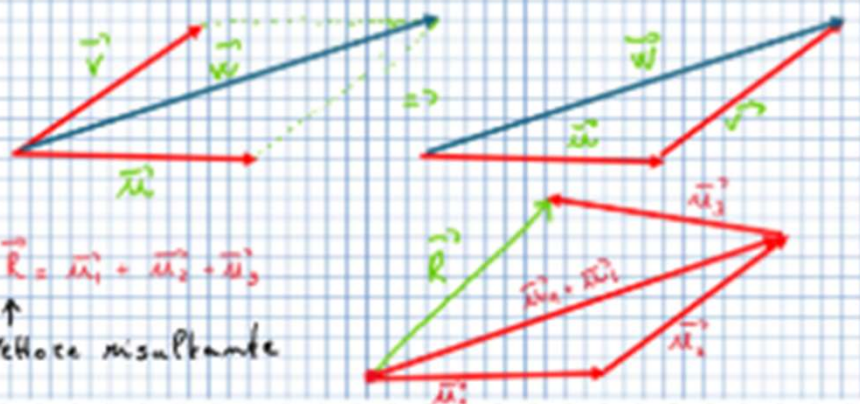


Sommario lezione precedente

Operazioni con i vettori

• Somma $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$

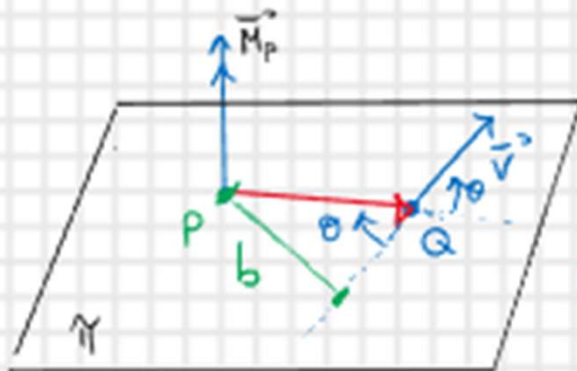


$$\vec{R} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3$$

↑
Vettore risultante

$$\vec{M}_P(Q, \vec{v}) = \vec{PQ} \times \vec{v}$$

$$|\vec{M}_P| = |\vec{PQ}| v \sin \theta$$

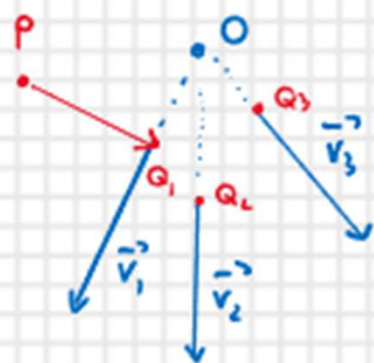


$$|\vec{M}_P| = b v$$

b : braccio è
perpendicolare al
vettore $\vec{v}$

Titolo:

Teorema di Varignon (spazio)

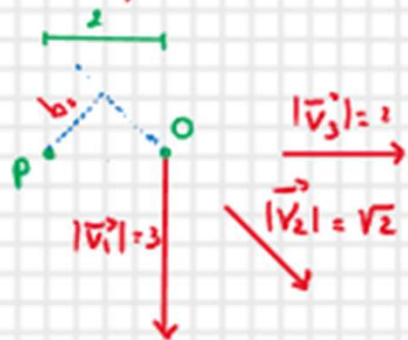


$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^m \vec{PQ}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^m \vec{PO} \times \vec{v}_i =$$

Traslo i vettori in O
non modifico $\vec{M}_P$

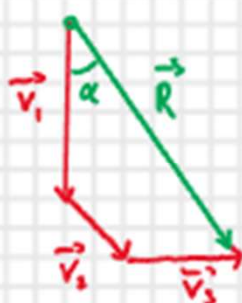
$$\vec{M}_P = \vec{PO} \times \sum_{i=1}^m \vec{v}_i = \vec{PO} \times \vec{R}$$

Esempio



$$|\vec{M}_P| = 3 \cdot 2 + 0 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

