

Titolo

• Introduzione al corso di statica

grandezze scalari $\rightarrow$ Definite da un numero reale

vettoriali $\rightarrow$ Definite da un numero reale (positivo)
Modulo

- direzione
- verso

Vettori $\rightarrow$ Forze, spostamenti

Rappresentazione di un vettore attraverso segmenti orientati

Rappresentazione di un vettore attraverso segmenti orientati



Vettore: vettore di modulo unitario $\vec{m}$
 $|\vec{m}| = 1$

Operazioni con i vettori

• Somma $\vec{W} = \vec{u} + \vec{V}$

Operazioni con i vettori

• Somma $\vec{W} = \vec{u} + \vec{V}$



$\vec{R} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$
 $\uparrow$
Vettore risultante



Titolo

- Moltiplicazione vettoriale per uno scalare k

$$\vec{w} = k \vec{v}$$

$$|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{v}|$$

- Prodotto scalare tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta \in \mathbb{R}$$

positivo

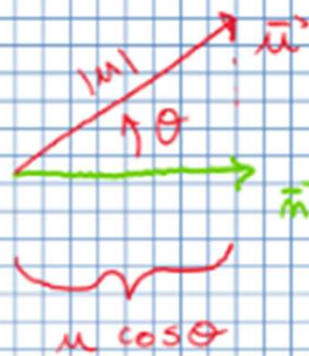
nullo

negativo

$$0 \leq \theta \leq \pi$$



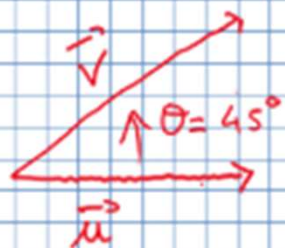
Vettori perpendicolari
prodotto scalare è nullo



$$\vec{u} \cdot \vec{m} = |\vec{u}| \cdot 1 \cos \theta$$

$$\vec{m} = \text{versore} \quad |\vec{m}| = 1$$

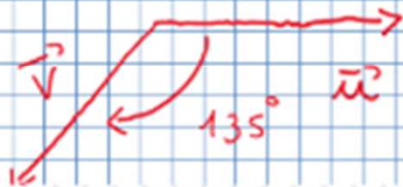
Esempio



$$|\vec{u}| = 2$$

$$|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

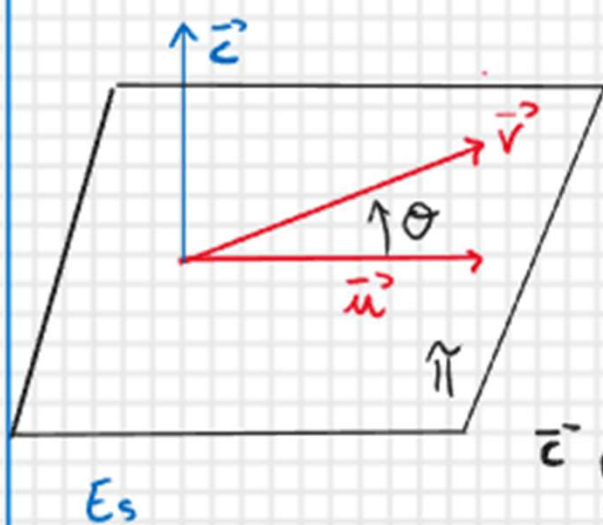


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -4$$

Titolo:

• Prodotto vettoriale

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{c}$$

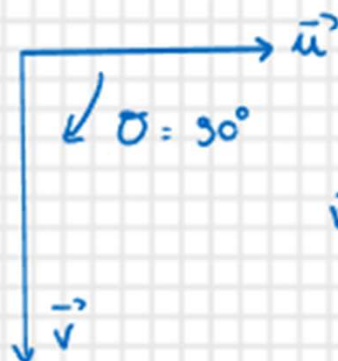


$$|\vec{c}| = u \cdot v \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Prodotto vettoriale nullo se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli

