

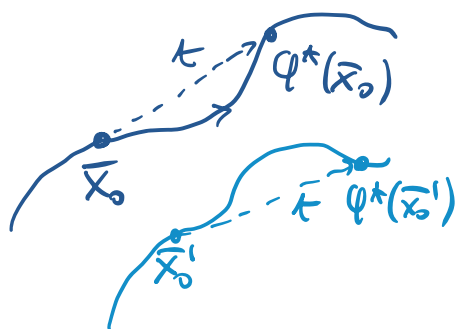
FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Dato l'eq. diff. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*)$ $\bar{x}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^n$
 $\forall \bar{x}_0, \exists!$ solut. $\bar{x}(t; \bar{x}_0) \quad (.)$

- Fissato $\bar{x}_0$, la solut. $(.)$ descrive una curva in $\mathbb{R}^n$
- Fissato t , $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ è una funzione in $\bar{x}_0$,
cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}_0 \mapsto \varphi^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0)$$



solut. di $(*)$

t è un parametro della mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Al variare di t si ha

una FAMIGLIA a un parametro

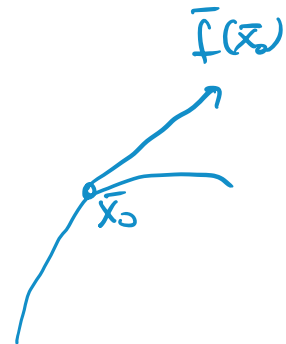
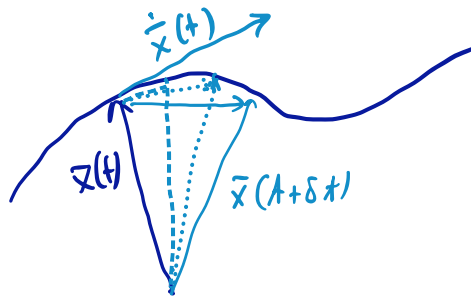
di AUTOMORFISMI $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

la famiglia $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ si dice il **FLUSSO**
relativo al campo vettoriale $\bar{f}$.

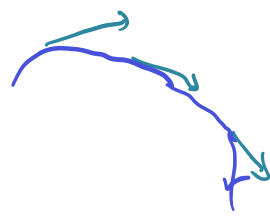
$$\left[\begin{array}{l} \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}} = \text{un GRUPPO} \\ \text{Id} : \varphi^0 \quad \text{Inverso} : \varphi^{-t} \quad \text{Composit.} : \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s} \end{array} \right]$$

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $\Rightarrow$ curve $\bar{x}(t)$ che passa per $\bar{x}_0$
 dev'essere tangente al vettore $\bar{f}(\bar{x}_0)$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{x}(t+\delta t) - \bar{x}(t)}{\delta t}$$



"linee di forza"



COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

Def. Una funzione $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice
COSTANTE DEL MOTO per l'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*)$

se $I(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dI(\bar{x}(t; \bar{x}_0))}{dt} = 0$

$\forall t$ e $\forall$ soluzione $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ dell'eq. (*)

è la funz. composta $I \circ \bar{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto I(\bar{x}(t))$

ES. OSC. ARM.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ v(t) &= -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \leftarrow \text{soluz. di } (*)$$

$$I(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad \leftarrow \text{funz. } : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$(x, v) \mapsto I(x, v)$

Verifichiamo che I soddisfi la def. per essere una
cost. del moto:

$$\begin{aligned} I(x(t), v(t)) &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}_{+ \underbrace{v_0^2 \cos^2 \omega t}} - 2 \cancel{x_0 v_0 \omega \sin \omega t \cos \omega t} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^2 \left(\underbrace{x_0^2 \cos^2 \omega t} + 2 \cancel{\frac{x_0 v_0}{\omega} \cos \omega t \sin \omega t} + \underbrace{\frac{v_0^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2} v_0^2 = I(x_0, v_0) \end{aligned}$$

Consideriamo una funzione

$$I: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$$

Scriviamo la seguente eq

$$I(\bar{x}) = \varrho \quad \text{dove } \varrho \text{ cont. reale} \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^l$$