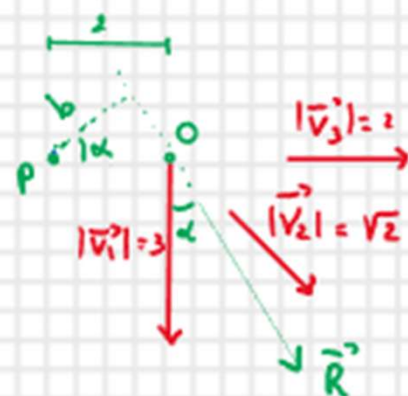
Col teo. Varignon



$$|R| = 5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$5 \cos \alpha = 4$$



$$b = 2 \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$M_P = b \cdot R = \frac{8}{5} \cdot 5 = 8$$

Equivalenza di sistemi di vettori

Σ e Σ' 2 sistemi di vettori

Condizioni affinché siano equivalenti

Titolo:

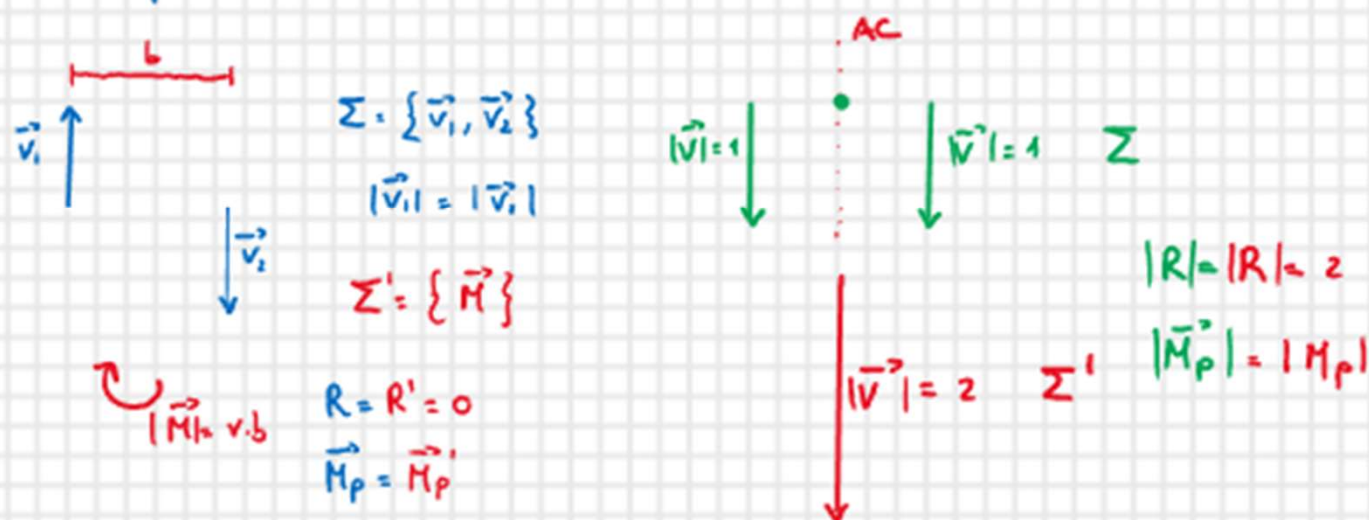
Equivalenza di sistemi di vettori

Σ e Σ' 2 sistemi di vettori

Condizioni affinché siano equivalenti

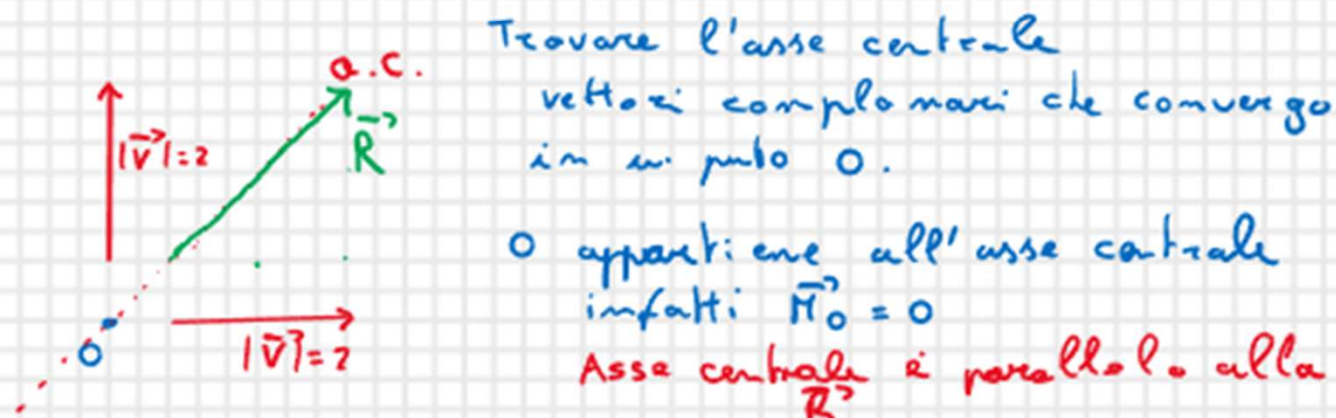
$$\vec{R} = \vec{R}' \quad \text{e} \quad \vec{M}_P = \vec{M}'_P \quad \forall P$$