$\vec{c}$ perpendicolare al piano π che contiene $\vec{u}$ e $\vec{v}$

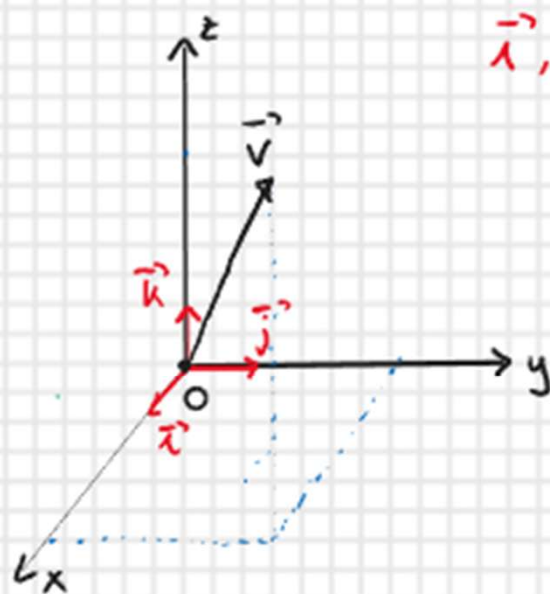


$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

$\vec{w}$ è entrante nel foglio

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Rappresentazione cartesiana dei vettori



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tre versori

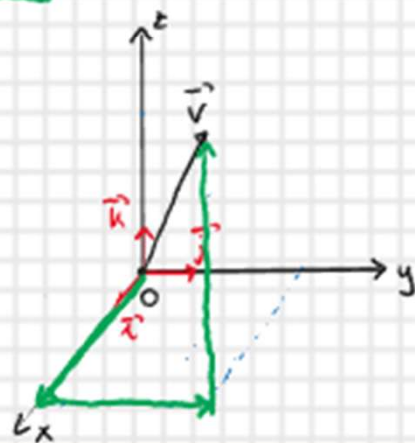
$$\vec{V} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$v_x = \vec{V} \cdot \vec{i}$$

$$v_y = \vec{V} \cdot \vec{j}$$

$$v_z = \vec{V} \cdot \vec{k}$$



$\{0, x, y, z\}$ terna cartesiana ortogonale

Titolo:

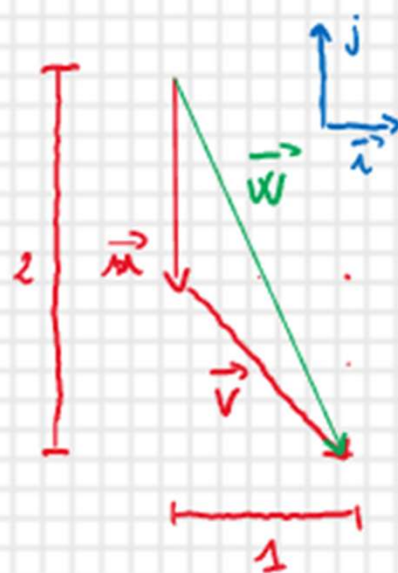
Modulo di un vettore in notazione cartesiana

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

• 50 mm $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

• $\vec{W} = \vec{u} + \vec{V} = (u_x + V_x) \vec{i} + (u_y + V_y) \vec{j} + (u_z + V_z) \vec{k}$



$$|u| = 1$$

$$|v| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{w}|?$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

In notazione cartesiana

$$\vec{u} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \vec{j} \quad \vec{v} = 1 \vec{i} + 1 \vec{j}$$

$$\vec{w} = 1 \vec{i} + 2 \vec{j} \quad |\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Titolo:

• Moltiplicazione vettore $\vec{V}$ per uno scalare h

$$h\vec{V} = h v_x \vec{i} + h v_y \vec{j} + h v_z \vec{k}$$

• Prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{V}$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{V} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k})$$

$$u_x \vec{i} \cdot v_x \vec{i} = u_x v_x \quad \longrightarrow \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$u_x \vec{i} \cdot v_y \vec{j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{V} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

vettori

scalare

• Prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{V} = \vec{W}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Determinante matrice}$$

Segno meno



$$\vec{W} = \vec{u} \times \vec{V} = (u_y v_z - v_y u_z) \vec{i} - (u_x v_z - v_x u_z) \vec{j} + (u_x v_y - v_x u_y) \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

