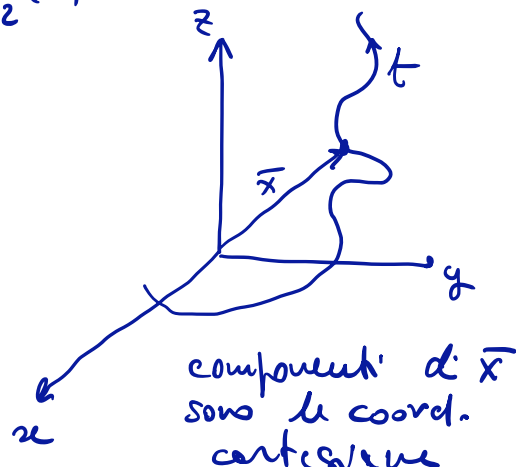


EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

Eq. di Newton $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(t)$

$\vec{x}(t) : \quad \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \vec{x}(t)$

$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$



L'eq. di Newton è un'eq. differenziale

$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t), t)$

funz. composta

$\vec{F} \circ (\vec{x}(t), \frac{d\vec{x}}{dt}(t))$
 $\uparrow$
 $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$

→ è un'eq. la cui incognita è una FUNZIONE $(\vec{x}(t))$

Caso 1-dimensionale : il pto materiale si muove su una retta.



Il moto lungo la retta è descritto da una funzione

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto x(t)$

Eq. di Newton:

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}, t)$

→ eq. d'ff. la cui incognita è la funz. $x(t)$

funzioni: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \dots$

$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m}(x, \frac{dx}{dt}, t) \equiv f(x, \frac{dx}{dt}, t)$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

è un'uguaglianza
tra due
funz. in t

f è una funzione a tre variabili:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v, t) \mapsto f(x, v, t)$$

è una funzione

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (\text{funz. composta})$$

2^a legge di Newton in sist. 1d:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

se f è INDIPEND da t ,
l'eq. si dice AUTONOMA

"forma normale"

(Forma generale scelta $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$)

Se f è LINEARE in x e $\dot{x}$,
l'eq. si dice LINEARE

$$f(x, \dot{x}, t) = ax + b\dot{x} + c$$

ES 1) PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$\rightarrow x(t) = at + b \quad \leftarrow \text{"SOLUZIONE GENERALE"}$$

a, b parametri liberi

$\Rightarrow$ per ogni scelta di (a, b) abbiamo una diversa

soluzione PARTICOLARE

$$\text{ES. } (a, b) = (1, 0) \Rightarrow x(t) = t$$

ES 2] OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cos(\omega t) + \underline{b} \sin(\omega t)$$

$$= \underline{A} \cos(\omega t + \underline{\varphi})$$

$$= \underline{C} e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$$

$$\underline{C} = \text{Re} C + i \text{Im} C$$

2 parametri
(reali) liberi

ES 3] REPULSORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cosh \omega t + \underline{b} \sinh \omega t$$

$$= \underline{A} e^{\omega t} + \underline{B} e^{-\omega t}$$

ES 1,2,3 hanno la caratteristica in comune che f è una

$$f = 0, -\omega^2 x, \omega^2 x$$

funz. LINEARE in

x e $\dot{x}$

Per le eq. diff. lineari OMOGENEE* vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ.

il quale dice che la SOLUZIONE GENERALE è combinazione lineare di 2 (se eq. è del 2° ordine) soluzioni particolari indep.

$$\begin{aligned} * f(x, \dot{x}, t) &= \\ &= a \dot{x} + b x \quad (c=0) \end{aligned}$$

Se a f lin. omogenea, si aggiunge un termine non-omogeneo, allora la solut. GENERALE è la somma di una solut. particolare e della solut. gen. dell'eq. omogenea associata.

ES 4

$f = -g$ è lineare, ma non è omogenea.

$$\ddot{x} = -g \quad \rightsquigarrow \text{eq. omogenea associata è } \ddot{x} = 0$$

↓
Solut. particolare:
 $-\frac{1}{2}gt^2$

↓
Solut. gen. dell'omogenea
 $x_{om.}(t) = at + b$

Solut. gen. dell'eq. di partenza è

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$

ES 5

PENDOLO

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$$

← non-lineare

(solut. richiede funzioni ellittiche)

ES 6

CADUTA

FRENATA

$$\ddot{x} = -\beta \dot{x} - g \quad \rightsquigarrow \text{eq. omogenea associata } \ddot{x} = -\beta \dot{x}$$

