. La sua direzione — ovvero la direzione di polarizzazione — è individuata da un versore con al più due componenti non nulle

$$\hat{\mathbf{n}} = (0, E_y/E, E_z/E). \tag{4.18}$$

In generale questo versore non è fisso, a meno che $\phi = \theta + m\pi$. In questo caso la direzione di polarizzazione è data da $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0/E_0$ e si parla di *onda polarizzata linearmente*. Tutte le onde elettromagnetiche, in virtù della linearità delle equazioni dell'elettromagnetismo, sono dunque scrivibili come combinazione lineare di onde polarizzate "orizzontalmente" o "verticalmente", od anche "diagonalmente":

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{E_{01}}{E_0}\hat{\mathbf{n}}_1 + \frac{E_{02}}{E_0}\hat{\mathbf{n}}_2$$

[2] Si tratta di una convenzione; la direzione del campo magnetico andrebbe altrettanto bene.

con $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ versori arbitrari ma fissati.

Se invece le componenti del vettore $\mathbf{E}_0$ hanno fasi diverse, le equazioni 4.17 sono le equazioni parametriche di un'ellisse; in altre parole, l'estremo del vettore $\mathbf{E}$ percorre un'ellisse, anzi un cerchio se $E_{0y} = E_{0z}$. In questi casi si parla di polarizzazione *ellittica* o *circolare*. Se l'estremo del vettore $\mathbf{E}$ percorre la traiettoria in senso antiorario, visto da un osservatore che vede l'onda procedere verso di sé, allora si parla di *polarizzazione destrorsa*. È evidente che che il vettore di propagazione $\mathbf{k}$ è dato in questo caso dalla solita regola della mano destra.

Naturalmente si parla anche di polarizzazione *sinistrorsa* nel caso opposto. Anche in questo caso si dimostra (con gli strumenti dell'Appendice B) che tutte le onde sono scrivibili come combinazione lineare di onde polarizzate ellitticamente sia destrorse che sinistrorse.

Come si vedrà, la luce è un' onda elettromagnetica, dunque può essere polarizzata. Di solito la luce che vediamo è una mescolanza casuale di onde di polarizzazione varia; si parla quindi di luce non polarizzata. In considerazione di questo non ci si sorprende che il nostro occhio, a differenza di certi insetti come le api che ne hanno bisogno per l'orientamento in volo, non sia in grado di distinguere le direzioni di polarizzazione. Ci sono però diversi casi, cui si accennerà anche in seguito, in cui la polarizzazione produce fenomeni visibili. Per esempio, la luce riflessa da una superficie è composta in misura preponderante da onde polarizzate parallelamente a detta superficie; è quindi possibile eliminare selettivamente la componente riflessa, vale a dire la più fastidiosa per la vista, usando lenti costituite da un materiale che assorba selettivamente luce di una particolare polarizzazione (*polaroid*) lasciando passare l'altra. Un secondo fenomeno è la cosiddetta *attività ottica*, esibita da alcune sostanze, che consiste nella rotazione del piano di polarizzazione della luce quando li attraversa. Se la rotazione avviene in senso orario si parla di sostanza *levogira*, in caso contrario di sostanza *destrogira*.

4.5 Energia e quantità di moto di un'onda

Finora si è parlato di "onde viaggianti". È legittimo chiedersi *che cosa viaggi* in un' onda, soprattutto se ci si ricorda che anche in onde aventi un evidente sostrato materiale come le onde del mare, la materia stessa in effetti non viaggia ma si limita ad oscillare più o meno verticalmente, eccettuato che nelle immediate vicinanze della costa. Chi peraltro abbia tentato di nuotare col mare grosso si rende conto che le onde del mare hanno la capacità di spostare anche masse considerevoli. Viene quindi naturale pensare che ciò che è trasportato da un'onda non è altro che *energia e quantità di moto*.

Verifichiamo questa ipotesi nel caso delle onde elettromagnetiche piane nel vuoto.

L'equazione per la densità energia del campo elettromagnetico in questo caso ci dà, ricordando che per un'onda piana $cB = E$,

$$u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2}E^2 = \epsilon_0 E^2. \tag{4.19}$$

L'onda elettromagnetica pertanto trasporta effettivamente energia, suddivisa in parti uguali tra i contributi elettrico e magnetico. In molti casi il campo oscilla ad una frequenza molto più alta delle frequenze di interesse nella materia, per cui si è interessati al valor medio di tale energia per unità di volume. Tale valor medio è, per onde monocromatiche, $\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2/2$. Da qui in poi si sottintenderà che u e U si riferiscono a valori medi.

Il flusso di energia deve essere dato dal flusso del vettore di Poynting $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{E}\times\frac{\hat{\mathbf{k}}}{c}\times\mathbf{E}/\mu_0 = \hat{\mathbf{k}}E^2/\mu_0 c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2\hat{\mathbf{k}}$, e questo ci dice che *in un'onda elettromagnetica l'energia fluisce nella direzione di propagazione dell'onda*, come si poteva intuire. Per un'onda piana monocromatica,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{0x}^2\hat{\mathbf{k}} = uc\hat{\mathbf{k}}.$$

Il flusso di energia per unità di tempo W lo possiamo calcolare prendendo un parallelepipedo avente un lato di lunghezza L lungo x e sezione trasversale S. Chiamando U l'energia totale ivi contenuta e considerando che il flusso di $\mathbf{N}$ lungo le facce laterali e posteriore è nullo,

$$W = \int_S \mathbf{N}\cdot d\mathbf{S} = ucS = Uc/L.$$

La grandezza "flusso di energia per unità di tempo e di superficie" è detta *intensità* dell'onda

$$I = uc = c\frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 \tag{4.20}$$

e la seconda eguaglianza vale per onde monocromatiche. Questo flusso di energia, come si vede, *dipende dal quadrato dell'ampiezza dell'onda*.

Ugualmente si mostra che un'onda elettromagnetica trasporta quantità di moto; prendendo il parallelepipedo usato in precedenza,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2}\int \mathbf{N}d\Omega = \frac{U}{c^2}c\hat{\mathbf{k}} = \frac{U}{c}\hat{\mathbf{k}} \tag{4.21}$$

e si vede che $\mathbf{p}$ è diretta, come previsto, lungo la direzione di propagazione dell'onda.

Tutti i ragionamenti qui esposti sono facilmente estendibili ad altri casi, in particolare alle onde sferiche. Anche in questo caso l'energia e la quantità di moto si propagano in direzione perpendicolare ai fronti d'onda. Siccome l'ampiezza di un' onda sferica decresce come $1/r$ ne segue che il flusso di energia per unità di superficie decresce come $1/r^2$. Questo è logico perchè la superficie dei fronti d'onda a sua volta cresce come r^2 ed il flusso di energia attraverso ogni superficie sferica, in assenza di dissipazione, deve essere costante.

4.5.1 La pressione di radiazione

Se un'onda elettromagnetica trasporta quantità di moto, e quest'onda "rimbalza" — ovvero viene riflessa — su di un qualche oggetto (uno "specchio"), la legge di conservazione della quantità di moto ci dice che l'oggetto in questione deve ricevere un impulso $J = \Delta p = \int F\ dt$ pari alla variazione della quantità di moto dell'onda stessa. Prendiamo in considerazione il caso in cui un'onda elettromagnetica piana viene totalmente riflessa da uno specchio su cui incide perpendicolarmente. Consideriamo un parallelepipedo con area di base S ed altezza $L = c\tau$, con τ un intervallo di tempo arbitrario; esso conterrà una quantità di moto elettromagnetica pari a

$$p = u\Omega/c = uSL/c = \epsilon_0 E_0^2 S\tau/2. \tag{4.22}$$

L'impulso trasmesso allo specchio per unità di tempo e di superficie, pertanto, nel caso di riflessione totale vale $J = \epsilon_0 E_0^2 = 2I/c = 2u$ (se l'onda fossa stata interamente assorbita avremmo ottenuto la metà del valore: $J = I/c = u$). Questa è dunque la forza per unità di superficie, vale a dire una pressione nota come *pressione di radiazione*.

Si tratta di una pressione estremamente debole. Per esempio, l'intensità della radiazione solare sulla Terra vale $I_S = 1.37\ 10^3$ W m^{-2}, quindi la pressione di radiazione solare è di soli $9.1\ 10^{-6}$ Pascal, ovvero oltre 10 miliardi di volte più piccola della pressione atmosferica. Tuttavia questa debolissima pressione è sufficiente a far sì che le code delle comete siano sempre rivolte in direzione opposta al Sole[3].

[3] Per la precisione, le code cometarie, composte sia da polveri che da gas, sono affette sia dalla pressione di radiazione che dal cosiddetto *vento solare*, ovvero il flusso di particelle che emana dalla nostra stella.

4.6 La luce come onda elettromagnetica

Come si è visto nella sezione 3.5.1 i campi elettromagnetici (e, come si è visto altrove, ovviamente anche i potenziali) obbediscono all'equazione delle onde, e le onde relative si muovono, nel vuoto, con velocità $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3\ 10^8$ m/s. Questa è proprio la velocità della luce nel vuoto; è difficile quindi sottrarsi alla conclusione, sostenuta anche da una vasta serie di altre considerazioni (per esempio, che sia le onde elettromagnetiche che la luce sono onde trasversali), che *la luce è un'onda elettromagnetica*, esattamente come le onde radio, i raggi X ed altre forme di radiazione che vedremo tra poco.

Non si tratta di un risultato da poco: le equazioni di Maxwell sono state ottenute considerando sistemi di fili, magneti, condensatori eccetera, tutte cose che apparentemente con la luce hanno poco a che fare. La connessione tra questi fenomeni dunque è un qualcosa di inaspettato ed è una delle grandi predizioni della teoria elettromagnetica classica.

4.6.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico: il fotone

Si è visto che i campi elettromagnetici trasportano energia e quantità di moto: due caratteristiche "meccaniche" che fanno sospettare che sia possibile una qualche trattazione del campo sotto forma particellare. Tuttavia nulla di ciò che è stato visto finora sembra sostenere questa tesi: il campo elettromagnetico è un campo continuo e tutta la fenomenologia fin qui discussa può essere spiegata senza fare ricorso ad altri concetti.

Una serie di risultati sperimentali ottenuti tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo costrinsero però ad un ripensamento di tutto il trattamento dell'elettromagnetismo prima, e di tutta la fisica poi. Questo processo ebbe sbocco nello sviluppo della *meccanica quantistica* e non è qui possibile illustrarlo. Vediamo solo alcune caratteristiche fondamentali.

Consideriamo il caso in cui della radiazione elettromagnetica incide su di una superficie metallica. Siccome l'onda trasporta energia ci si attende che, al momento in cui abbastanza energia sia stata depositata sul metallo, degli elettroni comincino ad avere energia sufficiente per essere emessi dal metallo. Questo si verifica ed è noto come *effetto fotoelettrico*.

Dalla teoria di Maxwell ci si aspetta che sia il numero di elettroni emessi sia la loro energia dipenda dall'energia totale depositata, dunque dall' intensità dell'onda incidente, e che ci sia un intervallo di tempo, che cresce col diminuire dell'intensità stessa, prima che un elettrone abbia accumulato abbastanza energia per potere uscire.

Non è questo in realtà quello che si osserva. Il numero di elettroni emessi è sì proporzionale all'intensità dell'onda, ma l'energia dipende dalla sua *frequenza*. Per onde incidenti monocromatiche in effetti l'energia massima degli elettroni emessi è la stessa per qualunque intensità. Inoltre al di sotto di una frequenza minima (*frequenza di soglia*) non si ha alcuna emissione, anche per intensità elevate di radiazione. Quando però si ha emissione, si osservano elettroni emessi ad intervalli di tempo anche molto brevi dopo l'inizio dell'illuminazione; solo il tempo *medio* di inizio dell'emissione aumenta.

Nel suo lavoro del 1905 che gli fruttò il Nobel, Albert Einstein diede una spiegazione semplice e rivoluzionaria di queste anomalie. Einstein fece l'ipotesi che l'onda elettromagnetica fosse costituita in realtà da uno sciame di "particelle" chiamate *fotoni*, ognuna dotata di quantità di moto $\mathbf{p}$ e di energia data dalla 4.21

$$U = pc$$

(si confronti con la relazione $U = p^2/2m$ valida per particelle materiali libere), secondo quanto prescritto dall'elettrodinamica maxwelliana per le onde piane monocromatiche. A differenza di Maxwell però Einstein assegnò ad ogni onda di frequenza ν un'energia

$$U = h\nu \tag{4.23}$$

dove n è un intero e $h = 6.6256\ 10^{-34}$ J s è la costante che Planck aveva introdotto alcuni anni prima per spiegare altri comportamenti della radiazione[4]. Posto $\hbar = h/2\pi$ si ha di conseguenza $p = \frac{U}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$. L'intensità dell'onda fornisce il numero di fotoni presenti nell'onda stessa, che quindi è vista come formata da una massa di "granellini di luce". In altri termini, l'energia elettromagnetica è *quantizzata*. Si noti però che non esiste un'energia minima per la radiazione, in quanto è sempre possibile generare onde di frequenza arbitrariamente bassa, dunque fotoni di energia arbitrariamente bassa.

Per esempio, un fascio luminoso giallo ($\lambda = 6\ 10^{-7}$ m, dunque $\nu = 5\ 10^{14}$ s^{-1}) dell'intensità di 100 W e della durata di un secondo risulta composto da $n = U/h\nu = 3\ 10^{20}$ fotoni. È chiaro che con numeri così alti di fotoni la granularità della radiazione è normalmente impercettibile, esattamente come è normalmente impercettibile la granularità della materia[5]. Solo per frequenze

[4]Si trattava del problema dell'*emissione di corpo nero*, per la cui trattazione si rimanda ai testi introduttivi di Meccanica Quantistica.

[5]La granularità della materia è dovuta alle molecole. Si noti come la cifra ottenuta non sia troppo dissimile dal numero di Avogadro $N_A = 6\ 10^{23}$. Una mole di fotoni — N_A fotoni — è talvolta chiamata un *Einstein*.

relativamente elevate della radiazione il numero di fotoni è sufficientemente piccolo perchè la loro natura discreta sia avvertibile.

Tramite l'ipotesi del fotone tutte le anomalie summenzionate trovano una spiegazione. Un elettrone è colpito da un singolo fotone che gli trasmette la sua energia. Se w è il *lavoro di estrazione* dal metallo, ovvero l'energia necessaria per farlo uscire con velocità nulla, allora l'energia cinetica degli elettroni emessi sarà, per la conservazione dell'energia,

$$U = h\nu - w \tag{4.24}$$

che mostra un'evidente soglia per $\nu = w/h$: fotoni con frequenza inferiore a questa, anche se numerosi, non possono estrarre alcun elettrone. Viceversa, un fotone con ν superiore alla soglia può estrarre un elettrone, anche se l'intensità è bassissima: ne segue che il periodo d'attesa prima che cominci l'emissione può essere molto breve anche per intensità basse.

4.6.2 Lo spettro elettromagnetico

Le onde elettromagnetiche possono essere classificate equivalentemente secondo la lunghezza d'onda, la frequenza o l'energia del singolo fotone. A seconda di questi parametri le onde hanno effetti diversi nell'interazione con la materia, sia che si tratti di generazione che di assorbimento. L'insieme di tutte le frequenze (o lunghezze d'onda o energie...) è noto come *spettro*, ed è convenzionalmente diviso in un certo numero di *bande*. Le suddivisioni principali sono come segue:

> **Raggi X e γ.** Prendono questo nome le radiazioni di lunghezza d'onda inferiore ai 10^{-9} m, ovvero di frequenza superiore a $10^{17} \div 10^{18}$ Hz. L'energia dei fotoni in questione supera il keV. La differenza tra i due tipi consiste essenzialmente nel modo di generazione: i raggi X solitamente tramite eccitazione degli elettroni più legati degli atomi, i γ attraverso reazioni nucleari, e per conseguenza questi ultimi sono più energetici dei primi. Un esempio semplice è la generazione di due raggi γ di 511 MeV per mezzo dell'annichilazione di un elettrone e di un positrone (antielettrone).
>
> È noto l'uso dei raggi X per analisi mediche ed ingegneristiche, dovuto al fatto che tessuti e materiali diversi assorbono diversamente tali radiazioni. Le parti più dense risultano quindi più scure — o meglio chiare, visto che ci si ferma al negativo — nelle *radiografie*.
>
> **Ultravioletti.** Prendono questo nome le radiazioni di lunghezza d'onda compresa tra i 4 10^{-7} ed i 10^{-9} m, ovvero di frequenza compresa

tra i 10^{15} ed i 3.8 10^{17} Hz circa. L'energia dei fotoni in questione è compresa tra i 3.2 ed i 1000 eV. Si tratta di radiazioni meno penetranti delle precedenti, in larga parte assorbite dall'atmosfera, ma ancora abbastanza energetiche da poter facilmente causare reazioni chimiche e rompere legami chimici. Da questo deriva la loro pericolosità per la salute ed il loro potere sterilizzante.