↓

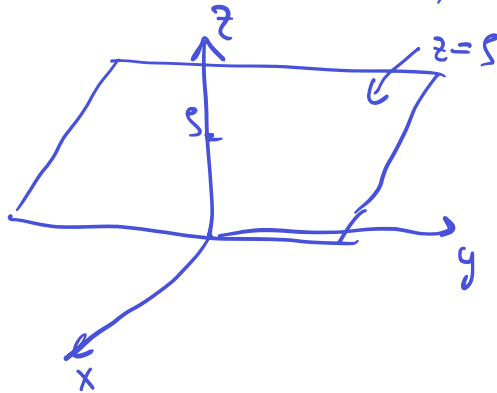
Le solut. di questa eq. appartengono a un
SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^l \rightsquigarrow$ un' IPERSUPERFICIE

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv x^2 + y^2 + z^2$

eq. $I(\bar{x}) = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightsquigarrow$ SFERA

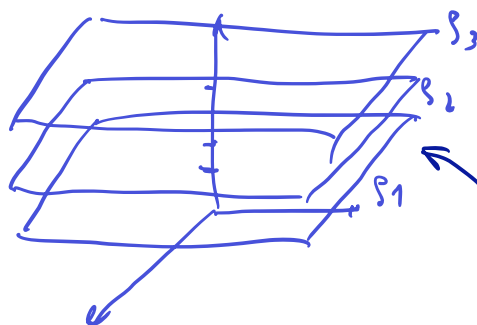
ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv z$

eq. $I(\bar{x}) = \varrho \rightsquigarrow z = \varrho$



Al variare del parametro ϱ , ho una FAMIGLIA
di IPERSUPERFICI (disgiunte) che costituisce
una FOLIAZIONE (stratificazione) di $\mathbb{R}^l$

ES)



$$I(\bar{x}) \equiv z$$

"insiemi di livello"

l'unione di
tutte le
ipersuperfici è
 $\mathbb{R}^l$ stesso.

Sia I una COSTANTE del moto per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*)

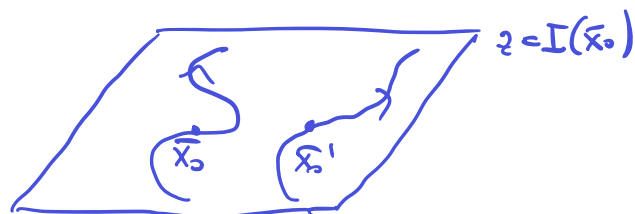
cioè una funz. $I: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\underline{I(\bar{x}(t)) = I(\bar{x}_0)} \quad \text{ovvero} \quad \frac{d}{dt} I(\bar{x}(t)) = 0$$

$\forall t$ e $\forall \bar{x}(t)$ solut. di (*)

$\Rightarrow$ Tutti i phi di una traiettoria che risolve (*)
giacciono su un'ipersuperficie, in qto cap
 $I(\bar{x}) = I(\bar{x}_0)$

ES] Immaginiamo che $I(\bar{x}) = z$ sia cost. del mot $\mu(\bar{x})$



$\rightarrow$ le traiettorie giacciono su un piano (parallelo al
piano xy) $\Rightarrow$ si può ridurre il problema da
tridimensionale a un probl. piano.

$\Rightarrow$ le cost. del moto permettono di ridurre il problema
originario (cioè risolvere $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^l$) a
un problema con un MINOR NUMERO di VARIABILI
e di EQ. DIFF.

Servono dei criteri per individuare le cost. del moto prima
di risolvere le eq. (*).