↓
Solut. part.
 $x(t)_{\text{part}} = -\frac{g}{\beta}t \equiv v_{\infty}t$
 $\frac{g}{\beta} \equiv v_{\infty}$

$\begin{cases} \sigma(t) \equiv \dot{x}(t) \\ \dot{v} = -\beta v \end{cases}$
 $v(t) = \alpha e^{-\beta t}$
 $x(t)_{\text{om.}} = b - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}$
 $= \underline{b} + \underline{a} e^{-\beta t}$

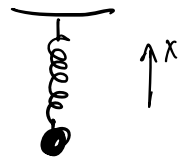
↓
 $x(t) = v_{\infty}t + a e^{-\beta t} + b$

$(\dot{x}(t) = v_{\infty} - a\beta e^{-\beta t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} v_{\infty})$

ES 7] Osc. armonico in campo di forze cost.

$$\ddot{x} = -\omega x - g \quad \leadsto \text{eq. omog. associata} \quad \ddot{x} = -\omega x$$

$$x_{om}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$



↓
soluz. part. $x_{part}(t) = -g/\omega$

$$\rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega}$$

ES 8] OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$$\mu, \omega > 0$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x} \quad (*) \quad \text{eq. lin. omogenea}$$

che dip. da due parametri μ, ω

Cerchiamo soluz. particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$;

qte sono soluz. se soddisfano l'eq. (*):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t} - 2\mu \lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -(\omega^2 + 2\mu \lambda) e^{\lambda t}$$

$$\hookrightarrow \lambda^2 + 2\mu \lambda + \omega^2 = 0$$

eq. di 2° grado in λ

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow 2 \text{ soluz. partic. della forma } e^{\lambda t}$

GRANDE SMORZAMENTO

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$\mu < \omega$
PICCOLO SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t} (a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$$

dove $\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$

$\mu = \omega$
SMORZAMENTO CRITICO

$$x(t) = (a + bt) e^{-\mu t}$$

ES 9] CICLO LIMITE

Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad \beta > 0$$

- attrito positivo per $|x| > 1$
- " negativo per $|x| < 1$

- per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo
⇒ ampiezza tende a ridursi
- per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo
⇒ ampiezza tende ad aumentare
- per un solo moto CRITICO i due effetti si
compensano ($|x|=1$) ⇒ moto periodico

↳ CICLO LIMITE.

TEOREMA ESISTENZA & UNICITA'

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad \text{eq. differenziale del 2° ordine}$$

→ può essere portata nella forma di un sistema di eq. differenziali del 1° ordine.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad \bar{f}(\bar{x}, t) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)} \quad (*) \quad \text{Eq. d'f. del 1° ord}$$

nell'incognita $\bar{x}(t)$

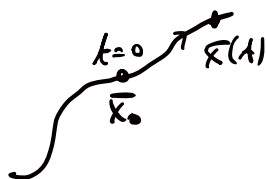
$\downarrow$
Vali il **TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'**

Prop. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localm. Lipschitziana $\otimes$

in un apnto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $\forall \bar{x}_0 \in U$

$\exists$ intervallo $(-\tau, \tau)$ e una UNICA SOLUZIONE $\bar{x}(t)$ dell'eq. (*) definita in $t \in (-\tau, \tau)$ t.c.

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (\text{condizione iniziale})$$

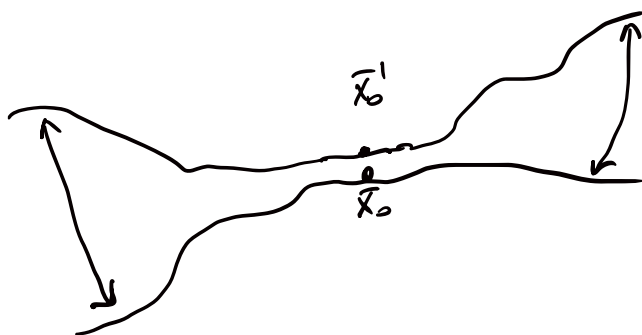


Se cambiamo $\bar{x}_0$, cambia la soluzione

$$\bar{x}(t; \bar{x}_0)$$

↑
parametro della funzione $\bar{x}(t)$ che risolve
l'eq. (*) con condizione iniziale $\bar{x}_0$

↓
La soluzione dipende con regolarità dal dato iniziale
(e da eventuali parametri presenti in $\bar{f}$)