Visibile. Comprende le radiazioni di lunghezza d'onda compresa tra i 7.6 10^{-7} ed i 4 10^{-7} m, ovvero di frequenza compresa tra i 10^{15} ed i 4 10^{14} Hz. L'energia dei fotoni in questione è compresa tra gli 1.6 ed i 3.2 eV. Il colore degli oggetti dipende dalla lunghezza d'onda: quelle più corte danno la sensazione del violetto, poi via via che si scende si ottengono il blu, il verde, il giallo, l'arancione ed il rosso. Questo fatto giustifica l'aggettivo *monocromatica* (in greco "di un solo colore") applicato alle onde di una frequenza ben determinata, anche se non appartengono al visibile. Si faccia attenzione però che la percezione del colore è una questione ben più complessa di quanto qui accennato.

Infrarossi. Radiazioni di lunghezza d'onda compresa tra i 10^{-3} ed i 7.6 10^{-7} m, ovvero di frequenza compresa tra i 3 10^{11} ed i 4 10^{14} Hz. L'energia dei fotoni in questione è compresa tra gli 0.001 e gli 1.6 eV. Queste radiazioni sono particolarmente efficienti nell'interagire con i gradi di libertà rotazionali e vibrazionali delle molecole, che hanno frequenze proprie — si ricordi la discussione dei circuiti oscillanti e dei corrispondenti oscillatori meccanici! — proprio di questi ordini di grandezza. Inoltre i corpi a temperature non troppo elevate, fino a qualche migliaio di gradi, emettono principalmente radiazione elettromagnetica in questa banda; si noti che a temperatura ambiente $k_B T \simeq 0.025$ eV. Ne segue che gli infrarossi sono i principali responsabili, anche se non gli unici, del trasferimento del calore per *irraggiamento*.

Microonde. Radiazioni di lunghezza d'onda compresa tra i 0.3 ed i 10^{-3} m, ovvero di frequenza compresa tra i 10^9 ed i 3 10^{11} Hz. L'energia dei fotoni in questione è compresa tra i il meV ed il centesimo di meV. Le frequenze di lavoro dei forni a microonde (2.5 GHz), dei radar (circa 10 GHz) e dei cellulari odierni (intorno ai 2 GHz) cadono in questa banda. È una banda importante anche per l'astronomia, in quanto alcune radiazioni importanti emesse dall'idrogeno cadono proprio qui.

Onde radio. Le onde di maggiore lunghezza d'onda, superiore agli 0.3 m, e di minore frequenza, inferiore al GHz. All' estremo superiore si trovano le frequenze televisive (100 – 1000 MHz), mentre le varie bande radio vanno dai 500 kHZ ai 200 MHz. L'atmosfera è generalmente trasparente ad esse, ma ad alte quote si ha una zona, detta *ionosfera*, dove la presenza di atomi ionizzati ed elettroni liberi crea una zona conduttrice in grado di rifletterli. Questo permette le trasmissioni radio anche al di là dell'orizzonte.

4.7 Cenni di ottica geometrica

4.7.1 Le onde elettromagnetiche nei mezzi materiali

L'affermazione secondo cui le onde elettromagnetiche si muovono con velocità c è valida solo nel vuoto. È però elementare vedere che in un mezzo materiale trasparente con costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$ un'onda elettromagnetica si propaga con velocità

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

avendo introdotto la grandezza *indice di rifrazione (assoluto)*

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \simeq \sqrt{\epsilon_r}. \tag{4.25}$$

La seconda eguaglianza deriva dal fatto che nella grande maggioranza dei mezzi trasparenti $\mu_r \simeq 1$. È necessario tenere presente che, sebbene finora si sia considerata ϵ_r come una costante, essa è in realtà una funzione della frequenza, e pertanto *i mezzi materiali sono mezzi dispersivi*. La dipendenza non è affatto trascurabile; per esempio, per l'acqua $\epsilon_r = 78 \Rightarrow n = 8.8$ a basse frequenze, ma alle frequenze del visibile $\epsilon_r = 1.8 \Rightarrow n = 1.33$.

Il fatto che la velocità delle onde elettromagnetiche vari da un mezzo all'altro ha conseguenze importanti. La principale è che all'interfaccia tra due materiali (uno dei quali può essere un gas, o il vuoto) le onde non si propagano più in maniera rettilinea.

4.7.2 Le leggi dell'ottica geometrica

Per discutere degli effetti all'interfaccia conviene introdurre il concetto di *raggio*. Un raggio è una linea a cui il vettore $\mathbf{k}$ di propagazione dell'onda è sempre tangente, ed orientata in verso concorde ad esso. In pratica, tra $\mathbf{k}$ ed il raggio intercorre la stessa relazione che intercorre tra una linea di campo elettrico o magnetico ed il vettore campo elettrico o magnetico. È immediato vedere che i raggi sono ad ogni punto ortogonali ai fronti d'onda. Per un'onda piana i raggi sono fasci di rette parallele; per una sferica sono fasci di rette passanti per un punto. I punti di due fronti d'onda connessi da un raggio vengono chiamati *punti corrispondenti* ed è chiaro che *l'intervallo di tempo che separa punti corrispondenti di due superficie d'onda è lo stesso per tutte le coppie di punti corrispondenti (Teorema di Malus).*

Si dimostra che, purché la lunghezza d'onda sia sufficientemente grande (la ragione di questa limitazione la si vedrà tra poco), all'interfaccia tra due mezzi trasparenti di indici di rifrazione n_1 e n_2, un raggio luminoso (*raggio incidente*) che forma un angolo θ_i con la normale alla superficie si sdoppia: si genera un *raggio riflesso*, formante un angolo θ_R con la detta normale, ed un *raggio rifratto*, che continua nel secondo mezzo formando un angolo θ_r con la normale (orientata verso l'interno) alla superficie.

Le relazioni tra questi raggi, nelle ipotesi fatte, sono riassunte in tre leggi:

1. *I raggi incidente, riflesso e rifratto giacciono tutti sullo stesso piano, che comprende la normale alla superficie.*

2. *L'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali.*

3. *(Legge di Snell) Tra l'angolo d'incidenza e l'angolo di rifrazione vale la relazione*
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \tag{4.26}$$
dove n_i è l'indice di rifrazione del mezzo i-mo.

Il rapporto $n_{12} = n_1/n_2$ tra gli indici di rifrazione è anche indicato come *indice di rifrazione relativo del mezzo 1 rispetto al mezzo 2* ed è chiaramente il reciproco del rapporto delle velocità della luce nei due mezzi. Spesso gli indici di rifrazione vengono dati relativi all'aria, per ovvi motivi. La differenza comunque è piccola, visto che per l'aria $n = 1.0003$.

La giustificazione delle tre leggi può essere data sulla base del principio di Malus. La prima e la seconda in realtà seguono da semplici considerazioni di simmetria. Per dimostrare la prima, immaginiamo per assurdo che un raggio riflesso (per quello rifratto il ragionamento è identico) non giaccia sul piano definito dal raggio incidente e dalla normale, ma che sia p.es. "spostato a destra". Ribaltiamo ora il sistema rispetto al piano "raggio incidente/normale": ora il raggio riflesso dovrebbe essere ugualmente ribaltato ed essere, quindi, "spostato a sinistra". Ma in virtù del ribaltamento il sistema non è mutato: quindi il raggio riflesso dovrebbe essere comunque "spostato a destra". L'unico modo in cui può essere entrambe le cose è che non sia spostato affatto.

Per dimostrare la seconda, si può procedere in maniera analoga, ma sfruttando la simmetria per inversione temporale. Di nuovo per assurdo, supponiamo che l'angolo di riflessione sia p.es. maggiore d quello di incidenza (lo stesso ragionamento varrà per l'ipotesi che sia minore). Questo vuol dire che il raggio "si abbassa" durante la riflessione, cioè che è più radente alla superficie. Ora immaginiamo che il raggio torni sui suoi passi: allora il raggio, retrocedendo, dovrebbe "alzarsi" durante la riflessione. Ma non c'è alcuna ragione di distinguere un caso dall'altro: le leggi di propagazione ondosa sono indifferenti al segno del tempo, ovvero se il tempo scorre in un senso o nell'altro[6]. Quindi il raggio che "retrocede" dovrebbe "abbassarsi" nella riflessione, e l'unico modo in cui può farlo mentre al contempo "si alza" è che non faccia nessuna delle due cose.

Per dimostrare la terza, consideriamo due raggi R_1 e R_2 di un' onda piana incidente, con R_1 che incide prima di R_2, e prendiamo due punti A (su R_1) e B (su R_2) appartenenti allo stesso fronte d'onda; A giace all'interfaccia tra i due mezzi e B nel primo mezzo. Prendiamo anche due punti C e D, sempre su R_1 e R_2 rispettivamente, ma su di un altro fronte d'onda, e con D all'interfaccia. C si trova all'interno del secondo mezzo.

Il triangolo ACD è rettangolo in C, e l'angolo ADC è uguale a θ_r (il segmento CD è un fronte d'onda, dunque perpendicolare a R_2 nel mezzo 2), perciò $\overline{AD}\sin\theta_r = \overline{AC}$. Il triangolo ABD è rettangolo in B, e l'angolo ADB è uguale a θ_i, perciò $\overline{AD}\sin\theta_i = \overline{BD}$. Usiamo il principio di Malus per affermare che i tempi per andare da A a C e da B a D sono gli stessi. Ne segue che $\overline{AC}/v_2 = \overline{BD}/v_1$, e da questo $v_2 \sin\theta_i = v_1 \sin\theta_r$, ovvero la legge di Snell.

Si noti come la legge di Snell, vista come equazione per l'angolo del raggio rifratto, non ammetta sempre soluzioni. Se l'angolo d'incidenza è abbastanza grande, vale a dire se l'incidenza è radente, in modo tale che $n_{12}\sin\theta_i > 1$ il raggio rifratto non può esistere. Questa condizione è detta di *riflessione totale* ed è la ragione per cui i subacquei in immersione non hanno una visuale completa di quanto accade al di sopra del pelo dell'acqua. Nel caso dell'interfaccia acqua-aria la riflessione totale si ha per angoli superiori a circa $49°$.

Poste queste leggi, e noti gli indici di rifrazione dei vari mezzi, il calcolo delle proprietà ottiche di un sistema di lenti, specchi, o altro si riduce ad un calcolo puramente geometrico. Da qui il nome di *ottica geometrica* data a questa branca della fisica.

Fin qui si è sottinteso che i valori n_i fossero costanti. In realtà, come si è già accennato, la velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo dipende dalla frequenza e pertanto la rifrazione di un raggio formato da più frequenze — più colori, nel visibile — produce un fascio di raggi ad angolazioni diverse, ogni

[6]Questa è una conseguenza della presenza di una derivata *seconda* rispetto al tempo nell'equazione 4.1.

angolo con un colore diverso. Questo è il familiare fenomeno di scomposizione della luce da parte dei prismi.

Un altro caso in cui si ha più di un raggio rifratto è quello in cui si ha dipendenza dell'indice di rifrazione dalla polarizzazione dell'onda incidente (fenomeno della *doppia rifrazione*). Questo fenomeno si osserva in determinati cristalli a struttura anisotropa, che vengono detti *birifrangenti*. Se, come normalmente si dà, la luce è una mescolanza di polarizzazioni diverse, allora si hanno due raggi rifratti, detti *ordinario* e *straordinario*, corrispondenti a due direzioni di polarizzazione distinte.

Infine si noti come le tre leggi si riferiscano a superfici *liscie*. Se le superfici sono "ruvide", ovvero formate da un gran numero di superfici più piccole orientate in varie direzioni, bisognerebbe applicare le tre leggi a ciascuna delle piccole superfici in questione. Il risultato è una riflessione ed una rifrazione *diffusa*, il che spiega perchè non tutte le superfici sono degli specchi e come in particolare si possano rendere tali levigandole a sufficienza. È questa la ragione per la limitazione dell'ottica geometrica a lunghezze d'onda "non troppo piccole" menzionata all'inizio del paragrafo.

Ma che cosa significa "liscia" in questo caso? Significa che le irregolarità della superficie devono essere molto più piccole della lunghezza d'onda della luce incidente; in questo modo l'onda non è sensibile alle irregolarità della superficie.

4.7.3 Il principio di Fermat

Le leggi dell'ottica geometrica possono essere riassunte in un solo, semplice principio variazionale, detto di Fermat:

La luce segue sempre una traiettoria che rende estremale il tempo di percorrenza.

Per esempio, per andare da un punto A ad un punto B, distanti d ed entrambi immersi in un mezzo omogeneo, la luce deve rendere estremale il tempo $t = x/c$, dove x è la distanza percorsa e c in questo caso è costante. Quindi bisogna rendere estrema la distanza percorsa, e questo si ottiene ovviamente tramite un percorso rettilineo.

Una deduzione più complicata si ha nel caso della rifrazione. Diamo per dimostrata la prima legge dell'ottica geometrica e lavoriamo direttamente nel piano definito dai raggi incidente e rifratto, che chiamiamo piano xy. Poniamo A$= (0, h)$, immerso nel mezzo omogeneo 1, con indice di rifrazione pari a n_1, che occupa il semispazio $y > 0$, e B$= (p, q)$ nel mezzo 2. La luce si propagherà in maniera rettilinea all'interno di ognuno dei due mezzi, ed i raggi si piegheranno solo al momento di attraversare l'interfaccia nel punto $(x, 0)$. Il tempo totale dunque sarà dato da

$$t = t_1 + t_2 = x_1/(c/n_1) + x_2/(c/n_2) = \frac{1}{c}\left[n_1\sqrt{x^2+h^2} + n_2\sqrt{(x-p)^2+q^2}\right]$$

e la condizione di estremo $\delta t = 0$ diventa

$$0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + n_2 \frac{x-p}{\sqrt{(x-p)^2+q^2}} = n_1 \sin\theta_i - n_2 \sin\theta_r$$

(il segno negativo deriva dal fatto che θ_r è positivo se $p > x$) che è proprio la legge di Snell. Analogamente (*Esercizio*) si procede nel caso della riflessione.