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^e$ si dice INVARIANTE per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ coincide con $A \ \forall t$

Se $\exists$ cost. del moto I , allora l'insuff. $I(\bar{x}) = c$ è un insieme invariante

ES.



$$\forall \bar{x} \in A \quad \varphi^t(\bar{x}) \in A$$

ES.) osc. ARN. $\mathbb{R}^e \equiv \mathbb{R}^2$ con cor. (x, v)
 $\omega=1, m=1$

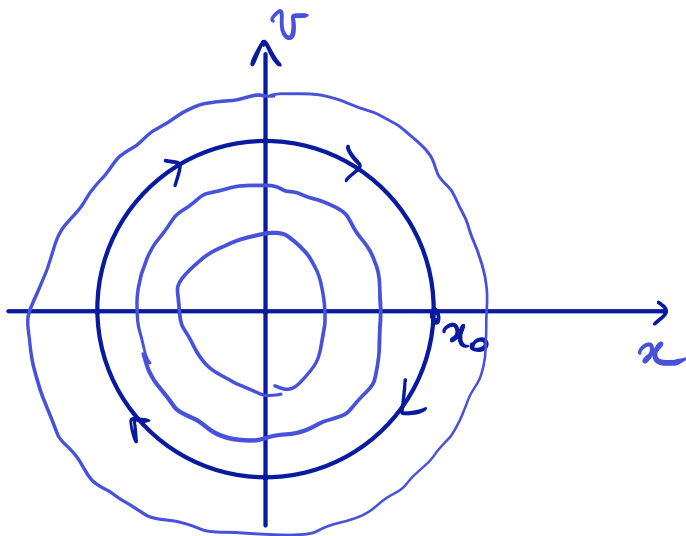
$$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t$$

$$v(t) = -x_0 \sin t + v_0 \cos t$$

Prendiamo come dato i'init. $(x_0, 0)$ (cioè $v_0=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 \cos t \\ v(t) = -x_0 \sin t \end{array} \right.$$

↗
 descrizione parametrica
 di una circonf. di
 raggio x_0



Cost. del moto $I(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$

Insieme di livello sono $I(x, v) = I(x_0, v_0)$

cioè le "sup." $v^2 + x^2 = x_0^2$

ES. DI COST. del moto :

ENERGIA in sist. meccanici a 1 grado di libertà,
autonomi e con forze puramente posizionali.

$$f(x, v) = f(x) \quad \leftarrow \quad f = \frac{F}{m}$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ una primitiva di F ($F = -\overline{V}'$)
 $\exists V(x)$ t.c. $F = -V'$

$$E(x, v) = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

$\frac{\partial E}{\partial x} = V'(x)$
 $\frac{\partial E}{\partial v} = m v$

$$\ddot{x} = f(x)$$
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} (*)$$

$\tilde{E}$ è una cost. del moto

Dim. $\frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) =$

$\swarrow$ solut. di eq. del mot

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t), v(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(x(t), v(t)) \dot{v}(t)$$

$x(t), v(t)$
è solut.
di (*)

$$= \frac{\partial E(\cdot, v(t))}{\partial x} + \frac{\partial E(\cdot, v(t))}{\partial v} f(x(t))$$

$$= V'(x(t)) v(t) + \underbrace{m v(t)}_{\substack{m f = F \\ V' = -F}} f(x(t)) \quad \leftarrow$$

$$= -F(x(t)) v(t) + v(t) F(x(t)) = 0 //$$

DERIVATA DI LIE

Date una funzione $G : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ (detta **VARIABILE DINAMICA**),
consideriamo la derivata totale di

G lungo una traiettoria $\bar{x}(t)$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(\bar{x}(t)) \end{aligned}$$

soluz. di (*)

È significativo introdurre una nuova variabile dinamica

$$\mathcal{L}_{\bar{f}} G : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$$

detta **DERIVATA DI LIE** di G
rispetto al camp. vett. $\bar{f}$

def. da

$$(\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}) = \sum_{i=1}^l f_i(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}) \quad \leftarrow \nabla G \cdot \bar{f} \quad (dG[\bar{f}])$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t))$$

soluz. di (*)

derivata
direzionale
lungo camp.
vettoriale

Prop. $G : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ è una cost. del moto μ (*) $\iff \mathcal{L}_{\bar{f}} G = 0$

Dim. ($\Leftarrow$): $\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t)) = 0$ //

soluz. di (*)

($\Rightarrow$): $\forall \bar{x}_0 \exists!$ soluz. $\bar{x}(t)$ che passa per μ esp. :

$$\forall \bar{x}_0 \quad \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}_0) = \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}(t_0)) = 0 \quad //$$