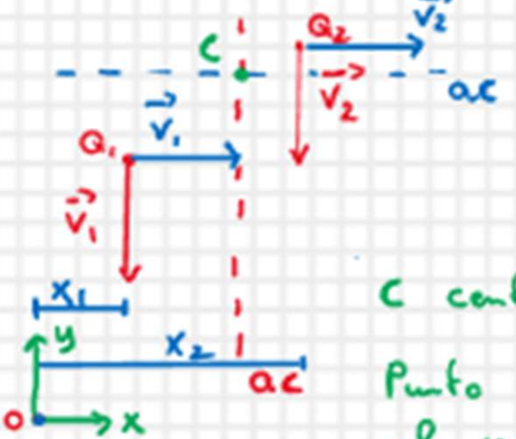
**Titolo:** Nota sulla lezione precedente, convenzioni per il calcolo di C

## Centro di un sistema di vettori paralleli




Ruoto i vettori rossi di 90° rispetto ai loro punti d'applicazione

C centro del sistema

Punto intorno al quale ruota ac al ruotare dei vettori intorno ai punti di applicazione $Q_i$

$Q_i\,(x_i, y_i)$

$\vec{M}_o = \vec{M}'_o$

$\Sigma \quad \Sigma'$

$v_1 \cdot x_1 + v_2 x_2 = R \cdot x_c \longrightarrow x_c = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{v_1 + v_2}$

$\Sigma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

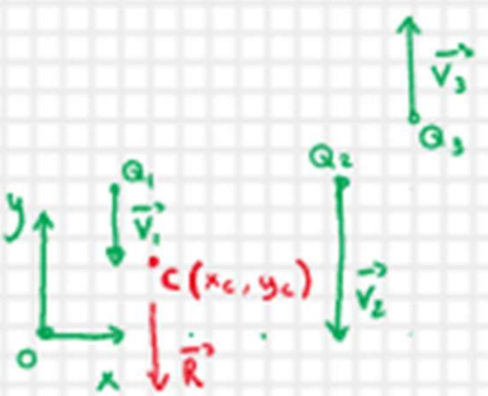
$\Sigma' = \{\vec{R}\}$

$x_c = \frac{\sum v_i x_i}{\sum v_i} \Longleftrightarrow y_c = \frac{\sum v_i y_i}{\sum v_i}$

Attenzione $x_i$ e $y_i \gtrless 0$ $\quad v_i > 0 \downarrow$

$Q_1\,(1, 2) \quad Q_2\,(4, 2) \quad Q_3\,(5, 3)$

$|V_1| = 1 \quad |V_2| = 3 \quad |V_3| = 2 \quad V_3 < 0$




$|R| = 2$

<0 rivolto in alto

$x_c = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1 + 3 - 2} = 3/2$

$y_c = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{1 + 3 - 2} = 1$

**Titolo:**

$Q_1(1,2)$ $\quad Q_2(4,2)$ $\quad Q_3(5,3)$

$|V_1| = 1$ $\quad |V_2| = 3$ $\quad |V_3| = 2$ $\qquad V_3 < 0$


$|R| = 2$

<0 rivolto in alto

$$x_c = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 4 - 2\cdot 5}{1+3-2} = 3/2$$

$$y_c = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 - 2\cdot 3}{1+3-2} = 1$$

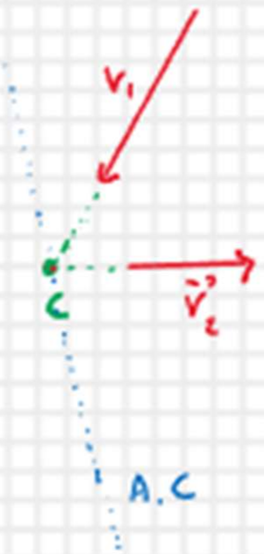
asse x

$$+\circlearrowleft) \quad 1\cdot 1 + 3\cdot 2 - 2\cdot 5 = \underset{\equiv}{\overset{d}{}} x_c \cdot 2 \qquad x_c = 3/2$$

asse y

$$+\circlearrowleft) \quad 2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = \overset{d_y}{\underset{\shortparallel}{}} y_c \cdot 2 \qquad y_c = 1$$