Si faccia attenzione a non considerare il principio di Fermat come un principio di *minimo*: il percorso seguito dalla luce può ugualmente bene essere un massimo od un punto di sella. Si consideri per esempio un *diottro sferico*: un cilindro trasparente sormontato da una semisfera, pure trasparente, entrambi di raggio R e con indice di rifrazione n, nel vuoto. Poniamo l'asse del cilindro coincidente con l'asse delle x positive, col centro della semisfera nell'origine, e chiediamoci quale sia il tragitto seguito dalla luce per andare da un punto esterno al diottro A$= (-a-R, 0)$ ed il punto ad esso interno B$= (a-R, 0)$. Evidentemente si tratterà di un percorso rettilineo passante per l'apice della semisfera. Calcoliamo ora il tempo impiegato dalla luce per andare da A a B attraverso un percorso vicino a quello reale ma passante per un punto $(-R\cos\phi, R\sin\phi)$ sulla semisfera. Si ottiene

$$\begin{aligned}
ct &= ct_1 + ct_2 \\
&= \sqrt{(a+R-R\cos\phi)^2 + (R\sin\phi)^2} + n\sqrt{(a-R+R\cos\phi)^2 + (R\sin\phi)^2} \\
&= \sqrt{a^2 + 2R(R+a)(1-\cos\phi)} + n\sqrt{a^2 + 2R(R-a)(1-\cos\phi)}
\end{aligned}$$

ed effettuando la variazione rispetto al parametro, piccolo, ϕ

$$\begin{aligned}
0 &= c\frac{dt}{d\phi} = \frac{R(R+a)\sin\phi}{\sqrt{a^2+2R(R+a)(1-\cos\phi)}} + n\frac{R(R-a)\sin\phi}{\sqrt{a^2+2R(R-a)(1-\cos\phi)}} \\
&\simeq \frac{R}{a}[R+a+n(R-a)]\phi = R[\frac{R}{a}(n+1) - (n-1)]\phi.
\end{aligned}$$

Questa equazione è soddisfatta, come previsto, per $\phi = 0$, e ci dice, per esempio prendendo la derivata seconda, che tale valore è un punto di minimo se $R/a > (n-1)/(n+1)$, massimo se $R/a < (n-1)/(n+1)$, e flesso se $R/a = (n-1)/(n+1)$.

4.8 Interferenza e diffrazione

Il fatto che l'equazione delle onde sia lineare ci dice che la somma di due onde è ancora un'onda. Tuttavia le equazioni 4.20 e 4.19 ci dicono anche che l'energia trasferita dipende dal quadrato dell'ampiezza. Questi fattori, lineari e non lineari, si combinano per dare alcuni dei fenomeni più caratteristici connessi alla propagazione per onde.

4.8.1 Interferenza

Il primo e più fondamentale fenomeno consiste nel fatto che la somma di due onde deve dare in taluni punti dello spazio un valore nullo. Prendiamo infatti in considerazione cosa succede se due sorgenti di onde scalari monocromatiche $f_i = f_{0i}e^{i(kr-\omega t)}$, $i = 1, 2$, $f_{0i} \in \mathbf{R}$, si trovano a distanza a tra di loro e misuriamo l'onda risultante ad una distanza d da entrambe. Il valore trovato sarà

$$f(t) = f_{01}e^{i(kr_1-\omega t)} + f_{02}e^{i(kr_2-\omega t)}$$

se r_1 e r_2 sono le rispettive distanze delle sorgenti. Definendo lo *sfasamento*

$$\delta = k(r_1 - r_2) \tag{4.27}$$

si vede che l'onda risultante vale

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(f_{01}e^{i\delta} + f_{02}\right) e^{i(kr_2-\omega t)} \\ &= \sqrt{\left(f_{01}\cos\delta + f_{02}\right)^2 + f_{01}^2 \sin^2\delta}\; e^{i(kr_2-\omega t+\phi)} \\ &= \sqrt{f_{01}^2 + f_{02}^2 + 2f_{01}f_{02}\cos\delta}\; e^{i(kr_2-\omega t+\phi)} \end{aligned} \tag{4.28}$$

dove ϕ è un numero reale il cui valore qui non interessa. Interessa invece notare che l'onda risultante ha un'ampiezza dipendente dallo sfasamento δ, quindi dalla posizione in cui l'onda è rilevata. Si vede che tale ampiezza è massima per

$$\cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 2n\pi \tag{4.29}$$

e minima per

$$\cos\delta = -1 \Rightarrow \delta = (2n+1)\pi. \tag{4.30}$$

La somma di due onde dunque può dare come risultato, in certi punti, un campo eventualmente anche nullo (quando $f_{01} = f_{02}$). Questo è un fenomeno familiare negli auditorium, che devono essere progettati accuratamente in modo che non vi siano punti in cui l'interferenza crei problemi all'ascolto; ma si può osservare anche ascoltando la radio, notando come in casa certi punti siano favorevoli alla ricezione ed altri invece meno.

Si parla di *interferenza costruttiva* quando è soddisfatta la condizione 4.29 e l'ampiezza totale del campo è maggiore della somma dei campi delle singole onde, *distruttiva* quando invece è soddisfatta la condizione 4.30. Il luogo geometrico di questi punti (*superfici nodali*) è, in questo caso, una famiglia di iperboloidi $r_1 - r_2 = (n+1)\pi/k$ per l'interferenza distruttiva ed analogamente per quella costruttiva.

Si noti come gli iperboloidi appena definiti siano superfici fisse nel tempo. Questa è una diretta conseguenza del fatto che abbiamo scelto sorgenti monocromatiche con la stessa frequenza, o come si suol dire *coerenti*. Per sorgenti non coerenti non si può dare un risultato così ben definito in quanto le superfici nodali si accavallano in modo più o meno caotico e non sono generalmente osservabili.

Un modo di ottenere due sorgenti sincrone consiste nell'illuminare (prendiamo per fissare le idee il caso di un'onda luminosa) uno schermo opaco in cui sono state ricavate due fenditure, che supporremo molto sottili, distanti a con una radiazione monocromatica. In questo modo ogni fenditura risulta essere una sorgente monocromatica in fase con l'altra. Poniamo ora un secondo schermo, integro, dalla parte "oscura" del primo ad una distanza D, e calcoliamo l'ampiezza dell'onda su di esso, prendendo come parametro la distanza x tra il punto sullo schermo ed il punto direttamente di fronte alla coppia di fenditure. Se $x << D$ possiamo porre $r_1 \simeq r_2$ e $f_{01} \simeq f_{02}$, per cui dalla 4.28 otteniamo

$$f_0 = f_{01}\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2 f_{01} cos(\delta/2).$$

L'angolo θ sotto il quale è visto x guardando dalle fenditure è tale per cui $\sin\theta \simeq \tan\theta = x/D$. Pertanto $r_1 - r_2 = a\sin\theta \simeq ax/D$ e perciò

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi a x}{\lambda D}. \tag{4.31}$$

Si vede dunque che sul secondo schermo si osserveranno regioni, dette *frange d'interferenza*, in cui l'illuminazione è maggiore ed altre in cui è pressoché nulla. Per la precisione, l'intensità dell'onda sullo schermo è data da

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda D}\right) \tag{4.32}$$

dove I_0 è una costante opportuna. Misurando la separazione delle frange si può ottenere la lunghezza d'onda della radiazione.

4.8.2 Diffrazione

Un secondo fenomeno prettamente ondulatorio è dato dalla caratteristica delle onde di "girare gli angoli". Per capirlo, esaminiamo un caso molto simile al precedente, considerando però una sola fenditura, pensata questa volta come avente una larghezza b non trascurabile. Per semplicità non faremo la trattazione completa. Vogliamo solo dimostrare che nelle direzioni tali che $b \sin\theta = n\lambda$, con n intero non nullo, si ha interferenza distruttiva; un argomento simile mostra che per $2b \sin\theta = n\lambda$ si ha interferenza costruttiva.

Ricordiamo a questo proposito la condizione di interferenza distruttiva 4.30, che in termini di lunghezza d'onda diventa

$$r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$$

per cui in questo caso, se prendiamo coppie di punti nella fessura distanti di $b/2$ — per esempio un'estremità ed il punto di mezzo — si ha

$$\frac{b}{2} \sin\theta = r_1 - r_2 = \frac{m}{2}\lambda.$$

Così per m dispari questi raggi interferiscono distruttivamente. Per m pari ripetiamo il ragionamento ma con coppie di punti separate di $b/4$ e otteniamo

$$\frac{b}{4} \sin\theta = \frac{m}{2}\frac{\lambda}{2}.$$

Il procedimento può essere esteso a tutti gli interi. Non è però applicabile, come si vede facilmente, per $\theta = 0$, e a quest' angolo l'interferenza è costruttiva.

Si osservi come questo effetto, detto *diffrazione*, dipenda in maniera cruciale dalla lunghezza d'onda della luce, così come ne dipende l'interferenza. Per $\lambda \to 0$ tali effetti scompaiono, e la luce procede semplicemente in linea retta formando un'immagine fedele della fenditura sul secondo schermo. Abbiamo così che la condizione per cui l'ottica geometrica sia valida è che la lunghezza d'onda sia molto più piccola delle dimensioni degli oggetti, fenditure eccetera che la luce trova sul suo cammino (ma non troppo piccola, altrimenti abbiamo la diffusione discussa in precedenza). Questa condizione è ben soddisfatta dalla luce visibile in circostanze ordinarie, ma molto meno da onde radio e da onde sonore le cui lunghezze d'onda sono dell'ordine dei metri. Non esiste perciò un' "acustica geometrica".

Capitolo 5

La teoria della Relatività

5.1 Contrasto tra Meccanica Classica ed elettromagnetismo

Nella discussione fin qui vista dell'elettrodinamica, è stata data poca attenzione alla questione dei sistemi di riferimento; di fatto il solo punto in cui essa è stata menzionata è stata nella discussione della legge di Faraday. Non si tratta di un'omissione casuale, perché l'unione di elettromagnetismo e di meccanica classica porta ad alcune profonde difficoltà.

Ricordiamo per prima cosa i due risultati fondamentali della teoria classica dei moti relativi:

R) *Principio di relatività: tutte le leggi fisiche hanno la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.*

Questo evidentemente non implica che ogni fenomeno fisico sia descritto nello stesso modo in ogni riferimento inerziale: le coordinate di una particella per esempio saranno diverse in sistemi diversi. La legge di gravitazione universale però conserva la forma $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$ in ogni riferimento inerziale, visto che dipende solo dalla coordinata relativa $\mathbf{r}$ dei corpi interagenti, coordinata che non varia con la scelta del riferimento.

G) *Trasformazioni di Galileo: la posizione* $\mathbf{r}$ *di una particella misurata in un sistema di riferimento inerziale* O *e la posizione* $\mathbf{r}'$ *della stessa particella in un altro sistema inerziale* O'*, in moto rispetto al primo con velocità costante* $\mathbf{V}$ *sono collegate dalla relazione*

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \tag{5.1}$$

e di conseguenza le velocità dalla relazione

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{5.2}$$

Questo secondo principio è coerente col primo. Infatti la legge fondamentale della meccanica classica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dipende solo dall'accelerazione, che evidentemente è invariante[1] per trasformazioni di Galileo, e dalla forza, invariante per il principio di Relatività. Di conseguenza, è sufficiente supporre che le masse siano invarianti per non incorrere in contraddizioni.

Con l'elettrodinamica però ci confrontiamo con un fatto nuovo ed incompatibile coi precedenti:

M) *Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo.*

Il modo più semplice di vederlo è di considerare che da esse si ottiene un'equazione d'onda che prevede onde la cui velocità è, nel vuoto, sempre $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Se, per il principio R, ammettiamo che le equazioni di Maxwell valgano in tutti i riferimenti inerziali, dobbiamo concludere che

M_1) *La velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti inerziali.*

E questa conclusione è chiaramente in contraddizione con G.

5.1.1 Tentativi di misurare la velocità rispetto all'etere

Il contrasto tra i principi R, G ed M è insanabile, e ci costringe a concludere che uno dei tre deve essere modificato o rigettato.

Una prima possibilità che si presenta viene suggerita dalla discussione dell'effetto Doppler per il suono. Anche in quel caso ci siamo imbattuti in una formula che dipendeva non dalle velocità relative, ma dalla velocità rispetto ad un sistema di riferimento privilegiato, ovvero quello in cui il mezzo in cui si propaga il suono, l'aria, è a riposo. La velocità del suono effettivamente dipende dal riferimento; se anche le onde elettromagnetiche si propagassero in un mezzo, l'*etere*, di cui rappresentano le perturbazioni, sarebbe naturale supporre che le leggi che le regolano siano valide solo nel sistema di riferimento in cui l'etere è in quiete, e la velocità della luce sarebbe

[1] Qui ed in seguito chiamiamo invariante una grandezza il cui valore non cambia nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro. Si rifletta sulla differenza tra "invariante" e "conservato".

diversa nei vari sistemi di riferimento inerziali secondo la 5.2. In altre parole, per l'elettrodinamica non varrebbe il principio di relatività.

Siccome l'ipotesi dell'etere era già stata avanzata molto tempo prima per altre ragioni, questa ipotesi fu la prima ad essere presa in considerazione. Michelson e Morley si proposero quindi di misurare la velocità della Terra rispetto a questa ipotetica sostanza. Il problema principale consiste nel fatto che la velocità della Terra è molto piccola rispetto a c: possiamo aspettarci che essa sia dell'ordine della velocità orbitale attorno al sole, $v_t \simeq 30$ km/s. (Se anche per un caso fortuito la velocità rispetto all'etere fosse pressoché nulla in un certo momento dell'anno, basterebbe aspettare sei mesi per avere una velocità pari circa a $2v_t$.) Purtroppo questo significa che $v_t/c \sim 10^{-4}$. Non solo, ma si puó dimostrare[2] che non è possibile rivelare effetti del primo ordine in v/c, per cui la precisione degli esperimenti deve essere dell'ordine di $(v_t/c)^2 \sim 10^{-8}$.

Si tratta di una precisione estremamente elevata, ma Michelson trovò un modo per riuscire ad ottenerla, mediante un dispositivo noto come *interferometro di Michelson*. Il dispositivo consiste in una sorgente luminosa S, il più possibile coerente, il cui fascio luminoso viene indirizzato lungo un braccio rigido sul quale è posto a 45° uno specchio semiargentato. Con questo termine intendiamo uno specchio che lascia passare circa metà della radiazione incidente e riflette il resto. Il fascio luminoso incidendo sullo specchio dunque viene diviso in due: una parte prosegue lungo il braccio 1 per una lunghezza l_1, l'altra percorre un secondo braccio, ad angolo retto rispetto al primo, di lunghezza l_2. I due fasci poi vengono riflessi alle estremità di detti bracci e fatti ricombinare su di uno schermo, formando una figura di interferenza. Tale figura è dovuta allo sfasamento dei due raggi luminosi che effettuano percorsi diversi in tempi diversi.

Possiamo calcolare facilmente lo sfasamento tra i due raggi nell'ipotesi che la velocità $\mathbf{v}$ rispetto all'etere sia parallela al braccio 1. L'analisi è analoga, ma algebricamente più complicata, nel caso generale. Il raggio 1 per andare e tornare dallo specchio semiriflettente impiega un tempo $t_1 = l_1/(c+v) + l_1/(c-v) = 2cl_1/(c^2-v^2)$. Il raggio 2 compie un tragitto un po' più complicato: bisogna infatti tener conto che l'apparato durante il viaggio della luce si muove rispetto all'etere e che pertanto il raggio, nel riferimento dell'etere, compie un tragitto triangolare. Se il tempo di andata e ritorno è t_2, il tragitto percorso vale $s = 2\sqrt{v^2\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 + l_2^2}$ ed il tempo è quindi dato dall'equazione $t_2 = s/c = \frac{2}{c}\sqrt{v^2\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 + l_2^2}$. Risolvendola troviamo $t_2 = 2l_2/\sqrt{c^2-v^2}$.

[2] P. es. Ref.[12], nota 7 al capitolo 1.

Lo sfasamento Δ è dato dalla differenza $t_2 - t_1$ tra i tempi di arrivo moltiplicata per la frequenza della luce $\nu = c/\lambda$:

$$\begin{aligned}\Delta &= c(t_2 - t_1)/\lambda = \frac{2c}{\lambda}\left(l_2/\sqrt{c^2 - v^2} - cl_1/(c^2 - v^2)\right) \\ &= \frac{2}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_2 - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\end{aligned}$$

dove si è definito $\beta = v/c$.

Questa espressione non è adatta per una misura sperimentale, in quanto il termine tra parentesi richiederebbe una misura accuratissima di l_1 e l_2. Infatti, all'ordine più basso in β[3], tale termine diventa $(l_2 - l_1) - l_1\beta^2/2$, ed il termine da misurare è dell'ordine di $l_1 \times 10^{-8}$. La differenza $l_2 - l_1$ dovrebbe essere misurata quindi con un errore inferiore a questo, il che non è praticamente possibile.