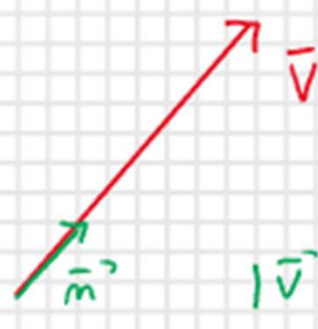
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Titolo:

Es

Assegnato $\vec{V}$ determinare la rappresentazione cartesiana del versore corrispondente $\vec{m}$



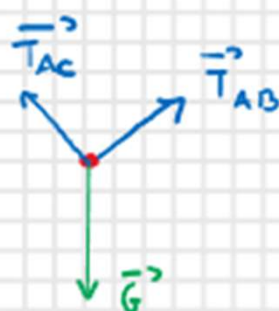
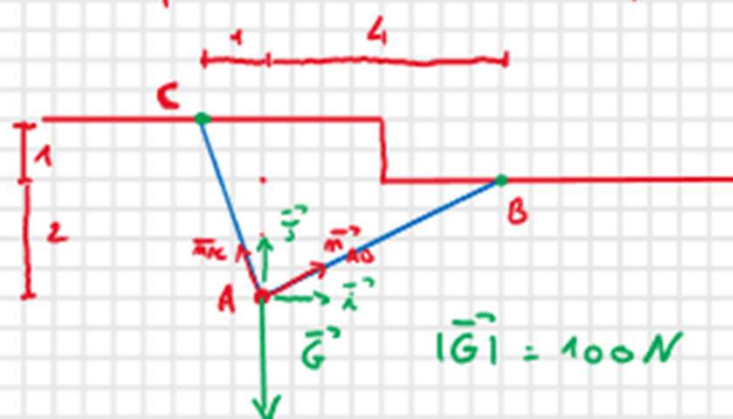
$$\vec{V} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{V} = |\vec{V}| \vec{m}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{m} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} \quad |\vec{m}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

- Equilibrio di un punto materiale



Condizione di equilibrio

- $\vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AB} + \vec{G} = \vec{0}$

T_{AB} e T_{AC}
incognite

$$\vec{G} = -100\vec{j}$$

$$\vec{m}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 2^2}} (4\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \vec{m}_{AB}$$

$$\vec{m}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} (-1\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \vec{m}_{AC}$$

- $$-100\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{20}} (4\vec{i} + 2\vec{j}) T_{AB} + \frac{1}{\sqrt{10}} (-1\vec{i} + 3\vec{j}) T_{AC} = \vec{0}$$

Titolo:

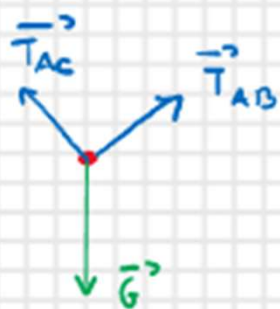
$$\vec{i} : \quad \underline{T_{AB}} \frac{4}{\sqrt{20}} - \underline{T_{AC}} \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

$$\vec{j} : \quad -100 + \underline{T_{AB}} \frac{2}{\sqrt{20}} + \underline{T_{AC}} \frac{3}{\sqrt{10}} = 0$$

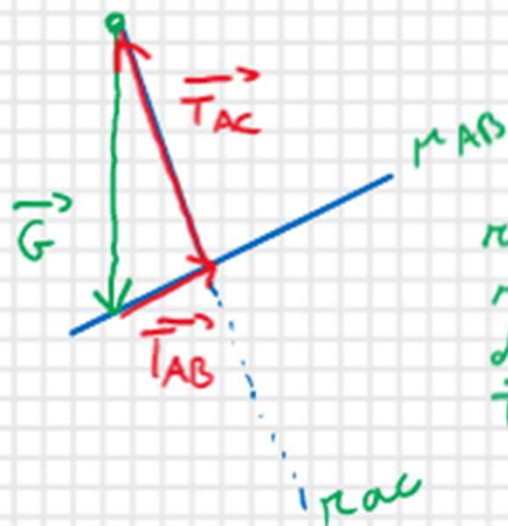
$$T_{AB} = \frac{100\sqrt{5}}{7} \text{ N}$$

$$T_{AC} = \frac{200\sqrt{10}}{7} \text{ N}$$

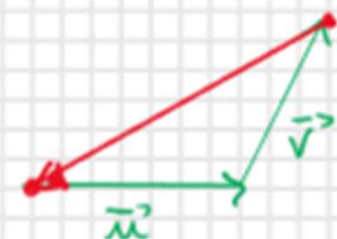
Segno positivo con corde
con l'ipotesi iniziale sul verso
delle forze.