Esempio



Ogni sistema di vettori con $\vec{R} \neq 0$ ammette una rappresentazione equivalente costituita dal solo vettore $\vec{R}$. La retta d'azione del vettore risultante si chiama **asse centrale**

Per un sistema di vettori piano, se esiste l'asse centrale il momento $\vec{M}_P$ rispetto ad un punto sull'asse centrale è nullo



Trovare l'asse centrale
vettori complanari che convergono
in un punto O .

O appartiene all'asse centrale
infatti $\vec{M}_O = 0$
Asse centrale è parallelo alla
 $\vec{R}$

Titolo:

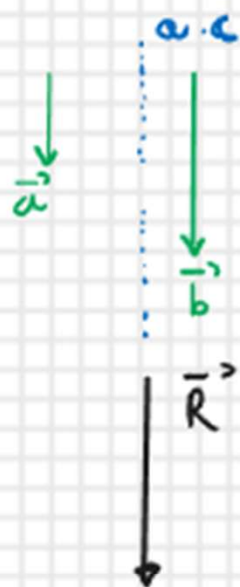
Sistema di 2 vettori // concordi

- Calcolare a.c., il sistema equivalente costituito dal vettore risultante $\vec{R}$



Introduco una
coppia con braccio
nullo

$$\Sigma \equiv \Sigma' \equiv \Sigma''$$



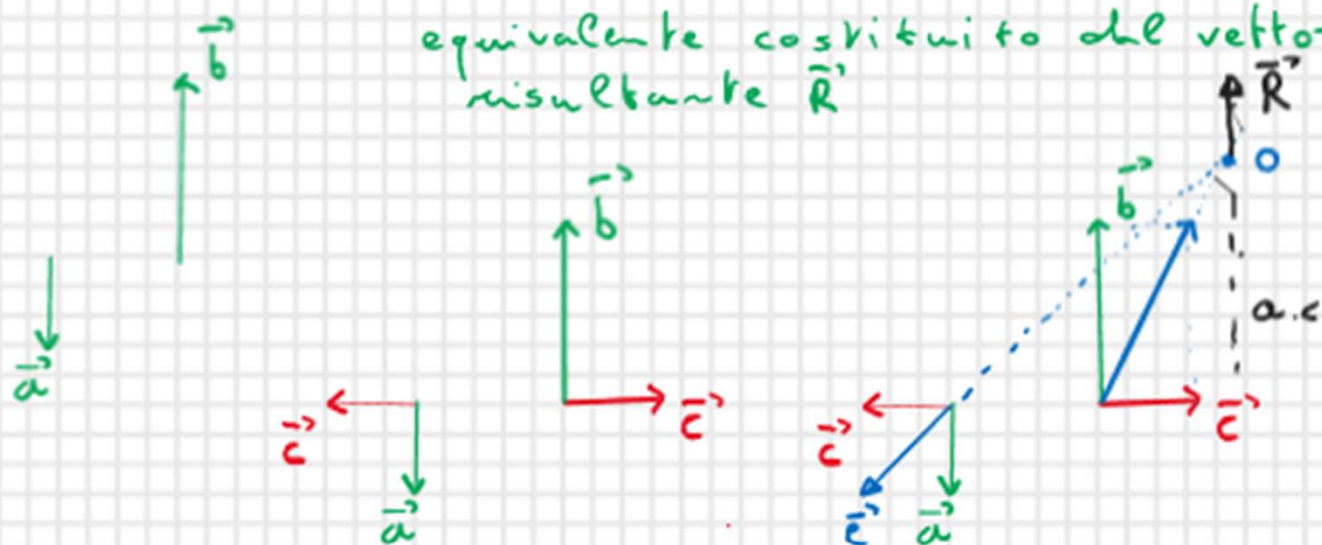
Sistema verde Σ e nero Σ'
sono equivalenti