Michelson trovò un modo per aggirare la difficoltà. Ruotando tutto il dispositivo di $90°$ si ottiene un diverso sfasamento Δ', e per ottenerlo basta scambiare i ruoli di 1 e 2:

$$\Delta' = \frac{2}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_1\right).$$

Dopo la rotazione si ha dunque uno spostamento di frange pari a

$$n = \Delta' - \Delta = \frac{2}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{l_1 + l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - (l_1 + l_2)\right] \simeq \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2 \qquad (5.3)$$

dove l'eguaglianza approssimata si riferisce al termine di ordine più basso per $\beta \to 0$. Si vede dunque che il termine $l_2 - l_1$ scompare, e dunque un errore relativo ε anche relativamente grande — per esempio 10^{-4} — nelle misure delle lunghezze dei bracci influisce solo all'ordine ε sul risultato finale. L'importante è che le lunghezze l_1 e l_2 non varino durante la rotazione

Con un apparato avente $l_1 \simeq l_2 \simeq 10$ m, in luce gialla ($\lambda \simeq 5\ 10^{-7}$ m) e stimando $\beta \sim 10^{-4}$ si può prevedere uno spostamento di circa 0.4 frange; l'apparato permetteva di apprezzare lo spostamento di 0.01 frange. Ripetizioni moderne permettono risoluzioni molto più elevate.

[3]Il modo più semplice di vederlo è di utilizzare lo sviluppo binomiale 4.11. Lo si tenga sempre presente: in questo capitolo verrà usato spesso.

5.1.2 Reazioni ai risultati sperimentali

Il trascinamento dell'etere

Il risultato è noto: non venne rilevato alcuno spostamento di frange. Questo implica che la velocità della Terra rispetto all'ipotetico etere è nulla, contrariamente ad ogni ragionevole aspettativa. Una via d'uscita consiste nel notare che ciò che si misura in realtà è la velocità della Terra rispetto all'etere che la circonda. Se l'etere fosse trascinato in qualche modo dai corpi materiali, allora la terra sarebbe *localmente* in quiete ed il risultato dell'esperimento sarebbe ovvio.

Esistono però osservazioni ed esperimenti che contraddicono questa ipotesi. Qui ne verrà menzionato solo uno, l'osservazione dell'*aberrazione stellare*. Si tratta di un fenomeno osservato già nel XVIII secolo e che consiste in un moto apparente annuale, grossomodo circolare, delle stelle. Questo moto è facilmente spiegabile supponendo che la velocità c della luce che ci arriva dalle stelle si sommi — vettorialmente — con la velocità terrestre v_t; in questo modo si ha che l'angolo della direzione di arrivo della luce varia come

$$\tan\theta = v_t/c. \tag{5.4}$$

Se invece l'etere fosse trascinato dalla Terra la sua velocità osservata sarebbe indipendente dal moto orbitale e l'aberrazione non si osserverebbe.

L'ipotesi della contrazione

Un altro modo di uscire dalla contraddizione è di postulare che la lunghezza l del braccio dell'interferometro che di volta in volta si trova diretto lungo la direzione del moto rispettto all'etere sia ridotta (*contrazione di Lorentz*) di un fattore $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} > 1$, ovvero

$$l' = \gamma l. \tag{5.5}$$

È immediato rendersi conto che questo escamotage rende conto del risultato nullo di Michelson e Morley *se i due bracci sono uguali*. Quando però si ripete l'esperimento con interferometri a bracci disuguali si ottiene ugualmente un risultato nullo. La contrazione di Lorentz perciò non riesce nell'intento di salvare l'ipotesi dell'etere.

Possibili modifiche dell'elettrodinamica

Se non sembra possibile rinunciare al postulato di relatività R, forse è possibile rinunciare alla validità delle equazioni di Maxwell M. Le possibilità di farlo senza entrare in stridente contrasto con quanto già noto, ed in modo da spiegare il risultato dell'esperimento di Michelson-Morley, ed altri, non sono molte. Il tentativo più serio consiste nell'ipotizzare che la velocità della luce dipenda dal moto della sorgente (teorie *emissive* o *balistiche*), includendo nel concetto di sorgente eventualmente gli specchi.

Ipotizzando che la velocità della luce sia sempre c rispetto alla sorgente originale, si poté spiegare il risultato dei vari esperimenti fin qui visti. Tuttavia non è possibile spiegare il risultato di altri esperimenti in cui la velocità della sorgente viene fatta variare in vari modi, ed in cui di conseguenza si avrebbero diversi valori della velocità della luce con effetti facilmente rilevabili. Anche questi effetti, tuttavia, non sono mai stati trovati.

5.2 I postulati della teoria della Relatività Ristretta

L'unico modo di salvare l'ipotesi dell'etere risultò essere quella di renderlo inosservabile. Lorentz riuscì infine a formulare una teoria che, postulando una serie di proprietà della materia e dell'etere, rendeva quasi impossibile[4] realizzare esperimenti di elettrodinamica che ne rivelassero l'esistenza. Si disse che la funzione dell'etere si era ridotta all'essere il soggetto del verbo "ondulare".

Ma può una teoria fisica essere basata su di una necessità grammaticale? In effetti, pare strano che dopo essersi dati tanta pena per spiegare le proprietà elastiche della materia in termini di proprietà elettromagnetiche, si debba ritenere necessario spiegare le proprietà elettromagnetiche in termini di proprietà elastiche... In assenza di ragioni empiriche cogenti che portino necessariamente ad ipotizzarlo, il concetto di etere, come qualunque altro concetto, diventa nel migliore dei casi superfluo se non sospetto, e comunque vittima del rasoio di Occam *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.*

La strada seguita da Einstein nel creare la teoria della Relatività Ristretta (o Speciale)[5] fu quella di rinunciare del tutto ad un concetto ormai diventato

[4]Ma non del tutto. Esistono almeno due esperimenti in grado di discriminare la teoria di Lorentz dalla Relatività Ristretta: il primo è la rilevazione dell'effetto Doppler trasverso 5.27; il secondo è il cosiddetto esperimento di Laub, riguardante il moto di un dielettrico magnetico. Si veda [12], nota 27 al capitolo 7. Naturalmente ne esistono altri che possono falsificare la teoria di Lorentz; per esempio esperimenti che rivelino un comportamento dell'elettrone diverso da quello postulato.

[5]Il nome non è molto appropriato, come Einstein stesso ebbe ad osservare; un nome più adatto sarebbe *teoria dell'invarianza.* I termini "ristretta" o "speciale" si usano per

superfluo come quello di etere, e di accettare sia R che M, rifiutando G. Eleviamo quindi a livello di postulato, alla stessa stregua dei principi della dinamica, l'affermazione secondo la quale le equazioni di Maxwell sono valide in tutti i riferimenti inerziali, ovvero che la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti inerziali (M_1).

Questa proprietà si esprime anche dicendo che la velocità della luce è un *invariante*. La rinuncia alle trasformazioni di Galileo di per sé non sarebbe particolarmente sconvolgente; non sarebbe stata la prima volta che concetti fisici apparentemente assodati venivano rivisti. Ciò che rende sorprendente e dura da accettare la posizione di Einstein è il fatto che le trasformazioni 5.1, 5.2 sembrano essere — sono — una conseguenza immediata delle nostre concezioni di spazio e di tempo. In altre parole, *la teoria della Relatività richiede una revisione delle nostre concezioni dello spazio e del tempo*. Pertanto è necessario procedere ad un'accurata disamina di tali nozioni ed in particolare delle procedure tramite le quali coordinate e tempi sono misurate, cercando di dare meno cose possibili per scontate.

5.2.1 Velocità della luce e simultaneità

Esaminiamo il processo di misura di una lunghezza. Come si sa, si dice che un oggetto ha lunghezza l se, posto di fianco ad esso un regolo graduato, tra un'estremità dell'oggetto e l'altra giacciono l suddivisioni di lunghezza pari ad una lunghezza campione.

Si noti come questo procedimento fornisca un risultato univoco solo se il regolo ed il corpo misurato sono in quiete l'uno rispetto all'altro; o, detto altrimenti, se sono entrambi in quiete nello stesso riferimento (inerziale). Se i due oggetti, regolo e corpo, sono in moto relativo, è fondamentale aggiungere la specificazione che i confronti alle estremità vanno eseguiti *simultaneamente*. Se infatti misurassimo, per esempio, la lunghezza di un treno in moto a 100 km/h facendone coincidere l'estremità posteriore con una tacca del regolo e l'estremità anteriore con un'altra tacca *ma un'ora dopo* troveremmo che il treno è lungo 100 km!

Si vede dunque che le misure di lunghezza dipendono in qualche modo dalle misure di tempo, e più specificamente dalle misure di simultaneità. (Chiamiamo *evento* ogni cosa che accade in un ben determinato punto dello spazio ad un tempo ben determinato. In pratica, un evento è un punto nello spazio-tempo.) Fintanto che tutti gli osservatori concordano nel definire due eventi "simultanei" o "non simultanei" questo non crea problemi. Tuttavia

distinguerla dalla Relatività Generale, che si applica anche a sistemi di riferimento non inerziali.

questa ipotesi, per quanto naturale, è tutt'altro che ovvia ed in effetti, quando analizzata criticamente, discutibile.

Immaginiamo che due eventi — per esempio la caduta di due fulmini — avvengano simultaneamente a distanza L in un riferimento O — per esempio un binario ferroviario. Un osservatore solidale con O e situato a metà strada tra i due punti in cui i fulmini sono caduti vedrà i lampi arrivare simultaneamente. Dato che la velocità della luce — per il postulato M_1 — è una costante universale, ed invariante l'osservatore ha tutti i diritti di concludere che i due eventi sono simultanei.

Consideriamo invece la stessa coppia di eventi osservati da un riferimento O' in moto con velocità v rispetto ad O lungo il binario. I due lampi saranno allora osservati in istanti *diversi*: la luce proveniente dal fulmine verso il quale O' si sta dirigendo arriverà *prima* dell'altro, dovendo percorrere un intervallo di lunghezza $L/2 - vt$ a velocità c (di nuovo, per il postulato M_1). L'altro lampo invece deve percorrere un intervallo di lunghezza $L/2 + vt$ alla stessa velocità.

Ne consegue che i due osservatori *non concordano* sulla simultaneità dei due eventi. Ovviamente O' è in grado di dire che O vede simultanei i due eventi, ma per il principio di relatività R nessuno dei due può dire che la propria misura sia "più corretta" dell'altra. Ne consegue che *la simultaneità tra eventi è relativa al riferimento* e che pertanto anche *le misure di lunghezza sono relative al riferimento.*

5.2.2 Misure di lunghezza trasversali

Consideriamo come variano le misure di un oggetto effettuate in un sistema di riferimento in cui esso è in moto. Prendiamo due sbarre identiche A e B e poniamo alle loro estremità degli oggetti — lamette, gessi, o altro — tali che possano lasciare un segno permanente sull'altra sbarra. Allontaniamo le sbarre e poi facciamole avvicinare in modo tale che 1) le sbarre siano parallele, 2) la velocità relativa sia perpendicolare ad entrambe le sbarre e 3) il punto di mezzo delle sbarre coincida quando queste si incrociano.

Nel sistema di riferimento solidale con A è solo B che si muove. Se ci fosse contrazione delle lunghezze trasversali allora la sbarra B sarebbe vista più corta di A e lascerebbe su quest'ultima una coppia di segni, mentre su B non ne rimarrebbero.

Nel sistema di riferimento solidale con B è solo A che si muove. Se ci fosse contrazione delle lunghezze trasversali allora la sbarra A sarebbe vista più corta di B e lascerebbe su quest'ultima una coppia di segni, mentre su A non ne rimarrebbero.

Ma per il principio di relatività A le due descrizioni devono essere equivalenti; e siccome in realtà esse portano ad effetti fisici misurabili (e permanenti) diversi, ne consegue che l'ipotesi di contrazione trasversale non può essere valida. Analogo ragionamento vale per l'ipotesi di allungamento trasversale. Quindi le misure delle dimensioni perpendicolari al moto di un oggetto sono immutate rispetto alle misure delle stesse dimensioni quando l'oggetto è a riposo.

5.2.3 Misure di tempi

Consideriamo ora il caso di un raggio luminoso proiettato da una sorgente S solidale con un sistema di riferimento O' in moto con velocità $\mathbf{v}$ rispetto ad un sistema O, ortogonalmente a $\mathbf{v}$, e fatto riflettere su di uno specchio, pure in quiete rispetto ad O', posto a distanza d da S fino a tornarvi.

In O' il raggio percorre un semplice percorso di andata-ritorno di lunghezza $2d$; per il postulato M_1 il tempo trascorso dall'emissione all'assorbimento vale $\Delta t' = 2d/c$. In questo riferimento i due fenomeni di emissione e di assorbimento avvengono nello stesso posto; un riferimento di questo tipo è detto *riferimento proprio*. In O invece il tragitto ha la forma dei due lati di un triangolo (si ricordi la discussione dell'esperimento di Michelson-Morley), ognuno dei quali ha lunghezza $\delta = \sqrt{(v\ \Delta t/2)^2 + d^2}$. Si noti che abbiamo usato il risultato dell'esperimento mentale precedente per affermare che d è lo stesso. Abbiamo perciò

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \gamma \Delta t'. \tag{5.6}$$

Evidentemente si ha che $\Delta t' < \Delta t$. Ovvero si ottiene che *l'intervallo di tempo tra due eventi, misurato da un osservatore in moto, è più lungo dell'intervallo di tempo proprio*, un fenomeno noto come *dilatazione dei tempi*.

5.2.4 Misure di lunghezza longitudinali

Siamo ora pronti per affrontare il problema della misura di lunghezze in direzione parallela al moto relativo di due sistemi di riferimento. Come per il caso delle misure di simultaneità, il modo migliore per definire le lunghezze di oggetti in moto è di sfruttare l'invarianza della velocità della luce. Possiamo dunque misurare la lunghezza di un oggetto, fermo od in moto rispetto al nostro sistema di riferimento poco importa, ponendo uno specchio ad una delle sue estremità e misurando il tempo che la luce impiega per andare dall'altra estremità dell'oggetto allo specchio e ritorno e moltiplicando per la velocità della luce. Per l'osservatore O' solidale con l'oggetto si ha

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c}.$$

La lunghezza l' è chiamata, ovviamente, *lunghezza propria*. Per un osservatore O rispetto al quale l'oggetto si muove a velocità v l'analisi è un po' più complicata. Se x è la posizione dello specchio al momento $t_1 = x/c$ della riflessione,

$$x = l + vt_1 = l + \frac{v}{c}x \Rightarrow x = \frac{l}{1-\beta}.$$

Riguardo al tragitto di ritorno, se y è la distanza della sorgente al momento t_2 del riassorbimento dalla posizione dello specchio al momento della riflessione,

$$y = l - v(t_2 - t_1) = l - \frac{v}{c}y \Rightarrow y = \frac{l}{1+\beta}.$$

Il tempo totale impiegato è dunque

$$t = (x+y)/c = 2l/c(1-\beta^2) \Rightarrow l' = \gamma l > l. \tag{5.7}$$

Ne viene dunque confermato e quantificato quanto detto in precedenza: la lunghezza misurata di un oggetto in moto risulta diversa, e precisamente più corta, della lunghezza propria (quella, ricordiamo, misurata dello stesso oggetto effettuata in un sistema di riferimento in cui l'oggetto è in quiete). Questo fatto è noto, come abbiamo già visto, come *contrazione di Lorentz*.

5.2.5 Sincronizzazione degli orologi

Una procedura che dipende in maniera molto evidente dalla definizione di simultaneità è quella di sincronizzazione degli orologi. Due orologi infatti si dicono sincronizzati se forniscono la stessa indicazione nello stesso momento. Nello stesso spirito dei punti precedenti sincronizziamo due orologi distanti l' ponendo una sorgente di luce in un punto equidistante tra loro ed emettendo un lampo; i due orologi verranno fatti segnare lo stesso tempo quando ricevono il lampo.