Metodo grafico



r_{AB} e r_{AC}
rette d'azione
dei vettori
 $\vec{T}_{AB}$ e $\vec{T}_{AC}$



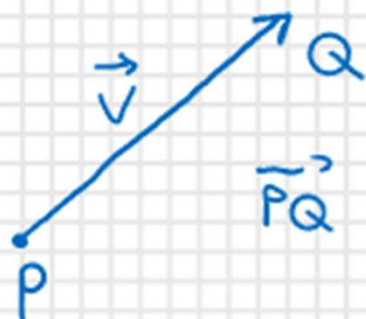
$$\vec{U} + \vec{V} - \vec{W} = \vec{0}$$

- Conosco r_{AB} e r_{AC}
- Conosco il vettore $\vec{G}$
- Conosco 2 lati del triangolo (Poligono delle forze)
- Il verso di $\vec{T}_{AB}$ e $\vec{T}_{AC}$ è tale da chiudere il poligono delle forze (Risultante nulla)

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AB} = \vec{0}$$

Titolo:

Vettori applicati $(P, \vec{V})$



Punto d'applicazione

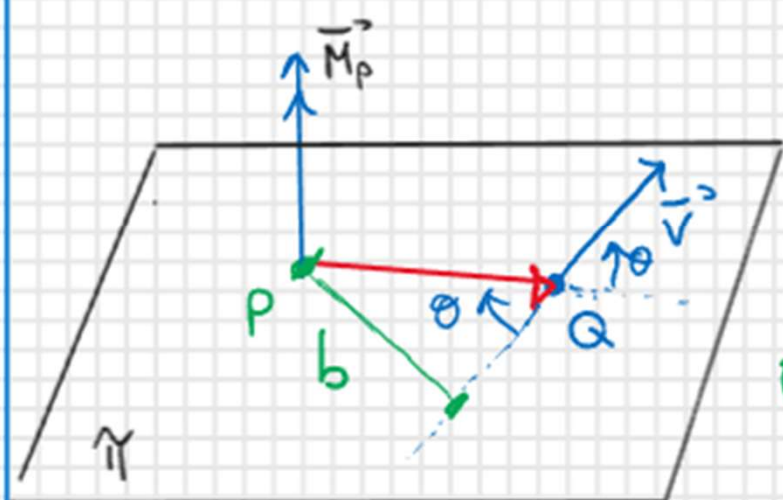
- Momento di un vettore $\vec{V}$ applicato in Q rispetto al polo P

$$\vec{M}_P(Q, \vec{V}) = \vec{PQ} \times \vec{V}$$

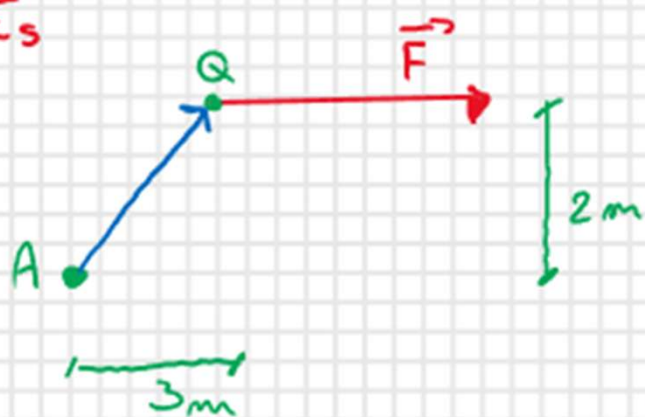
$$|\vec{M}_P| = |\vec{PQ}| V \sin \theta$$