Per sistemi di 2 vettori // concordi
l'asse centrale passa tra i
due vettori e risulta spostato
verso il vettore di intensità
maggiore (più vicino a $\vec{b}$)

Titolo:

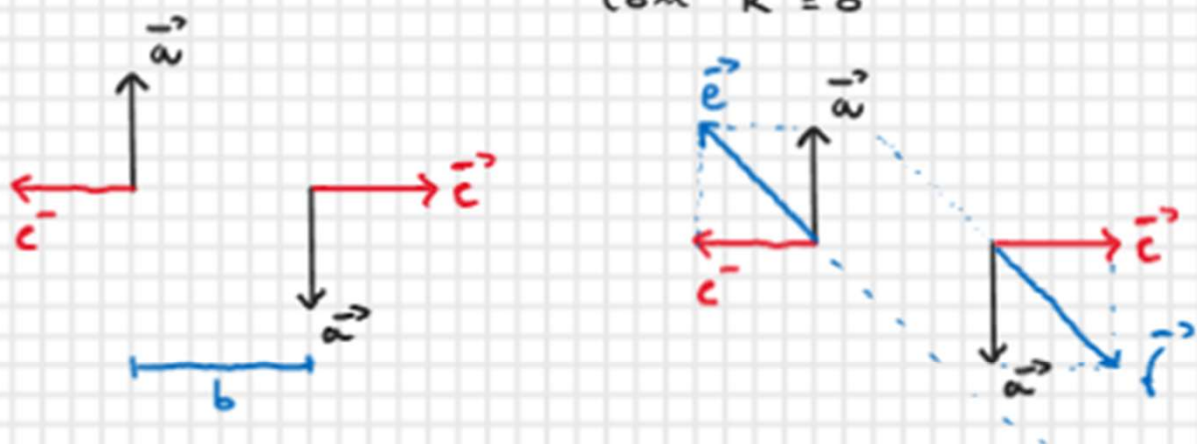
Sistema di 2 vettori // discordi

- Calcolare a.c., il sistema equivalente costituito dal vettore risultante $\vec{R}$



Per sistemi di 2 vettori discordi // l'asse centrale è esterno ai due vettori e risulta dal lato del vettore di intensità maggiore

Caso particolare - Vettori paralleli, discordi con $\vec{R} = 0$

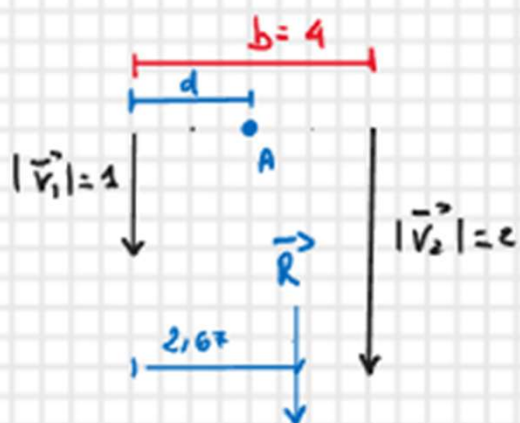


Rette sono parallele
Asse centrale non esiste

$$\vec{R} = 0$$
$$|\vec{M}_p| = a \cdot b \quad \forall p$$

Titolo:

Es.

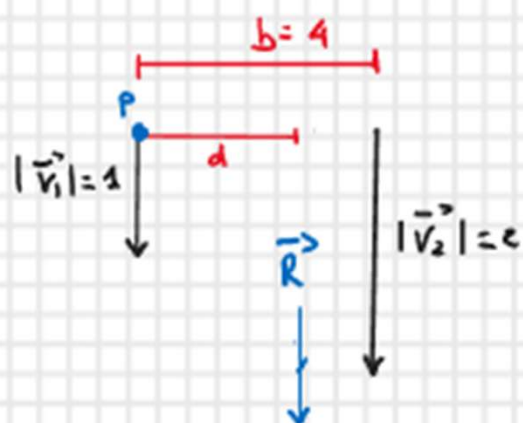


Cerchiamo un sistema equivalente costituito dal $\vec{R}$

Fissiamo A a piacere vogliamo conoscere d

$$+ \uparrow M_A = 0 \rightarrow -d \cdot 1 + 2(4-d) = 0 \rightarrow d = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