Seguendo il ragionamento del paragrafo 5.2.1, sappiamo che questa procedura fornisce una sincronizzazione diversa per orologi in quiete in un sistema inerziale O' e per orologi solidali con un riferimento O rispetto a cui O' è in moto. Infatti i lampi viaggiano per spazi più grandi o più piccoli a seconda che la velocità v di O' sia discorde o concorde a quella del lampo di luce. Ci attendiamo dunque un "errore" di sincronizzazione δ degli orologi in O' se visti da O.

Sia $t' = l'/2c$ il tempo che il lampo di luce impiega per raggiungere gli orologi in O'. Mettiamoci ora nel riferimento O: osserveremo orologi posti ad una distanza $l = l'/\gamma$. Con ragionamenti analoghi a quelli del paragrafo precedente, si trova che il tempo che il lampo di luce impiega per raggiungere gli orologi, osservato da O, sarà diverso: per uno sarà $t_1 = l'/2c\gamma - \beta t_1$, per l'altro $t_2 = l'/2c\gamma + \beta t_2$. L'osservatore in O vede quindi un "errore di sincronizzazione" pari a

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l'}{2c\gamma} \overbrace{\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta}\right)}^{2\beta\gamma^2} = \frac{l'\beta\gamma}{c}. \tag{5.8}$$

Applicando all'inverso la dilatazione dei tempi

$$\Delta t' = \Delta t/\gamma = \frac{l'v}{c^2}. \tag{5.9}$$

Secondo O gli orologi a riposo in O' e che, secondo quest'ultimo, sono sincronizzati, sono *sfasati* di un fattore $l'v/c^2$, e precisamente l'orologio che si avvicina alla sorgente luminosa *va avanti* rispetto all'altro.

5.3 Le trasformazioni di Lorentz

I risultati degli esperimenti mentali visti in precedenza possono essere sintetizzati nelle trasformazioni di coordinate che prendono il posto delle 5.1, le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*[6]:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

[6]Come spesso accade, il nome non dice tutta la verità. Le trasformazioni in oggetto ebbero una gestazione lunga ed il nome di Lorentz vi rimase attaccato perché, come accennato in precedenza, egli fu costretto a scriverle e ad elevarle a postulato della sua teoria. Si noti come nella Relatività siano invece *dedotte* dal semplice postulato M_1.

Le trasformazioni inverse si ottengono invertendo il segno di v e scambiando le variabili primate con quelle non primate:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

La prima equazione esprime il fenomeno della contrazione delle lunghezze. Le due successive seguono dall'invarianza della misura delle lunghezze perpendicolari al moto. La quarta rappresenta la dilatazione dei tempi e l'asincronia degli orologi. Si noti che *non è possibile avere $v \geq c$*, perché in questo caso le trasformazioni diventerebbero prive di senso. Ne segue che *la velocità della luce è una velocità limite:* non esiste nessun sistema di riferimento che, visto da un altro, si muove a velocità c o superiore e, di conseguenza, la velocità di nessun corpo materiale è in grado di eguagliare o superare c secondo nessun osservatore.

Con un po' d'algebra si dimostra facilmente (*Esercizio*) che

$$
c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{5.12}
$$

Ovvero *un fronte d'onda sferico che si espande a velocità c in un sistema di riferimento si espande sfericamente alla stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento.* Si verifica così che la nostra trattazione è coerente con il postulato M_1, come deve essere.

5.3.1 Le trasformazioni della velocità

Non è difficile ora ricavare le trasformazioni che devono sostituire le 5.2. Siccome la velocità $\mathbf{u}$ in un dato riferimento è semplicemente la derivata dello spazio rispetto al tempo, le trasformazioni delle velocità quando sono viste da un riferimento ad un altro in moto rispetto al primo con velocità $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}}$ si ottengono, in perfetta analogia con la meccanica classica, esprimendo le derivate di x, y e z rispetto a t in funzione delle derivate di x', y' e z' rispetto a t'. Notiamo preliminarmente che

$$
\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - u_x\frac{v}{c^2}\right) \tag{5.13}
$$

e si vede subito che per conservare l'ordinamento temporale degli eventi tra due sistemi di riferimento qualsiasi, e di conseguenza per conservare il carattere invariante della causalità, deve essere sempre $\frac{dt'}{dt} > 0$, quindi $vu_x < c^2 \Rightarrow u_x < c$, coerentemente con quanto detto al paragrafo precedente,

Prendendo allora le derivate nel sistema di riferimento primato ed esprimendole in quello non primato, otteniamo

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-u_x(v/c^2)} \\ u'_z &= \frac{u_z\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-u_x(v/c^2)} \end{aligned} \tag{5.14}$$

e le relative inverse

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+u'_x v/c^2} \\ u_z &= \frac{u'_z\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+u'_x v/c^2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

A differenza delle trasformazioni delle coordinate, le trasformazioni delle velocità non lasciano invariate le componenti trasversali a causa della dilatazione dei tempi che altera le misure in ogni direzione.

Da queste equazioni si vede, di nuovo, che nessuna velocità minore di c in un determinato riferimento viene misurata come maggiore di c in un qualunque altro riferimento, e che (*Esercizio*) la velocità della luce è la stessa in ogni riferimento. La trattazione fin qui fatta è dunque del tutto coerente.

5.4 Spazio di Minkowski e quadrivettori

Le trasformazioni di Lorentz sono esprimibili convenientemente in forma matriciale se si definisce un vettore a quattro dimensioni in uno spazio tetradimensionale:

$$x^1 = x;\ x^2 = y;\ x^3 = z;\ x^0 = ct \tag{5.16}$$

o, compattamente,

$$x^i = (ct, \mathbf{r}) \tag{5.17}$$

dove si mettono in evidenza la componente zeresima, la cosiddetta componente *temporale*, e le altre, cosiddette *spaziali*[7]. Un vettore del genere è detto *quadrivettore* e lo spazio in cui è definito viene detto *spazio di Minkowski*. Le trasformazioni di Lorentz si esprimono come trasformazioni lineari in questo spazio, ovvero matrici:

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.18}$$

È immediato verificare (*Esercizio*) che $\mathbf{L}$ è unitaria e che la trasformazione inversa è data dall'inversa di $\mathbf{L}$. Si verifica anche che trasformazioni di Lorentz consecutive sono date dal prodotto delle matrici corrispondenti, per cui *le trasformazioni di Lorentz costituiscono un gruppo (abeliano)*, detto *gruppo di Lorentz*, il cui elemento neutro è la trasformazione con $v = 0$.

Il vantaggio di operare con in quadrivettori — e con la loro generalizzazione, i quadritensori — è lo stesso che si ha operando con i normali vettori tridimensionali: un'equazione espressa tramite di essi, se valida in un riferimento qualunque, è immediatamente valida in *ogni* riferimento. Una relazione tra componenti, invece, cambia da un riferimento all'altro perchè in generale le componenti cambiano. Nel caso della Relatività si parla di *covarianza* dell'equazione, ed in particolare se l'equazione è espressa tramite operazioni covarianti su quadrivettori si parla di *covarianza a vista*.

5.4.1 Gli intervalli quadridimensionali

Segue allo stesso modo della 5.12 che

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \tag{5.19}$$

Dunque nello spazio di Minkowski gli intervalli invarianti non sono più i semplici intervalli spaziali $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e temporali dt presi separatamente, ma la loro combinazione

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{5.20}$$

[7] Un'altra convenzione molto seguita consiste nel porre l'indice 4 alla componente temporale. In questo caso nella scrittura 5.17 si inverte l'ordine della parte spaziale e temporale.

La metrica dello spazio di Minkowski perciò è diagonale a coefficienti costanti[8]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{5.21}$$

ma *non è euclidea*: infatti non è nemmeno definita positiva. Viene quindi chiamata *pseudoeuclidea*[9]. Un quadrivettore può non avere modulo positivo, visto che il prodotto quadriscalare tra due quadrivettori $a^i = (a^0, \mathbf{a})$ e $b^i = (b^0, \mathbf{b})$ è, con questa metrica,

$$\sum_{ij} a^i g_{ij} b_j = a^0 b_0 - a^1 b_1 - a^2 b_2 - a^3 b_3 = a^0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{5.22}$$

e la norma di a^i vale $a^{02} - a^2$, una grandezza che può benissimo essere negativa. Il prodotto scalare nello spazio di Minkowski è dunque degenere. L'esempio più semplice di vettore di modulo eventualmente nullo o negativo è dato proprio dal quadriintervallo ds^2 che può esssere positivo, negativo o nullo (e ds può essere reale positivo, nullo o immaginario puro. Naturalmente sia dt^2 che dr^2 rimangono reali; *devono* esserlo, in quanto si tratta di quantità misurabili, mentre il ds non lo è.)

I quadriintervalli quindi si dividono con naturalezza in tre classi.

- $ds^2 > 0$: intervalli *di tipo tempo*. Per ogni coppia di eventi separati da uno di questi intervalli esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi accadono nello stesso punto ($dr = 0$). In questo riferimento si ha che $ds/c = dt$, da cui otteniamo che ds/c è *l'intervallo di tempo proprio* $d\tau$. Ne discende che $d\tau$ è un invariante. Si vede anche subito che $d\tau$ è sempre più piccolo del corrispondente intervallo dt misurato in un altro riferimento.

  Non esiste invece alcun riferimento in cui i due eventi accadono simultaneamente ($dt = 0$). Infatti, data l'invarianza del quadriintervallo ds^2, esso dovrebbe essere positivo anche in questo ipotetico riferimento, ma allora si avrebbe $dr^2 < 0$, che è impossibile.

[8] Anche qui si trova spesso usata una convenzione diversa, che consiste nell'usare per la $g_{\mu\nu}$ segni opposti a quelli qui usati.

[9] La metrica può essere formalmente resa euclidea ponendo $x^0 = ict$ invece che $x^0 = ct$, e modificando di conseguenza il formalismo. L'uso di coordinate immaginarie però tende ad oscurare il fatto importante che le caratteristiche dello spazio di Minkowski sono sensibilmente diverse da quello euclideo, ed è perciò ormai scomparso.

Se due eventi sono separati da un intervallo di tipo tempo allora è in linea di principio possibile che i due eventi siano connessi dalla traiettoria di un corpo materiale; infatti in quel riferimento la velocità di un corpo che "va da un evento all'altro" è dr/dt, un numero reale.

- $ds^2 = 0$: intervalli *di tipo luce*. Non esiste alcun sistema di riferimento in cui entrambi gli eventi, se distinti, avvengono nello stesso punto, o simultaneamente. È possibile andare da un evento all'altro, ma solo muovendosi alla velocità della luce.

- $ds^2 < 0$: intervalli *di tipo spazio*. Per ogni coppia di eventi separati da uno di questi intervalli esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi accadono simultaneamente ($dt = 0$). Non esiste invece alcun riferimento in cui i due eventi accadono nello stesso luogo ($dr = 0$).

  Se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio allora è impossibile che i due eventi siano connessi dalla traiettoria di un corpo materiale o dalla luce; infatti in quel riferimento la velocità di un corpo che "va da un evento all'altro" non è un numero reale. Due eventi connessi da un intervallo di tipo spazio non possono influenzarsi reciprocamente; non esiste un'influenza causale di uno sull'altro.

Data l'invarianza del ds, la classificazione suesposta *è invariante*, dunque *assoluta:* ogni osservatore inerziale concorda con ogni altro sul tipo di intervallo che connette due eventi.

Dato un evento E, l'insieme di tutti i punti ad esso connessi mediante intervalli di tipo tempo è detto *cono di luce*. Questo cono quadridimensionale divide, per ogni evento, lo spazio di Minkowski in parti (oltre al cono stesso):

1. il *passato,* ovvero l'insieme degli eventi che possono avere influenzato causalmente E (non rileva se lo abbiano effettivamente fatto o meno); sono tutti gli eventi contenuti nella "parte posteriore" del cono;

2. *il futuro,* ovvero l'insieme degli eventi che possono essere influenzati causalmente da E (non rileva se lo abbia effettivamente fatto o meno); sono tutti gli eventi contenuti nella "parte anteriore" del cono;

3. *l'altrove,* ovvero l'insieme degli eventi che non possono avere influenzato causalmente né possono esserne stati influenzati; sono tutti gli eventi "esterni" al cono.

È fondamentale ricordare che, da quanto detto, *il cono di luce di uno specifico evento è invariante*. Questo significa che tutti gli osservatori inerziali concordano sul fatto che due eventi possano o meno influenzarsi causalmente o meno, e se sì su quale dei due possa essere la causa dell'altro. Non sorgono dunque problemi nel definire la causalità, problemi se sorgerebbero se fosse possibile affermare, magari da riferimenti diversi, sia "A causa B" che "B causa A".

5.4.2 Le trasformazioni generali tra quadrivettori

È uso comune, per semplificare le notazioni, adottare la *convenzione di Einstein* per le sommatorie, che cosiste nel sottintendere che in presenza di indici ripetuti si somma su di essi:

$$
\begin{aligned}
a^i b_i &= \sum_i a^i b_i \\
a^{ijk} b_{jkl} &= \sum_{jk} a^{ijk} b_{jkl}.
\end{aligned}
$$

Questa operazione è anche detta *contrazione* e produce, da una coppia di quadritensori di ordine N, un quadritensore di ordine inferiore ($N - m$ se la contrazione è su m indici). Un quadritensore di ordine 0 è detto, logicamente, *quadriscalare*, ed è un invariante.

Un quadrivettore, passando da un riferimento ad un altro, si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz[10]

$$a'_i = \left(L^i_j\right) a_j. \tag{5.23}$$

Evidentemente la quadricoordinata $x^i = (ct, \mathbf{r})$ è un quadrivettore, così come il *quadrigradiente*

$$\Box_i = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla). \tag{5.24}$$

Il d'alembertiano $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, in quanto prodotto quadriscalare del quadrivettore quadrigradiente (a meno del segno) con se stesso, è invece un operatore invariante.

[10]Solitamente viene fatta una distinzione tra quadrivettori *covarianti* e *controvarianti*. Nel caso della Relatività Ristretta, però, la differenza è di fatto inessenziale ed il presente trattamento è tale da rendere tale distinzione non necessaria. Si noti anche che purtroppo il termine "covariante" è entrato nell'uso con due significati distinti, ed è probabilmente troppo tardi per rimediare. Si faccia attenzione a non confondersi.

Esempio: effetto Doppler

La fase di un'onda è invariante, dunque

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t'$$

e siccome $x^i = (ct, \mathbf{r})$ è un quadrivettore ed il prodotto con $k_x,\ k_y,\ k_z,\ \omega/c$ è un invariante — pertanto è un quadriscalare — ne segue che

$$k_i = (\omega/c, \mathbf{k}) \tag{5.25}$$

è un quadrivettore. Applicando le trasformazioni di Lorentz a k_i, ovvero moltiplicando il quadrivettore per $\mathbf{L}$ si ottiene, supponendo come al solito un moto relativo rispetto all'asse x,

$$\begin{array}{rcl} \omega' & = & \gamma(\omega - v k_x) \\ k'_x & = & \gamma(k_x - \omega\beta/c) \\ k'_y & = & k_y \\ k'_z & = & k_z \end{array} \tag{5.26}$$

Per un'onda elettromagnetica nel vuoto $\omega = ck$ e siccome $k_x = k\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione dell'onda e la velocità relativa di sorgente ed osservatore, e $\omega = 2\pi\nu$, si ha

$$\nu' = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\nu \simeq (1 - \beta\cos\theta)\nu \tag{5.27}$$

L'eguaglianza approssimata vale per $v \ll c$. Va notato che l'effetto Doppler relativistico si ha anche nel caso in cui $\theta = \pi/2$. Classicamente non si avrebbe alcuna variazione di frequenza; relativisticamente si ha $\nu' = \gamma\nu$. Questo è detto *effetto Doppler trasverso*, ed è causato dalla dilatazione dei tempi. Infatti i due osservatori "sorgente" e "ricevitore" se in moto l'uno rispetto all'altro vedono i rispettivi orologi andare più piano e pertanto vedono la luce di una frequenza diversa.

Anche la formula relativistica per l'aberrazione della luce si ottiene dalle 5.26.