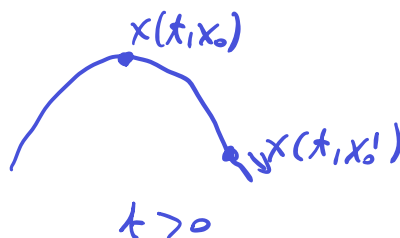
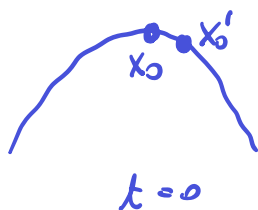


Vale la relazione

$$\|\bar{x}(t, \bar{x}'_0) - \bar{x}(t, \bar{x}_0)\| < C \|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0\| e^{\lambda|t|}$$

$\lambda > 0$

Esempio: repulsore armonico



⊗ $\bar{f}$ è localm. Lipschitziana se $\exists \lambda > 0$ t.c. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U$ con $\bar{x} \neq \bar{y}$
si ha $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq \lambda \|\bar{x} - \bar{y}\|$. La più piccola λ che soddisfa pta
condiz. suff: $\bar{f}$ di classe C^1 .
conosc. è detta COST. DI LIP.

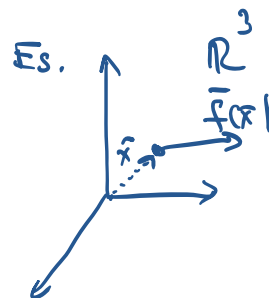
Es. $\bar{f}$ non-lip.: $\sqrt{x}$ attorno all'origine. Per $x_0 = 0$ si

inde unicità $x(t) = 0$ e $x(t) = \frac{t^2}{4}$ sono soluz. di $\dot{x} = \sqrt{x}$ con $x(0) = 0$.

SISTEMA AUTONOMO

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \cancel{t})$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &\in \mathbb{R}^n \\ \bar{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \uparrow \\ \text{campo VETTORIALE} \end{aligned}$$



$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) (*) \leftarrow \text{sistema autonomo}$$

→ per sistemi autonomi, abbiamo INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè

se $\bar{x}(t)$ è soluzione di $(*)$, anche
 $\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t - t_0)$ è soluz. di $(*)$

Es. $\dot{x} = x \rightarrow$ una soluz. è $x(t) = e^t$, ma
anche e^{t-t_0} è soluzione $\forall t_0$

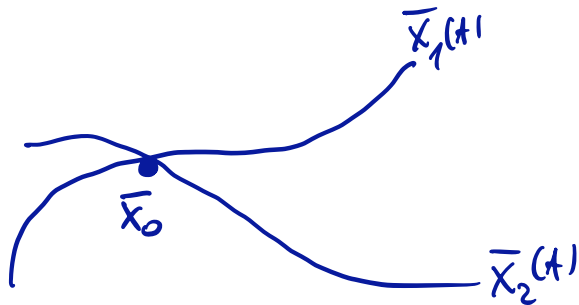
Dim. Prendiamo $\bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$, cioè $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$;
allora $\dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt} \bar{x}'(t) = \frac{d}{dt} \bar{x}(t - t_0) = \dot{\bar{x}}(t - t_0) = \bar{f}(\bar{x}(t - t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t)) //$
 $\bar{x}(\tilde{t})$ è soluz.

⇒ Traiettorie (*) delle soluzioni di $(*)$ non si
intersecano mai!

(*) Traiettorie è l'immagine della funz. $\bar{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$

Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due soluzioni

$\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_2(t)$ le cui traiettorie si intersecano



$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$$

Ma $\downarrow$ se questo fosse possibile, allora esisterebbe una terza solut.

$$\bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0) \text{ t.c. } \bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$$

cioè esisterebbero due solut., $\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_3(t)$ con lo stesso dato iniziale a $t=0$, violando il teorema di esistenza e UNICITA'. //

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) \rightsquigarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (*)$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coord'inate $\bar{x} = (x, v)$

$$(*) \text{ equiv. a } \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{dove} \quad \bar{f}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v) \end{pmatrix}$$

Preso il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$. Le soluzioni dipendono dai parametri x_0 e v_0 .

ES. osc. armonico

solut. e $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

$$v(t) = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = x(0) = a \\ v_0 = v(0) = b\omega \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = x_0 \\ b = \frac{v_0}{\omega} \end{array}$$

$$\bar{x}(t; \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x(t; x_0, v_0) \\ v(t; x_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Scelti x_0 e v_0 , la soluzione è determinata.