$\boxed{\bullet \text{ Statica grafica}}$




2 vettori $R \neq 0$

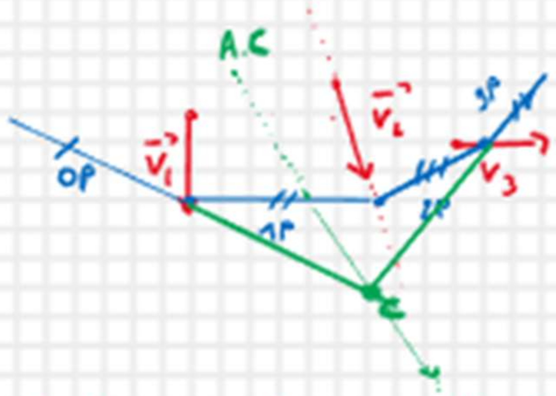
C punto di A.C.

A.C // $\vec{R}$

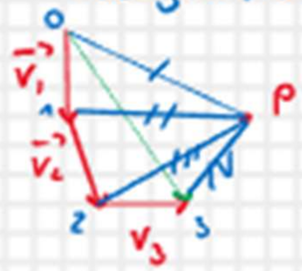
Poligono delle forze

**Titolo:**

Poligono funicolare dei carichi



Poligono delle forze



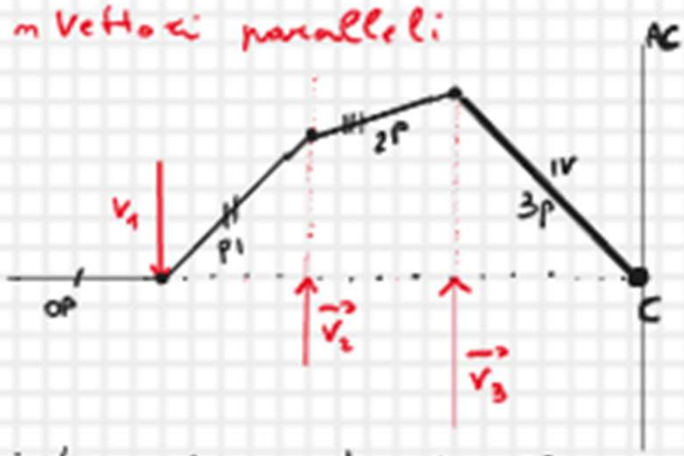
$\vec{R} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$

$\vec{R} = \vec{OP} + \vec{P3}$

Prolungo il 1° e l'ultimo lato del poligono, intersezione sarà un punto dell'asse centrale C

Si fissa un polo P a piacere

Es n vettori paralleli

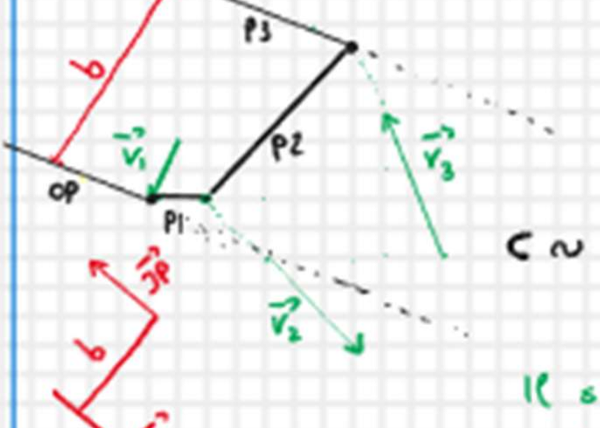


1) Poligono delle forze

$\vec{R} = \vec{O3} \Rightarrow |R| = 4$

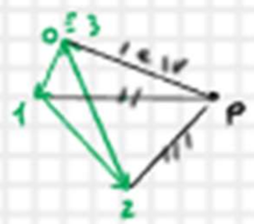
C intersezione di OP e 3P nel poligono funicolare