5.5 Dinamica relativistica

5.5.1 La lagrangiana di una particella

È possibile dedurre tutta la dinamica relativistica, così come quella classica, a partire dal principio di Hamilton

$$\delta \int_A^B \mathcal{L}\, d\tau = 0 \tag{5.28}$$

dove A e B sono in questo caso eventi, cioè punti nello spaziotempo, e non semplicemente punti nello spazio, mentre il tempo τ è il tempo proprio della particella (in modo da avere un espressione invariante del principio variazionale). La variazione quindi è effettuata ad eventi estremi fissati.

Per ottenere l'espressione per $\mathcal{L}$ utilizziamo un procedimento generalizzato dal caso non relativistico[11]. La Lagrangiana è, per ipotesi, funzione solo delle coordinate, delle velocità e del tempo. Nel caso classico τ coincide con il tempo universale t; inoltre per una particella isolata, dall'ipotesi di omogeneità ed isotropia dello spazio e del tempo segue che essa dipende solo dal modulo della velocità, ovvero, che è lo stesso, dal suo quadrato:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2).$$

Se valgono le trasformazioni di Galileo la lagrangiana $\mathcal{L}'$ della stessa particella vista in un altro sistema di riferimento deve dare le stesse equazioni del moto, quindi deve differire dalla prima per una derivata totale di una funzione delle coordinate e del tempo. Prendendo una velocità relativa dei due sistemi ε infinitesima, si deve dunque avere, all'ordine lineare

$$\mathcal{L}'(v^2) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{L}[(v+\varepsilon)^2] = \mathcal{L}(v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2) \simeq \mathcal{L}(v^2) + \frac{d}{dv^2}\mathcal{L}(v^2) 2\varepsilon$$

con f opportuna. Perciò $\frac{d}{dv^2}\mathcal{L}(v^2)$ deve essere una costante, ovvero $\mathcal{L}$ deve essere lineare in v^2, visto che nessuna funzione solo di v^2 può essere una derivata totale del tempo di una funzione di coordinate, tempo e velocità. Ne segue il risultato noto $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2$ (si dimostra facilmente che $m > 0$).

Nel caso relativistico lo stesso ragionamento ci porta ad ipotizzare una lagrangiana proporzionale al quadrato del quadrivettore *quadrivelocità* definito nella maniera ovvia[12]:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, \mathbf{r}) = (\gamma c, \gamma \mathbf{u}) \tag{5.29}$$

(la derivazione rispetto ad un invariante di un quadrivettore evidentemente produce un quadrivettore), quadrato che vale $\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2$. Perciò il principio variazionale diventa

[11] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Corso di Fisica Teorica voll. 1 e 2*, Editori Riuniti.

[12] Anche qui si incontra talvolta una convenzione diversa: $u^i = dx^i/ds = (\gamma, \mathbf{u}/c)$.

$$\delta \int_A^B \mathcal{L}\, d\tau = \delta \int_A^B \alpha c^2\, d\tau = \delta \int_A^B \alpha c^2/\gamma\, dt = 0. \tag{5.30}$$

Il coefficiente costante α, che per definizione è un invariante, rimane determinato prendendo il limite classico $\beta \to 0$ della lagrangiana vista in uno specifico riferimento, ovvero dell'integrando dell'ultimo integrale, $\mathcal{L}/\gamma$:

$$(\alpha c^2/\gamma)_{\beta\to 0} \to \alpha c^2(1-\beta^2/2) = \frac{1}{2}mv^2$$

a meno di costanti additive, per cui $\alpha = -m$ e $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$.

5.5.2 Il quadrimomento. Massa ed energia

Sappiamo che il momento generalizzato $p = \partial\mathcal{L}/\partial q$ coniugato ad una coordinata ciclica q si conserva. Nel caso relativistico di una particella libera abbiamo dunque che si conserva il *quadrimomento*

$$p^i = \partial\mathcal{L}/\partial u^i = mu^i = (m\gamma c, m\gamma\mathbf{u}) = (m\gamma c, \mathbf{p}) \tag{5.31}$$

dove si è definita la *quantità di moto relativistica*, componente spaziale del quadrimomento

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}. \tag{5.32}$$

La conservazione del quadrimomento implica quindi la conservazione del momento tridimensionale $\mathbf{p}$, versione relativistica del momento classico $m\mathbf{u}$, cui si riduce per piccole velocità[13].

Una seconda quantità conservata è la componente p^0 del quadrimomento. È logico sospettare che sia strettamente collegata con l'altra importante grandezza meccanica conservata (per sistemi isolati), cioè l'energia. Per verificarlo, calcoliamone la derivata temporale in uno specifico riferimento:

$$\begin{aligned} c\frac{dp^0}{dt} &= \frac{d}{dt}\gamma mc^2 = m\frac{d}{dt}\left[\gamma(c^2-u^2)+\gamma u^2\right] = m\frac{d}{dt}\left[\frac{c^2}{\gamma}+\gamma u^2\right] \\ &= -m\gamma\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} + m\frac{d}{dt}\gamma u^2 = \mathbf{u}\cdot\frac{d}{dt}m\gamma\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{F}. \end{aligned}$$

[13]Spesso si trova definita una *massa relativistica* $m_r = \gamma m_0$, con m_0 (*massa a riposo*) coincidente con la massa, invariante, m qui definita. Per quanto comunissimo, tale concetto è fonte di equivoci ed oscura il reale significato fisico delle equazioni. Inoltre tale grandezza è virtualmente assente nei testi più avanzati e di ricerca. Non ne faremo dunque uso.

Vediamo perciò che questa derivata, moltiplicata per c, non è altro che la potenza trasferita da o alla particella da una forza esterna. Perciò concludiamo che

$$E = cp^0 = \gamma mc^2 \tag{5.33}$$

è l'energia del corpo in uno specifico riferimento. Per corpi fermi questa espressione prende la notissima forma

$$E = mc^2. \tag{5.34}$$

Otteniamo quindi il risultato che *la massa di un corpo è una misura del suo contenuto di energia a riposo*, dove l'espressione "a riposo" è relativa al centro di massa. Perciò *ogni mutamento dell'energia di un corpo si riflette in un mutamento della sua massa a riposo*. Questo mutamento è però sensibile solo nel caso in cui si abbiano enormi variazioni di energia, come nel caso delle reazioni nucleari, vista la presenza del termine $c^2 = 9\ 10^{16}$ m^2/s^2.

Per esempio, se mettiamo un litro di acqua a bollire sul fuoco, e trascuriamo l'energia e la massa trasferite all'aria per evaporazione ed altri modi, la sua massa varierà di $\Delta m = Q/c^2$, dove Q è l'energia trasferita come calore. Nel caso in esame, $Q = C_p \Delta T$, e preso il calore specifico $C_p = 1$ cal/K $= 4.2$ J/K e $\Delta T = 80$ K abbiamo $\frac{\Delta m}{m} = 3.7\ 10^{-15}$, abbondantemente al di sotto del limite di misurabilità. Nel caso della reazione nucleare di fusione di quattro protoni in un nucleo di He l'emissione di energia è pari a 26.73 Mev e la massa cala di $\frac{\Delta m}{m} = 0.007$. Questo è il principale meccanismo di generazione di energia nel Sole, che di conseguenza perde una massa pari a circa *4 milioni* di tonnellate *al secondo*. (*Esercizio:* ottenere questo risultato, sapendo che l'intensità della radiazione solare sulla Terra, detta *costante solare*, vale 1.37 10^3 W/m^2 e che la distanza media Terra-Sole è di 1.51 10^{11} m).

L'energia cinetica relativistica E_k è definita ovviamente come quella frazione di energia che dipende dalla velocità. Essa si riduce, come deve, all'energia cinetica classica per moti lenti:

$$E_k = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \to \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.35}$$

Con gli stessi ragionamenti del caso classico si trova che *il quadrimomento di un sistema isolato* (e non solo di una particella) è *costante*. È dunque costante anche il suo modulo, cosa peraltro ovvia visto che

$$p^i p_i = m^2\gamma^2 c^2 - m^2\gamma^2 u^2 = m^2 c^2. \tag{5.36}$$

Moltiplicando per c^2 questa equazione ed inserendovi l'espressione di E 5.33 e di $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}$ otteniamo la relazione più generale tra E e p

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{5.37}$$

Si noti che mentre la 5.33 vale solo per corpi con massa non nulla, la 5.37 non soffre di questa limitazione. Infatti, ponendovi $m = 0$ otteniamo una relazione perfettamente sensata, $E = pc$, che è anche la relazione 4.21 tra energia e quantità di moto per un fotone. La relatività permette perciò di interpretare il concetto di fotone come quello di una *particella a massa nulla*.

Si noti come in meccanica classica tale concetto sarebbe assurdo; massa nulla significherebbe energia e quantità di moto nulle. In relatività questo non è necessario, purchè si consideri che *una particella a massa nulla deve sempre muoversi a velocità c*. Vale evidentemente anche il viceversa: *le uniche particelle che si possono muovere a velocità c sono quelle di massa nulla*, in particolare i fotoni. Questo giustifica il termine di "tipo luce" assegnato ai quadriintervalli con $ds = 0$: solo la luce (ed altre particelle a massa nulla) possono percorrerli.

L'equazione 5.33 ha una seconda importante conseguenza. Siccome $\gamma_{\beta\to 1} \to \infty$, anche l'energia di un corpo tende all'infinito all'avvicinarsi della sua velocità a c. Fanno eccezione le particelle a massa nulla, che però sappiamo costrette a muoversi sempre esattamente a velocità c. Otteniamo così un'interpretazione dinamica dell'insuperabilità della velocità della luce: *nessun corpo può essere accelerato a velocità superiore a c perché questo richiederebbe di fornire un'energia infinita.*

Notiamo infine un'altra sorprendente conseguenza della 5.37. Siccome la relazione tra E, p ed m non è lineare, e siccome sia E che p sono grandezze additive, abbiamo che *la massa non è additiva*: un sistema di particelle può avere una massa che non è la somma delle masse delle particelle costituenti.

Per esempio, prendiamo un sistema di due fotoni in moto lungo la stessa direzione ma in versi opposti. Mettiamoci nel riferimento in cui entrambi i fotoni hanno la stessa frequenza, dunque la stessa energia E e quantità di moto uguali ed opposte. L'energia totale del sistema è $2E$ e la quantità di moto totale è nulla. Pertanto $4E^2 = 0 + m^2c^4 \Rightarrow m = 2E/c^2 \neq 0$. (*Esercizio:* si dimostri che se i due fotoni si muovessero nello stesso verso avremmo il risultato, più intuitivo, $m = 0$).

L'effetto Compton

Un esempio storicamente importante dell'applicazione delle leggi di conservazione relativistiche, perché contribuì all'accettazione definitiva del concetto di fotone, è lo studio della diffusione di un fotone da parte di un elettrone libero. Si noti che quanto segue è altrettanto applicabile all'emissione di un fotone da parte di un elettrone libero; è sufficiente immaginare il processo invertendo il segno del tempo.

Mettiamoci nel riferimento in cui l'elettrone è in riposo prima dell'urto e scegliamo l'asse x lungo la direzione di arrivo del fotone, ed il piano xy coincidente con quello definito dalle direzioni dell'elettrone e del fotone dopo l'urto. Se ν è la frequenza del fotone ed m la massa dell'elettrone, le equazioni di conservazione della quantità di moto lungo x e y e dell'energia danno

$$\begin{aligned}
\frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p\cos\phi \\
0 &= \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - p\sin\phi \\
h\nu + mc^2 &= h\nu' + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}
\end{aligned}$$

dove si è inteso che dopo l'urto il fotone possiede una frequenza ν' e si dirige ad un angolo θ rispetto all'asse x, e l'elettrone possiede una quantità di moto (tridimensionale) di modulo p e si muove ad un angolo ϕ rispetto all'asse x.

Abbiamo a disposizione tre equazioni per le quattro incognite ν', θ, ϕ e p, potremo perciò esprimere una qualunque delle incognite in funzione di una qualunque delle altre. Solitamente si sceglie di esprimere ν' in funzione di θ. Per farlo, eliminiamo ϕ dalle prime due

$$h\nu = h\nu'\cos\theta + \sqrt{p^2c^2 - h^2\nu'^2\sin^2\theta} \Rightarrow p^2c^2 = h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right)$$

e poi eliminiamo p dalla terza equazione e semplifichiamo:

$$\begin{aligned}
\left[h(\nu-\nu') + mc^2\right]^2 &= h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right] + m^2c^4 \\
&\Downarrow \\
h\nu\nu' - mc^2(\nu - \nu') &= h\nu\nu'\cos\theta
\end{aligned}$$

Il risultato finale è dunque

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1-\cos\theta)} \tag{5.38}$$

Si noti che non è possibile avere assorbimento completo, o una emissione, di un fotone da parte di un elettrone libero: ciò corrisponderebbe a $\nu' = 0$, che non è una soluzione delle equazioni scritte[14]. Per poter avere tale

[14]Si noti (*esercizio*) che questo sarebbe possibile mediante un trattamento non relativistico del problema, ma darebbe un risultato insensato: la velocità dell'elettrone risulterebbe superiore a c.

assorbimento è essenziale che l'elettrone sia in interazione con un altro corpo — per esempio un nucleo atomico — con cui possa essere scambiata energia e quantità di moto.

La relazione di Compton diventa più semplice espressa in termini delle lunghezze d'onda λ e λ' del fotone prima e dopo l'urto:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta) \tag{5.39}$$

La grandezza $\lambda_c = h/mc = 2.42\ 10^{-12}$ m è detta *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone*. Le variazioni di lunghezza d'onda del fotone sono quindi dell'ordine di λ_c, e per quanto piccole sono agevolmente misurabili per fotoni X.

5.6 Elettrodinamica covariante

5.6.1 Il campo magnetico come effetto relativistico

Torniamo ora all'argomento fondamentale del presente corso: l'elettrodinamica. Per prima cosa consideriamo il problema delle proprietà di trasformazione della carica. Se il valore di una carica dipendesse dal sistema di riferimento, dovremmo osservare uno sbilanciamento di cariche in ogni materiale, anche se il numero di elettroni coincide col numero di protoni. Infatti negli atomi gli elettroni si muovono a velocità molto alte[15], una frazione apprezzabile di c, ed i nuclei molto più basse. Siccome, come si è visto nel capitolo 1, basta un minutissimo sbilanciamento di carica per osservare effetti vistosi, possiamo concludere che *il valore della carica è invariante*. Esperimenti più sofisticati confortano questa conclusione.

Stabilito questo, riprendiamo in considerazione uno dei casi elementari e fondamentali: il filo rettilineo infinito percorso da corrente, visto però da un punto di vista relativistico.

Consideriamo un filo giacente lungo l'asse z percorso da una corrente che, nel sistema O a riposo rispetto agli ioni che formano il filo, ha intensità I ed è formata, come di consueto, da elettroni. Supponiamo che il filo in O sia neutro e sia λ_0^+ la densità di carica per unità di lunghezza dovuta agli ioni in questo sistema (è la densità di carica propria degli ioni). La densità di carica elettronica, sempre in O, vale λ^- ed è uguale ed opposta a λ_0^+ per l'ipotesi di neutralità. Ne segue che $I = \lambda^- v = -\lambda_0^+ v$ dove $\mathbf{v}$ è la velocità degli elettroni in O.

[15] Questo ragionamento va rivisto alla luce della Meccanica Quantistica, ma rimane comunque corretto.

La densità di carica λ^- però *non* è la densità di carica propria λ_0^- degli elettroni; data la contrazione di Lorentz,

$$\lambda^- = \gamma\lambda_0^- = \frac{\lambda_0^-}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Questa relazione la si può comprendere pensando che l'osservatore in O vede gli elettroni più vicini di un fattore γ di quanto non li veda un osservatore solidale con gli elettroni stessi. La densità propria di carica degli ioni è dunque più alta della densità propria di carica degli elettroni.