$$|\vec{M}_P| = b V$$

b = braccio è
perpendicolare al
vettore $\vec{V}$



E_s



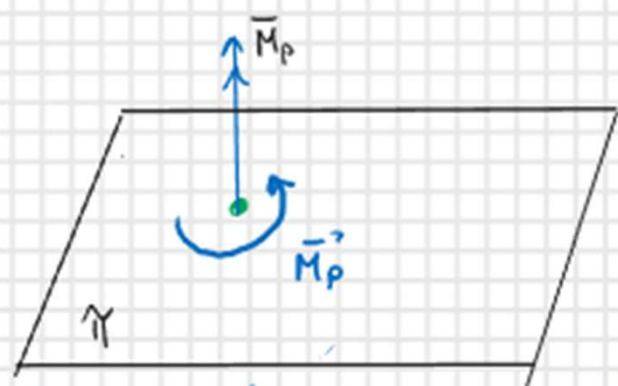
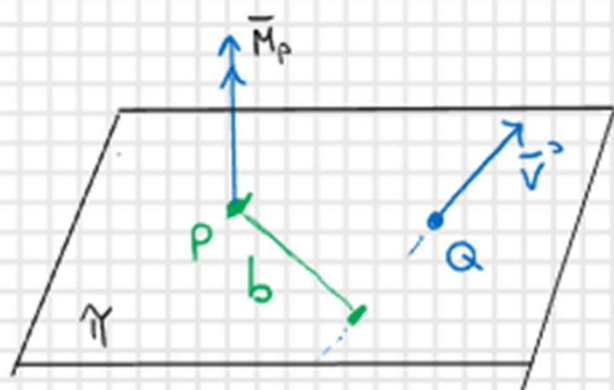
$$|\vec{F}| = 3 N$$

$$\vec{M}_A(Q, \vec{F})$$

$$|\vec{M}_A| = 3 N \cdot 2 m = 6 N m$$

o scario

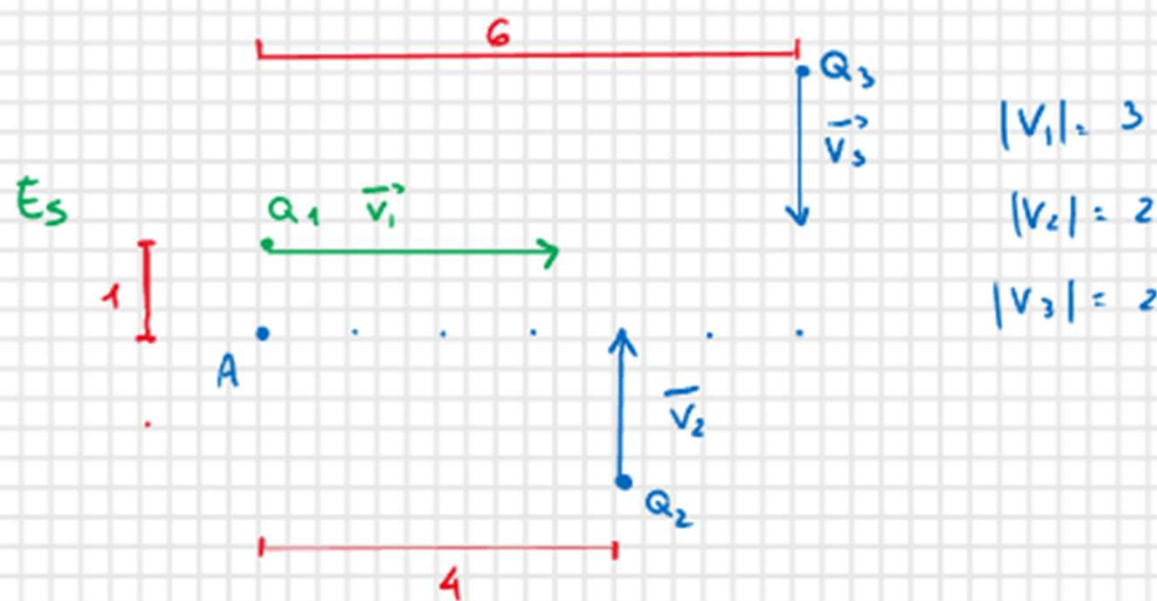
Titolo:



Rappresentazione momento con una freccia curva

- Momento di un sistema di vettori applicati:

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \vec{PQ}_i \times \vec{v}_i$$



$$+ \curvearrowright M_A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = -7$$

Segno è negativo
quindi ↻

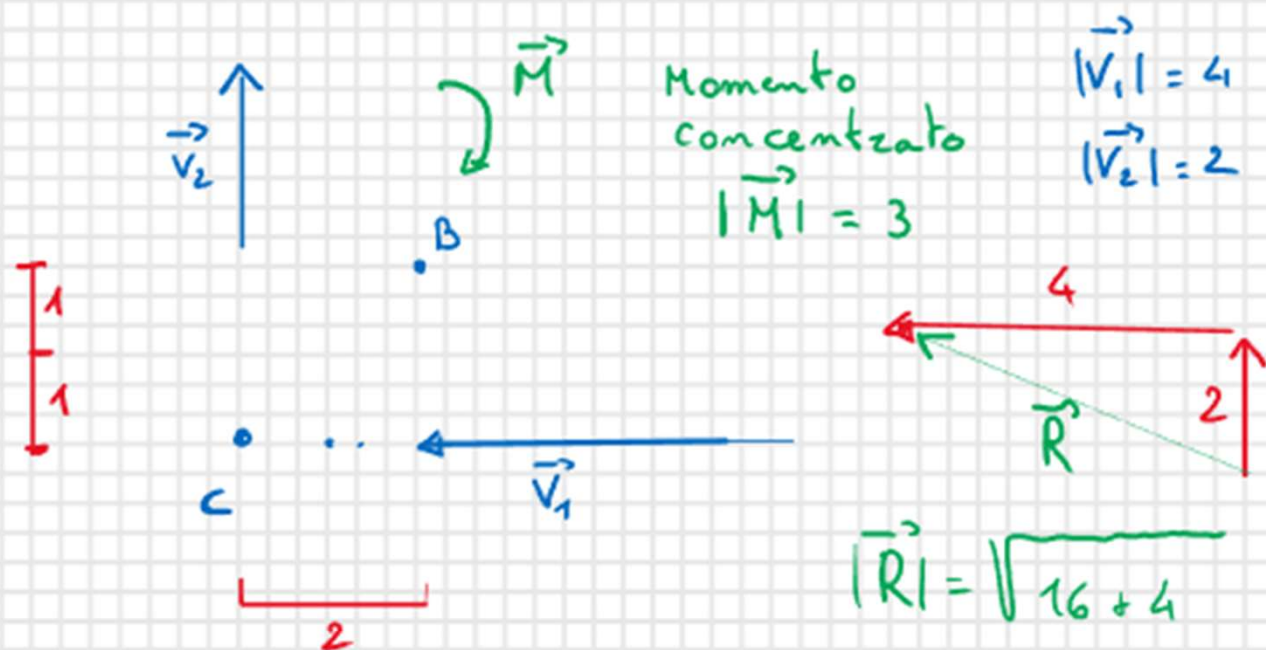
Calcolo della risultante

$$|R| = 3 \quad \vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$



Titolo:

Sistema con momento concentrato $\vec{M}$



$$\uparrow \vec{M}_B = -2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 3 = -15$$

$\uparrow$
momento concentrato

$$\vec{M}_C = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$\vec{M}_B \neq \vec{M}_C \neq \vec{M}_P$$

Coppia - Particolare sistema di vettori -



Risultante è nulla $\vec{R} = \vec{0}$

$$\uparrow M_A = -2b$$

$$\uparrow M_B = -2b$$

$$\uparrow M_C = -2 \cdot \frac{b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = -2b$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_P$$

$$|M| = 2b$$

Titolo:

Coppia a braccio nullo



$$\vec{M} = 0 \quad \vec{R} = 0$$

Momento risultante e risultante nulli

Una coppia di braccio nullo non modifica il sistema al quale è aggiunto

Es