$$|\vec{R}| = 3$$



$$|\vec{R}| = 3$$

$$\Sigma = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$$

$$\Sigma' = \{\vec{R}\}$$

Fissiamo P a piacere

$$\vec{M}_P = \vec{M}'_P$$

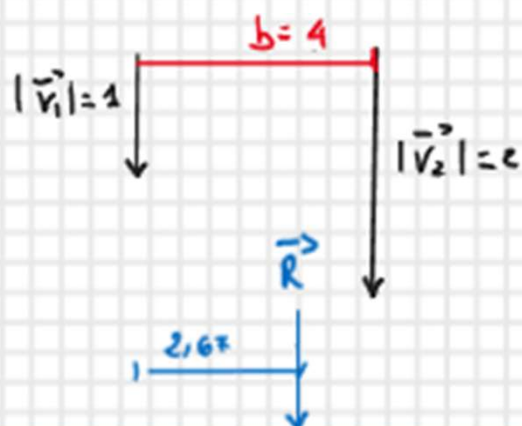
$$\Sigma$$

$$\Sigma'$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = d \cdot 3^R \rightarrow d = \frac{8}{3}$$

$$|\vec{M}_P|, \Sigma = |\vec{M}'_P|, \Sigma'$$

• Sistema risultante ed equilibrante

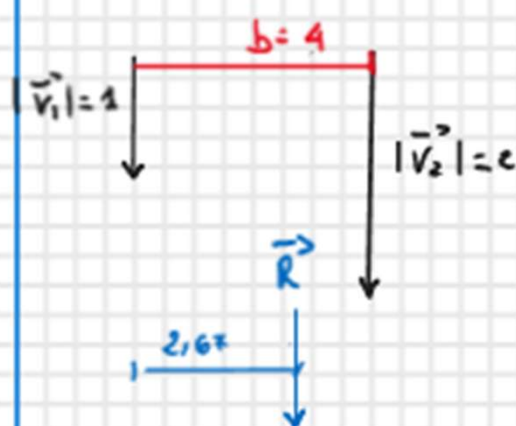


Σ sistema iniziale $\Sigma = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$

Σ' sistema risultante $\Sigma' = \{\vec{R}\}$

Titolo:

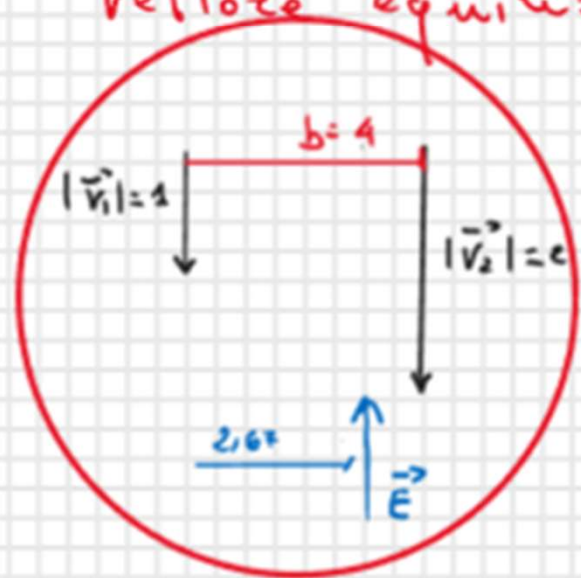
- Sistema risultante ed equilibrante



Σ sistema iniziale $\Sigma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Σ' sistema risultante $\Sigma' = \{\vec{R}\}$

Vettore equilibrante $\vec{E} = -\vec{R}$



Sistema risulta equilibrato

$$\Sigma'' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{E}\}$$

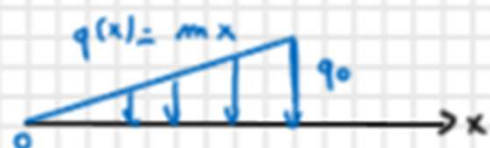
$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M}_P = 0$$