Questo risultato è in apparente contraddizione col principio d'invarianza della carica, ma la contraddizione è semplicemente un artefatto del nostro modello di filo infinito. Se prendessimo seriamente questo modello dovremmo concludere che le cariche positive e negative $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^+dz$ e $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^-dz$ appartenenti al filo sono entrambe infinite, con tutte le difficoltà che conseguono da un raffronto tra infiniti. Se invece interpretiamo più fisicamente il modello come un filo molto lungo ma finito collegato alle estremità a due serbatoi di cariche positive e negative, possiamo semplicemente attribuire lo sbilanciamento alla differenze nel numero di cariche cedute al (od assorbite dal) filo dai serbatoi, viste nei due sistemi di riferimento. Questa differenza si spiega con la relatività della simultaneità: per poter dire che "i serbatoi hano ceduto una quantità di carica netta q al filo" dobbiamo essere in grado di dire *quando* l'hanno ceduta. Se due osservatori sono in disaccordo sulla simultaneità, essi forniranno numeri diversi per q e di conseguenza può capitare che uno di essi osservi che il filo sia carico ed un altro no.

Prendiamo ora una carica positiva di prova q che viaggia a distanza r dal filo con velocità $\mathbf{u}$ rispetto ad O. Per cominciare prenderemo $\mathbf{u}$ parallela al filo e concorde a $\mathbf{v}$. Nel riferimento O' solidale alla carica le densità di carica di ioni ed elettroni sono rispettivamente[16]

$$\begin{aligned}
\lambda^{+\prime} &= \frac{\lambda_0^+}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \\
\lambda^{-\prime} &= \frac{\lambda_0^-}{\sqrt{1-\left(\frac{u-v}{c}\right)^2}} = -\lambda_0^+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u-v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}$$

[16]Per semplicità vengono usate le trasformazioni classiche delle velocità. L'errore commesso è di ordine β^2 all'interno di un termine che è già di per sé moltiplicato per β; siccome terremo solo il termine di ordine più basso in β, non si commette nessun errore nel risultato finale.

e la densità di carica totale del filo non è più nulla ma vale, sviluppando all'ordine più basso in v/c e u/c,

$$\lambda = \lambda^{+\prime} + \lambda^{-\prime} \simeq \lambda_0^+ \frac{uv}{c^2} = -I\frac{u}{c^2}. \tag{5.40}$$

Nel sistema O' esiste perciò un campo elettrico di modulo dato dalla 1.6, e la carica di prova q è dunque *attirata* dal filo da una forza di modulo

$$F = qE = qI\frac{u}{2\pi c^2 \epsilon_0 r} = qu\frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{5.41}$$

Ma questa è proprio la forza che agisce su q per opera del campo magnetico dato dalla 2.8. La stessa coincidenza si ottiene ripetendo il ragionamento per altre direzioni di $\mathbf{u}$: per esempio, se la carica si muove perpendicolarmente al filo le contrazioni di Lorentz sono nulle ed il filo continua ad essere visto neutro, dunque non c'è nessuna forza su q, ed anche questo è in accordo con la 2.8.

La conclusione che se ne può trarre è che *il campo magnetico è un effetto relativistico,* dovuto al diverso modo di vedere le distribuzioni di cariche e correnti da parte dei diversi osservatori inerziali. Non per nulla il rapporto tra le forze elettriche e magnetiche dipende dal rapporto v/c, come si vede per esempio dalla 4.16. Se tali forze sono importanti nel nostro mondo "a bassa velocità" è solo perchè la forza elettrostatica è talmente intensa che i minutissimi sbilanciamenti di densità di carica che ne derivano sono sufficienti a dare effetti avvertibili.

5.6.2 Trasformazioni di cariche e correnti

Poniamo le considerazioni semiquantitative del paragrafo precedente nel formalismo relativistico. Una semplice estensione del ragionamento fatto poco sopra porta a concludere che cariche e correnti siano legate tra loro in una trasformazione di Lorentz. È infatti possibile definire un quadrivettore che sia estensione del vettore densità di corrente semplicemente moltiplicando la densità di carica propria ρ_0 — che, come ogni grandezza propria, è un invariante — per la quadrivelocità:

$$j_i = \rho_0 u^i = (\gamma\rho_0 c, \gamma\rho_0 \mathbf{u}). \tag{5.42}$$

È facile vedere che un corpo che in un riferimento è neutro ma percorso da corrente, è visto da un altro osservatore come carico, e viceversa un corpo carico non percorso da corrente viene visto da altri osservatori come percorso da corrente. (*Esercizio:* verificare che questo è in accordo con il caso del filo del paragrafo precedente.)

L'equazione di continuità diventa semplicemente la quadridivergenza di j_i, e come tale è covariante a vista:

$$\frac{\partial j_i}{\partial x^i} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla) \cdot (\gamma\rho_0 c, \gamma\rho_0 \mathbf{u}) = \gamma \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) = 0. \tag{5.43}$$

Si vede che la carica totale è un invariante:

$$q' = \int_{\Omega'} j_0' d\Omega' = \int_{\Omega} \gamma j_0 d\Omega/\gamma = \int_{\Omega} j_0 d\Omega = q \tag{5.44}$$

come da ipotesi.

5.6.3 Il quadripotenziale

Il D'Alembertiano è un operatore invariante per cui le equazioni per i potenziali 3.25 diventano

$$\Box^2 A_i = -j_i/\epsilon_0 \tag{5.45}$$

avendo definito

$$A_i = (\phi, c\mathbf{A}). \tag{5.46}$$

Nella 5.45 il primo membro contiene un operatore invariante applicato ad A_i, mentre il secondo membro è un quadrivettore. Ne consegue che *i potenziali elettrodinamici effettivamente formano un quadrivettore definito dalla 5.46.*

La condizione di Lorentz 3.24 diventa quindi

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^i} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla) \cdot (\phi, c\mathbf{A}) = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{5.47}$$

e quindi è covariante a vista, essendo la quadridivergenza di un quadrivettore.

5.6.4 Trasformazioni dei campi

I campi si ottengono dai potenziali 5.46 tramite le solite equazioni. Per brevità omettiamo il calcolo e forniamo solo il risultato:

$$\begin{aligned} E'_{\|} &= E_{\|} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})] \\ B'_{\|} &= B_{\|} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp})]. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Nel limite classico, $\beta \to 0,\ \gamma \to 1$, e le 5.48 diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.49}$$

relazioni che conoscevamo già. La Relatività ristretta fornisce dunque una descrizione del tutto unificata dell'induzione elettromagnetica.

Possiamo inoltre facilmente dare una descrizione dei campi di una particella in moto uniforme con velocità $\mathbf{v}$. Per semplicità considereremo trascurabile il ritardo di propagazione delle interazioni (risulta che ciò non influenza il risultato). Se prendiamo un punto lungo la direzione del moto della particella, nel sistema di riferimento O' solidale con la particella il campo elettrico $\mathbf{E}$ è semplicemente il campo coulombiano ed è parallelo a $\mathbf{v}$, per cui nel riferimento O, ricordando la contrazione di Lorentz

$$E_{\|} = E'_{\|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 r^2}. \tag{5.50}$$

Il campo visto da O lungo la direzione di marcia è dunque *più debole* di quello coulombiano di un fattore γ^2. Analogamente si procede per il calcolo del campo in un punto situato al di fuori della linea di propagazione nel momento in cui la carica "ci passa accanto" (vale a dire, in cui la posizione della carica sulla sua traiettoria coincide con la proiezione ortogonale del punto campo sulla traiettoria stessa; ricordiamo che stiamo trascurando il ritardo):

$$E_{\perp} = \gamma E'_{\perp} = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2.} \tag{5.51}$$

Il campo ortogonale — nel senso descritto prima — è dunque *più grande* di quello coulombiano per un fattore γ. Se ne deduce che le linee di campo, viste dall' osservatore O, risultano addensate perpendicolarmente alla direzione del moto della particella e, al limite $v \to c$, il campo elettrico è trasversale.

Il campo magnetico è evidentemente trasversale e vale, quando la particella "ci passa accanto",

$$B_{\perp} = \frac{\gamma v}{c^2} E'_{\perp} = \frac{\beta}{c} E_{\perp}. \tag{5.52}$$

Il campo di una particella in moto veloce somiglia dunque sempre più a quello di un'onda piana — $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ perpendicolari tra loro ed alla direzione di propagazione, e moduli nel rapporto $E/B = c$ — all'approssimarsi della sua velocità a c.

Si noti che $B_{\perp}$ non si annulla nel limite classico $\beta \to 0$ ma vale

$$B_\perp \simeq \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} = \left| \frac{\mu_0 q\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{4\pi r^3} \right| \tag{5.53}$$

che concide con la 2.8 se si interpreta la carica in moto come un "elemento di corrente" $Id\mathbf{l}$ (si ricorderà come questa interpretazione fosse scorretta partendo dalla magnetostatica, in quanto la legge 2.8 è stata dedotta per correnti chiuse; qui vediamo come in realtà il risultato in sé sia corretto).

I campi dunque sono relativi all'osservatore. Esistono però alcune grandezze che sono invarianti. La prima è semplicemente il prodotto scalare tra i campi elettrico e magnetico:

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = E'_{\|}B'_{\|} + \mathbf{E}'_\perp\cdot\mathbf{B}'_\perp = E_{\|}B_{\|} + \gamma^2[\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\perp)]\cdot[\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp)]. \tag{5.54}$$

Ricordando che il prodotto vettore è ortogonale ad entrambi i fattori e notando che da questo fatto si ha che i vettori $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ formano tra di loro lo stesso angolo che i vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, si ottiene

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = E_{\|}B_{\|}+\gamma^2[\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp - \frac{v^2}{c^2}\mathbf{B}_\perp\cdot\mathbf{E}_\perp] = E_{\|}B_{\|}+\mathbf{E}_\perp\cdot\mathbf{B}_\perp = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{5.55}$$

come affermato. Analogamente si vede che (*Esercizio*)

$$E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2. \tag{5.56}$$

Se ne deduce quindi che la proprietà di un'onda elettromagnetica di essere piana è invariante.

Appendice A

I sistemi di unità di misura dell'elettromagnetismo

I sistemi di unità di misura, come è noto, sono frutto di una scelta arbitraria, e questo fatto permette di utilizzarne uno qualunque, a seconda dei gusti, a patto di essere coerenti nel suo utilizzo. Questo fatto ha storicamente portato alla coesistenza di diversi sistemi di unità, coesistenza che in parte permane tuttora.

Consideriamo qui i due sistemi principali, gli unici ormai ad essere utilizzati: il Sistema Internazionale (SI) ed il cgs. Finché si considerano solo grandezze meccaniche, in cui le grandezze fondamentali sono solo tre: Lunghezza, Tempo e Massa, la differenza tra i due sistemi è ridotta. Infatti in essi vengono scelte come unità fondamentali che differiscono tra loro al più solo di potenze di 10: metro/centimetro, kilogrammo/grammo. Il risultato è che i due sistemi definiscono grandezze che differiscono tra loro solamente di potenze di 10, e tutte le equazioni, definizioni, ecc. assumono la stessa forma.

A.1 Il Sistema Internazionale

Le cose cambiano radicalmente quando si passa allo studio dell' elettromagnetismo. In questo caso infatti il SI definisce un'unità di misura addizionale, l' Ampère (A), definito come "quella corrente che, scorrendo in due fili infiniti paralleli posti a distanza di 1 m, genera una forza tra di essi pari a 2 10^{-7} N/m". Invertendo il ragionamento che porta alla 2.12, si può dire che 1 A è la corrente che, presa la costante μ_0 esattamente pari al valore di $4\pi\ 10^{-7}$ m kg/C^2, rende valide congiuntamente le espressioni 2.1 della forza di Lorentz e

2.7 della legge di Ampère. Così facendo, si è anche definita l'unità di misura del campo magnetico, il Tesla.

Il Coulomb (C), unità di misura della carica, è nel SI un' unità derivata che vale 1 A s. La costante k nella legge di Coulomb $\mathbf{F} = kq_1q_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$ va dunque misurata, visto che non c'è più nulla di definibile arbitrariamente nelle altre grandezze che compaiono nell'equazione. Il SI pone, come è noto, $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Rimane così fissata anche l'unità di misura del campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$, il Volt/m = kg m s^{-2} C^{-1}.

A.2 Il sistema di Gauss

Nell sistema cgs, almeno nella sua versione di gran lunga più comune che prende il nome di Gauss, si evita di definire un' ulteriore unità fondamentale, e si procede invece a definire l'unità di carica, detta *unità elettrostatica* (ues, o all'inglese esu), ponendo $k = 1$ nella legge di Coulomb. L'equazione di Gauss in forma integrale diventa $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$.

Le dimensioni fisiche dell' ues sono $\mathrm{g}^{1/2}$ $\mathrm{cm}^{3/2}$ s^{-1}; 1 C corrisponde a 3 10^9 ues. Il fattore 3 che compare in questa ed altre conversioni ha a che fare, come vedremo, con la velocità della luce $c = 2.997925\ 10^8 \approx 3\ 10^8$ m/s; per avere una conversione più precisa si sostituisca dunque al 3 il valore 2.997925.

Per quanto la comparsa di dimensioni con esponente frazionario possa sembrare strana, non c'è nulla di sbagliato, bizzarro, o viceversa molto profondo nella loro presenza. Piuttosto è molto importante notare che non solo le stesse grandezze fisiche sono espresse da numeri diversi nel SI e nel sistema di Gauss, ma sono in generale *misurate con unità diverse*, e *possono avere forme diverse*. Per esempio, la conducibilità elettrica si misura in s^{-1} — o, se si preferisce, in Hertz — nel sistema di Gauss, e l'equazione 2.12 diventa $F/L = \frac{2I_1I_2}{c^2 s}$.

Nel sistema di Gauss l'unità di corrente, lo statAmpère, è derivata ed ha un valore ben definito (1 A corrisponde a 3 10^9 stA). Nella legge di Ampère viene introdotta una costante, la costante c, avente le dimensioni di una velocità, e l'equazione assume la forma $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I$. In questo modo $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ sono misurati nelle stesse unità, lo statV/cm = 3 10^4 V/m, che nel caso del campo magnetico prende il nome di Gauss, equivalente a 10^{-4} T. Anche $\mathbf{D}$ ed $\mathbf{H}$ hanno queste stesse unità di misura.

Se ora si sceglie la seguente espressione per la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

il valore di c risulta non arbitrario, ma determinato (e determinabile) empiricamente (e, fra le altre cose, il valore misurato deve far sì che valga l'equazione

2.12). Come è logico, il sistema di Gauss contiene lo stesso numero — uno — di costanti empiriche del SI (che contiene ϵ_0).

Riassumendo, le equazioni di Maxwell in unità di Gauss appaiono come segue:

$$
\begin{array}{ll}
\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi q \\
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \\
\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}
\end{array}
$$

Deducendo (*Esercizio*) l'equazione delle onde da questa forma delle equazioni di Maxwell si vede subito che la costante c risulta essere proprio la velocità della luce.

Infine, conoscendo le equazioni di Maxwell in entrambe le forme, si ricava una ricetta pratica per la conversione di una qualunque equazione dell'elettromagnetismo nel vuoto (non solo le equazioni di Maxwell e di Lorentz, ma tutte, visto che ne discendono) da SI a Gauss e viceversa:

SI		Gauss	Gauss		SI
ϵ_0	$\rightarrow$	$1/4\pi$	E	$\rightarrow$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}E$
μ_0	$\rightarrow$	$4\pi/c^2$	B	$\rightarrow$	$\sqrt{4\pi/\mu_0}B$
B	$\rightarrow$	B/c	q	$\rightarrow$	$q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
			j	$\rightarrow$	$j/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$

Appendice B

L'analisi di Fourier

B.1 La serie di Fourier

Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}$ di tutte le funzioni a valori complessi, limitate e con un numero finito di punti di discontinuità, definite sull'intervallo reale $[-T/2, T/2]$ o, equivalentemente, periodiche con periodo T. Come è noto questo insieme può essere strutturato come spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su $\mathbf{C}$ con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) g(t) \; dt. \tag{B.1}$$

Di conseguenza è sempre possibile sviluppare una qualunque funzione $u(t) \in \mathcal{F}$ su di una base di funzioni ortogonali (che possiamo se necessario sempre supporre ortonormali) $\{\mathbf{v}_l\}$:

$$\mathbf{u} = \sum_l (\mathbf{v}_l, \mathbf{u}) \; \mathbf{v}_l = \sum_l \int_{-T/2}^{T/2} v_l^*(\tau) u(\tau) \; d\tau \; \mathbf{v}_l. \tag{B.2}$$

Una tale base è fornita dall'insieme di funzioni esponenziali

$$v_l(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi l t/T}, l \in \mathbf{Z} \tag{B.3}$$

che in effetti appartengono ad $\mathcal{F}$ e costituiscono un insieme ortonormale:

$$(\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_{l'}) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi(l'-l)t/T} = \delta_{ll'}. \tag{B.4}$$

Evidentemente lo stesso vale per le funzioni seno e coseno; se l'insieme di funzioni di base viene definito come

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}} \\
v_l(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi lt/T),\ l \in \mathbf{N} \\
w_l(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi lt/T),\ l \in \mathbf{N}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

anch'esso risulta ortonormale.