$\Sigma'' \quad \Sigma''$

- Carichi distribuiti lungo una retta



$$q(x) \left[\frac{N}{m} \right]$$

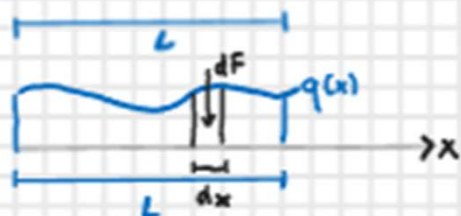


$$q(x) = mx$$

$$q(L) = q_0$$

$$\rightarrow q(L) = mL = q_0$$

$$m = q_0/L \quad q(x) = \frac{q_0}{L} x$$



$$dF = q(x) \cdot dx$$

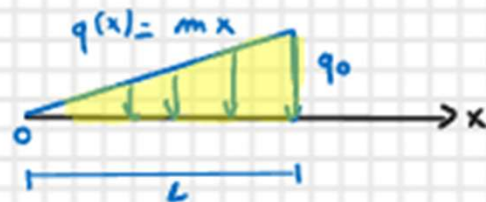
$$R = \int_0^L dF = \int_0^L q(x) dx$$

Titolo:



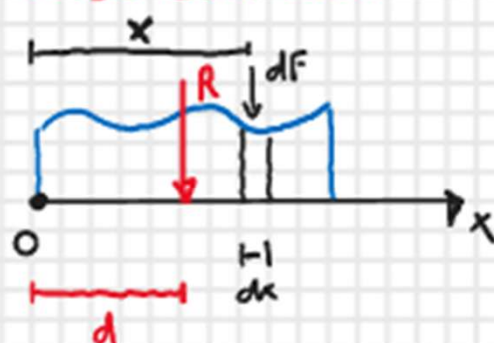
$$R = \int_0^L q_0 dx = q_0 L$$

Area



$$R = \int_0^L \frac{q_0}{L} x dx = \frac{q_0}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{q_0 L}{2}$$

Asse centrale



$$\Sigma = \{q(x)\}$$

$$\Sigma' = \{R\}$$

$$dF = q(x) dx$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O$$

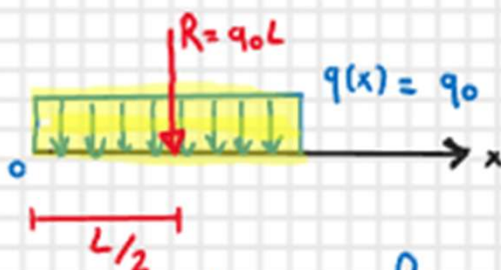
$$\Sigma \quad \Sigma'$$

$$\int_0^L x dF = d \cdot R = \int_0^L x q(x) dx$$

$$\Sigma \quad \Sigma$$

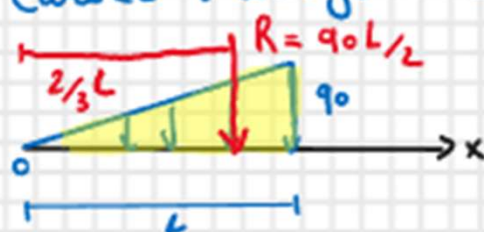
$$d = \frac{\int_0^L x q(x) dx}{R}$$

• Carico uniforme



$$d = \frac{\int_0^L x q_0 dx}{q_0 L} = \frac{q_0 \frac{L^2}{2}}{q_0 L} = \frac{L}{2}$$

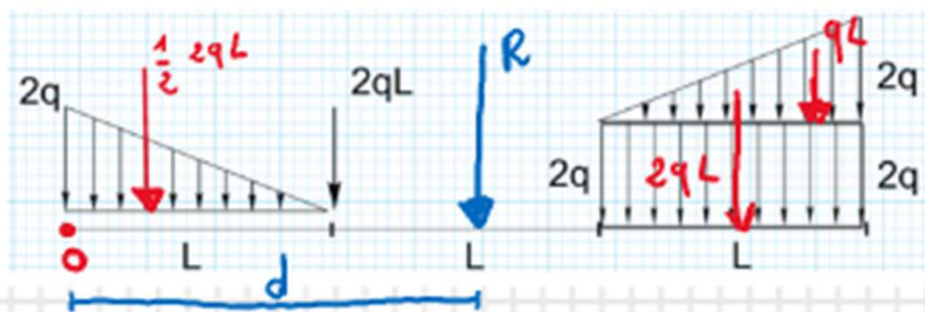
• Carico triangolare



$$d = \frac{\int_0^L x \left(\frac{q_0}{L} x\right) dx}{q_0 \frac{L}{2}} = \frac{\frac{q_0}{L} \frac{L^3}{3}}{q_0 \frac{L}{2}} = \frac{2}{3} L$$