Si noti che tutte le funzioni risultano periodiche di periodo T o, se si preferisce, aventi frequenze $\omega_l = 2\pi l/T$ che sono tutte multiple intere di una frequenza $\omega = 2\pi/T$ detta *fondamentale*. Le altre frequenze sono dette *armoniche*.

Si dimostra che *sia l'insieme B.3 che l'insieme B.5 formano un insieme completo, dunque ciascuno è una base dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.*

Ogni funzione $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$ può dunque essere sviluppata in una serie della forma

$$
u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l\ e^{i\omega_l t} = \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi l\tau/T} u(\tau)\ d\tau\ e^{i2\pi lt/T} \tag{B.6}
$$

oppure

$$
\begin{aligned}
u(t) &= a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}[a_l\ \cos(\omega_l t) + b_l\ \sin(\omega_l t)] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\ d\tau \\
&+ \frac{2}{T}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi l\tau/T)\ u(\tau)\ d\tau\ \cos(2\pi lt/T)\right. \\
&+ \left.\int_{-T/2}^{T/2}\sin(2\pi l\tau/T)\ u(\tau)\ d\tau\ \sin(2\pi lt/T)\right].
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

Il coefficiente a_0 o c_0 denota il valor medio della funzione u.

Se la funzione u è a valori reali i coefficienti a_l e b_l sono reali, ma i c_l non lo sono necessariamente [lo sono, per esempio, se (*Esercizio*) la funzione u è pari]. In generale vale solo la relazione $c^*_{-l} = c_l$. Lo sviluppo converge ad $u(t)$ in tutti i punti di continuità ed al valor medio dei limiti destro e sinistro (che, per le ipotesi fatte, esistono sempre) nei punti di discontinuità. Evidentemente, per funzioni pari si avrà $b_l = 0$ e per funzioni dispari $a_l = 0\ \forall l$.

Ognuno di questi sviluppi è *unico* ed è noto come *sviluppo in serie di Fourier.* Tale sviluppo definisce dunque una relazione biunivoca tra l'insieme $\mathcal{F}$ ed un opportuno sottoinsieme dell'insieme delle successioni.

B.2 La trasformata di Fourier

Possiamo considerare il caso di una funzione non periodica definita su tutto l'asse reale prendendo il limite $T \to \infty$ delle formule precedenti. In questo limite le frequenze ω_l tendono ad una distribuzione continua, infatti la loro distanza è $\Delta\omega = \omega_{l+1} - \omega_l = 2\pi/T \to 0$. Passiamo quindi al limite del continuo identificando $1/T$ con $\Delta\omega/2\pi \to d\omega/2\pi$. Prendendo la base di esponenziali complessi B.3 si dimostra che lo sviluppo di Fourier diventa

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\omega)\ e^{i\omega t}\ d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}u(\tau)\ d\tau\ e^{i\omega t}\ d\omega \tag{B.8}$$

dove si è introdotta la *trasformata di Fourier*

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}u(\tau)\ d\tau. \tag{B.9}$$

La funzione originale $u(t)$ viene anche detta *antitrasformata* di $\widehat{u}(\omega)$ e, come si vede, l'antitrasformazione di Fourier è del tutto analoga alla trasformazione, cambiando solo il segno all'esponente, la variabile di integrazione ed il coefficiente (anche quest'ultimo avrebbe potuto essere scelto simmetrico). È frequente l'uso di omettere il "cappelletto" sulla trasformata e di distinguerla dall' antitrasformata solo tramite il simbolo della variabile indipendente.

La trasformata di Fourier può essere vista, oltre che come uno sviluppo su di una base più che numerabile di funzioni, come una funzione avente come dominio un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni da **R** in **C** e come codominio un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni da **C** in **R**. Si tratta di una funzione *lineare*: se $f(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$, allora $\widehat{f}(\omega) = \alpha\widehat{g}(\omega) + \beta\widehat{h}(\omega)$.

Si dimostra che se si chiama $\mathcal{G}$ lo spazio di Hilbert costruito, nella maniera usuale, sull'insieme delle funzioni infinitamente derivabili $u(t) : [-\infty, \infty] \to$ **C** tali che per ognuna di esse esiste un insieme $\{C_{pq}(u)\}$ tale che $|t^p u^{(q)}| < C_{pq}(u)$ (funzioni "rapidamente decrescenti"), allora *la trasformata di Fourier è un isomorfismo da $\mathcal{G}$ in $\mathcal{G}$.*

Valgono le proprietà, di facile verifica (*Esercizio*)

$$\widehat{\frac{d^n u}{dt^n}} = (i\omega)^n \widehat{u}(\omega)$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(\omega) &= \widehat{u}^*(-\omega) && \text{(B.10)}\\
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)\ d\tau = (g*h)(t) \Rightarrow \widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{h}(\omega).
\end{aligned}
$$

Quest'ultima è nota come *teorema della convoluzione*.

L'estensione della trasformata di Fourier a funzioni di più variabili è immediata. Se $\mathbf{r}$ è un vettore a tre dimensioni, allora

$$
\widehat{u}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u(\mathbf{r})\ dxdydz \tag{B.11}
$$

$$
u(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\widehat{u}(\mathbf{k})\ dk_xdk_ydk_z. \tag{B.12}
$$

B.3 Applicazioni

La linearità della trasformata di Fourier è alla base delle sue principali applicazioni. In virtù di questa proprietà è possibile risolvere un'equazione differenziale (o integrale) lineare trasformando secondo Fourier l'equazione stessa per poi lavorare separatamente su ogni componente ω. Al termine si ricombinano linearmente le soluzioni trovate, funzioni di ω, tramite l'antitrasformata, ottenendo così la soluzione generale dell'equazione.

B.3.1 Il circuito RLC

Un esempio semplice è dato dalla soluzione dell'equazione 3.8 del circuito RLC. Possiamo scrivere l'equazione come

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\frac{dV}{d\tau}d\tau\ e^{i\omega t}\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\left(L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}\right)d\tau e^{i\omega t}\ d\omega
$$

ovvero, sfruttando le proprietà della trasformata,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\widehat{V}(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\omega^2L+i\omega R+\frac{1}{C}\right)\widehat{I}(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega
$$

e notando che gli esponenziali $e^{i\omega t}$ sono linearmente indipendenti possiamo eguagliare gli integrandi:

$$
i\omega\widehat{V}(\omega) = \left(-\omega^2L+i\omega R+\frac{1}{C}\right)\widehat{I}(\omega) \Rightarrow \widehat{I}(\omega) = \frac{\widehat{V}(\omega)}{R+i[\omega L-1/(\omega C)]}. \tag{B.13}
$$

Di solito i passaggi intermedi vengono sottintesi e si scrive direttamente la B.13. Come si vede, ci si è ricondotti da un'equazione differenziale ad una algebrica. Questa equazione dà il valore dell'ampiezza di ogni componente di Fourier della corrente $\widehat{I}(\omega)$ in funzione dell'ampiezza della componente di Fourier della tensione applicata $\widehat{V}(\omega)$. Altrimenti detto, fornisce la risposta in corrente del circuito per una tensione con una sola frequenza ω e di ampiezza $\widehat{V}(\omega)$; per la linearità dell'equazione la risposta in corrente per una tensione variabile in maniera arbitraria si ottiene semplicemente sommando tutte le risposte a tutte le frequenze, vale a dire integrando la B.13:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{I}(\omega)\ e^{i\omega t}\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{V}(\omega)e^{i\omega t}}{R + i[\omega L - 1/(\omega C)]}\ d\omega.$$

L'integrale, data la forma esplicita di $V(t) \Leftrightarrow V(\omega)$, si calcola o esplicitamente o facendo ricorso ad opportune tavole. Nel caso semplice $V(t) = V_0 \cos(\omega' t) = V_0(e^{i\omega' t} + e^{-i\omega' t})/2$ l'integrale si riduce alla somma di due termini, quelli con $\omega = \pm\omega'$, per cui, ricordando le definizioni di ϕ, X e Z:

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{V_0}{2}\left\{\frac{e^{i\omega' t}}{R + i[\omega' L - 1/(\omega' C)]} + \frac{e^{-i\omega' t}}{R - i[\omega' L - 1/(\omega' C)]}\right\} \\
&= \frac{V_0}{2}\left\{\frac{R - iX}{R^2 + X^2}e^{i\omega' t} + \frac{R + iX}{R^2 + X^2}e^{-i\omega' t}\right\} = \frac{V_0}{Z}\left\{\frac{R}{Z}\cos\omega' t + \frac{X}{Z}\sin\omega' t\right\} \\
&= \frac{V_0}{Z}\{\cos\omega' t\cos\phi + \sin\omega' t\sin\phi\} = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega' t - \phi)
\end{aligned}$$

coincidente con la 3.10. Naturalmente, avendo considerato fin dal principio funzioni periodiche troviamo soltanto le soluzioni a regime e non i transitori.

B.3.2 I potenziali ritardati

Un esempio più complicato, ma importante, è quello delle equazioni per i potenziali 3.25. Prendendo per semplicità quella per il potenziale scalare, e trasformando con Fourier rispetto alla variabile temporale, l'equazione diventa

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi(\mathbf{r},\omega) = -\rho(\mathbf{r},\omega)/\epsilon_0. \qquad \text{(B.14)}$$

Immaginiamo ora di avere una carica puntiforme di valore q nell'origine.

La densità di carica è allora tale che $\rho(\mathbf{r})$ sia nulla ovunque tranne che in un intorno molto piccolo (infinitesimo) attorno a $\mathbf{r} = 0$ e che $\int \rho \, d\Omega = q$[1].

La soluzione $G(\mathbf{r}, \omega)$ dell'equazione B.14 in questo caso particolare, a simmetria sferica, dev'essere anch'essa a simmetria sferica e si trova agevolmente in spazio di Fourier:

$$G(k, \omega) = \frac{q}{\epsilon_0 \, (k^2 - \omega^2/c^2)} \tag{B.15}$$

Ma il caso dipendente dal tempo differisce da quello statico per la presenza di un fattore $\omega \neq 0$; vediamo dunque che la differenza fra i due casi si riduce alla sostituzione di k^2 con $k^2 - \omega^2/c^2 = (k - \omega/c)(k + \omega/c)$. Dato che, nelle trasformate, k corrisponde ad r ed ω a t, possiamo perciò aspettarci che la trasformata inversa della B.15 dia un risultato che differisce dal caso statico per la sostituzione di r con $r \pm ct$. Si verifica (*Esercizio*) che è proprio così. D'altro canto $G(r, \omega = 0)$ deve coincidere con la soluzione dell' eq. 1.16, per cui si deve avere (*Esercizio*: verificarlo)

$$G(r, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Leftarrow \frac{q}{\epsilon_0 k^2}$$

e di conseguenza

$$G(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r \pm ct)} \Leftarrow \frac{q}{\epsilon_0 (k^2 - \omega^2/c^2)}.$$

Nel caso generale, dunque, se sommiamo tutti i contributi alla $\rho(\mathbf{r}, t)$ delle cariche puntiformi, in completa analogia con il paragrafo 3.6.2, otteniamo un risultato che è proprio quello espresso dalla 3.26.

[1]Le strane proprietà di questo tipo di "funzione", chiamata *funzione delta di Dirac* δ, possono essere studiate rigorosamente tramite la *teoria delle distribuzioni*, descritta in numerosi testi, a cui si rimanda l'interessato.

Appendice C

Relazioni vettoriali

C.1 Definizioni e relazioni algebriche

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{C.1}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{C.2}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) \tag{C.3}$$

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$$

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{C.4}$$

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{C.5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{C.6}$$

$$\nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z) \tag{C.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{C.8}$$

C.2 Relazioni differenziali

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = u_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \tag{C.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \tag{C.10}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{v} \tag{C.11}$$

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2}\nabla u^2 \tag{C.12}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{C.13}$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \tag{C.14}$$

C.3 Relazioni integrali

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{v} \; d\Omega \tag{C.15}$$

$$\int \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \tag{C.16}$$

Bibliografia

[1] D.J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall. È il testo che più si avvicina a questo corso, sia per tipo di argomenti trattati che per livello di approfondimento. Scritto in stile molto chiaro e discorsivo.

[2] G.D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli. Il testo standard per l'elettrodinamica, utilizzabile anche per la Relatività, molto completo ed aggiornato. Strana la scelta di utilizzare, nell'ultima edizione, il SI per i primi capitoli e quello di Gauss per gli ultimi.

[3] P. Panofski e M. Phillips, *Elettricità e magnetismo*, CEA. Un altro testo classico, ora fuori commercio in Italia ma disponibile a prezzo contenuto in inglese (Dover). Ottima la parte di relatività.

[4] Bo Thidé, *Electromagnetic Field Theory*, reperibile gratuitamente in rete all'URL http://www.plasma.uu.se/CED/Book. Molto conciso, contiene però tutti gli argomenti e le equazioni più importanti (ottica e circuiti esclusi).

[5] E. Purcell, *La Fisica di Berkeley - vol. 2*, Zanichelli. Un testo meno avanzato dei precedenti ma molto buono. Usa un approccio diverso da quello qui seguito (la relatività è data per nota). Sfortunatamente scritto nel sistema di Gauss.

[6] D. Halliday e R. Resnick, *Fisica 2*, CEA. Testo abbastanza elementare di elettromagnetismo (non usa le forme differenziali per le equazioni) e di ottica, ricco di esempi ed esercizi. Sostituibile con qualunque testo di Fisica Generale per i primi due anni di Fisica o Ingegneria.

[7] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *La fisica di Feynman - voll. 1 e 2*, Zanichelli. Un libro eccellente, ma non un libro di testo: da leggere *dopo* avere studiato gli altri, per capirli più a fondo.

[8] L.D. Landau e E.M. Lifšits, *Corso di Fisica Teorica vol. 2: Teoria dei Campi*, Editori Riuniti. Valgono le stesse avvertenze che per il Feynman. Più di consultazione che di studio.

[9] C. Kittel, *Introduzione alla Fisica dello Stato Solido*, Bollati Boringhieri. In un paio di capitoli discute il magnetismo nella materia sforzandosi di non usare troppo la Meccanica Quantistica.

[10] R. Resnick, *Introduzione alla Relatività Ristretta*, CEA. Introduzione chiara ed estesa, a livello non troppo avanzato. Attenzione: fa largo uso della "massa relativistica", concetto che ritengo poco utile se non deleterio.

[11] E.F. Taylor e J.A. Wheeler, *Fisica dello spazio-tempo*, Zanichelli (mi è nota direttamente però solo l'edizione inglese). È un testo anticonvenzionale — non sono molti i libri di Fisica che includono i Klingon nell'indice analitico — focalizzato sugli aspetti fisici e con il minimo di matematica necessaria. Si tenga presente che nel testo si parla di "sistema in caduta libera" intendendo "sistema inerziale".

[12] A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, Addison-Wesley. Ampia illustrazione della genesi della Teoria della Relatività, nel contesto scientifico (sia teorico che sperimentale) dell'epoca.

[13] H. Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli. Rimane la presentazione più chiara a me nota della meccanica analitica. Include una trattazione degli elementi della meccanica analitica relativistica.