Titolo:

Quesito n. 2 [5/15]. Determinare il vettore che rende il sistema in figura equilibrato.



$$R = qL + 2qL + 2qL + qL = 6qL$$

$$\vec{M}_O \equiv \vec{M}_O'$$

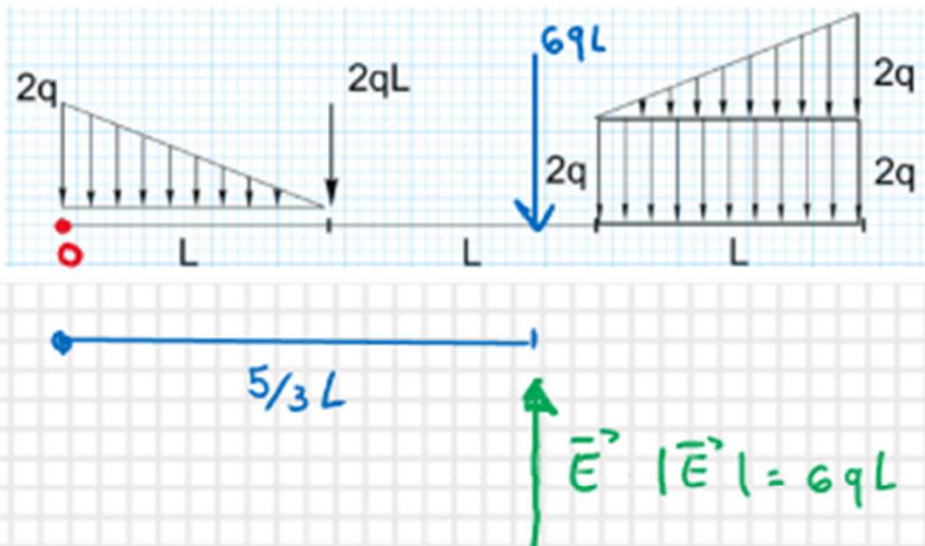
sistema
meno
iniziale sistema
risultante

d incognita

$$\circlearrowleft \quad qL \cdot \left(\frac{1}{3}L\right) + 2qL \cdot L + qL \cdot \frac{8}{3}L + 2qL \cdot \left(\frac{5}{2}L\right) = R \cdot d$$

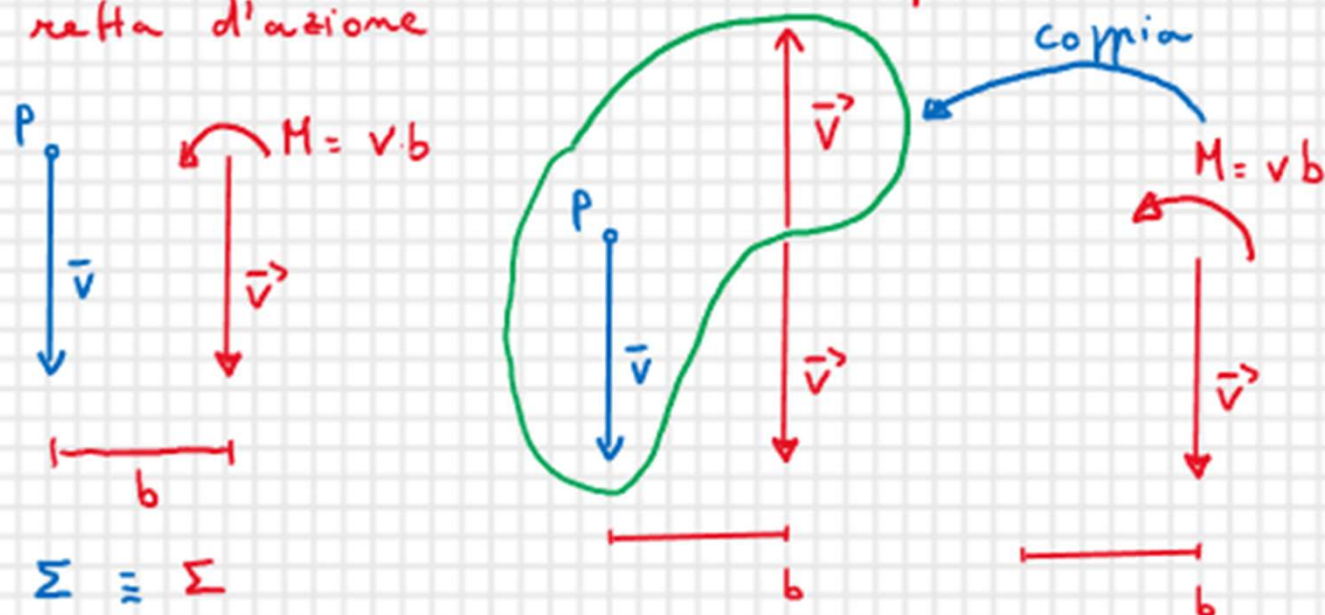
$$d = \frac{5}{3}L$$

Quesito n. 2 [5/15]. Determinare il vettore che rende il sistema in figura equilibrato.

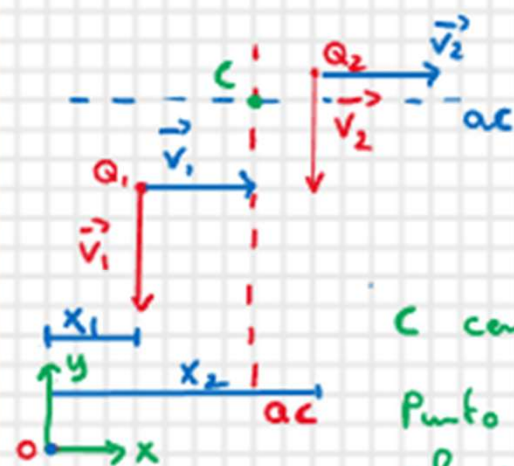


Titolo:

Traslazione di un vettore rispetto alla
retta d'azione



Centro di un sistema di vettori paralleli



Ruoto i vettori rossi
di 90° rispetto ai loro
punti d'applicazione

C centro del sistema

Punto intorno al quale ruota ac
al ruotare dei vettori intorno
ai punti di applicazione Q_i

$Q_i (x_i, y_i)$

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O$$

$\Sigma \quad \Sigma'$

$$v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 = R \cdot x_c \longrightarrow x_c = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{v_1 + v_2}$$

$$\Sigma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$$

$$x_c = \frac{\sum v_i x_i}{\sum v_i} \iff y_c = \frac{\sum v_i y_i}{\sum v_i}$$

$$\Sigma' = \{\vec{R}\}$$

Attenzione x_i e $y_i \geq 0$ $v_i > 0 \downarrow$

Titolo:

$$Q_1(1, 2)$$

$$|V_1| = 1$$

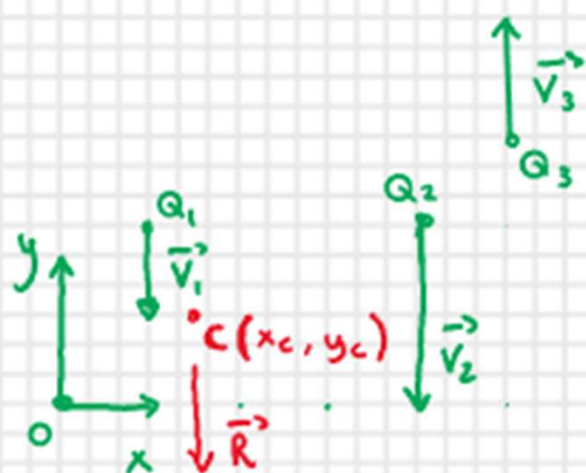
$$Q_2(4, 2)$$

$$|V_2| = 3$$

$$Q_3(5, 3)$$

$$|V_3| = 2$$

$$V_3 < 0$$



$$|R| = 2$$

< 0 min voltage in neto

$$x_c = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1 + 3 - 2} = \frac{3}{2}$$

$$y_c = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{1 + 3 - 2} = 1$$