Caso $\vec{R} = \vec{0}$



C ∞

Poligono forze chiuso $\Rightarrow \vec{R} = 0$



Il primo e l'ultimo lato del poligono sono paralleli: OP ∥ 3P

Il sistema si riconduce ad una coppia $OP \cdot b = |M_P| \rightarrow |R| = 0$

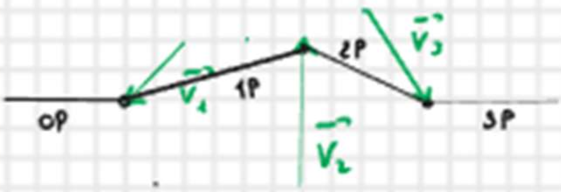
# Titolo:

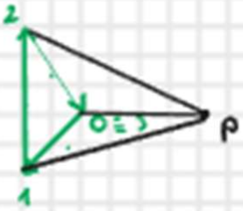
Caso $\vec{R}=\vec{0}$ e $\vec{M}_R=\vec{0}$

1) Poligono forze

$\Downarrow$

chiuso $\vec{R}=0$

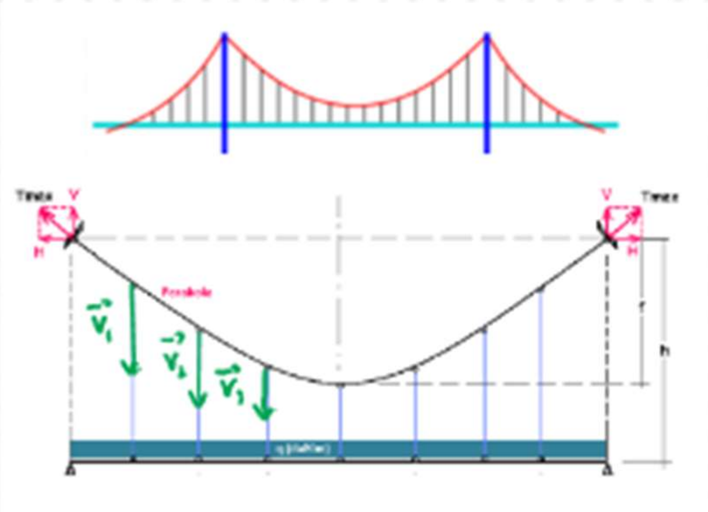


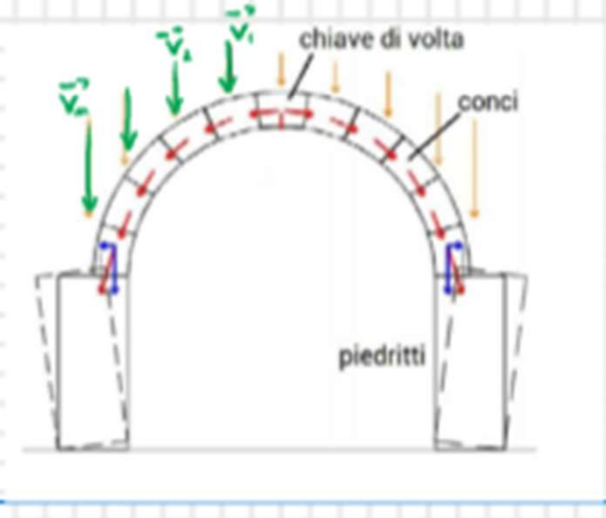

Primo e ultimo lato paralleli coincidenti

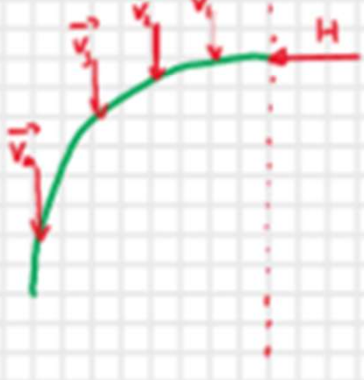
b=0 => $\vec{M}=\vec{0}$

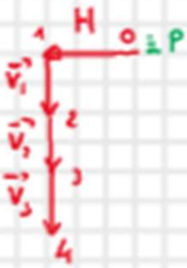
Sistema equilibrato $\vec{R}=\vec{0}$, $\vec{M}_A=\vec{0}$



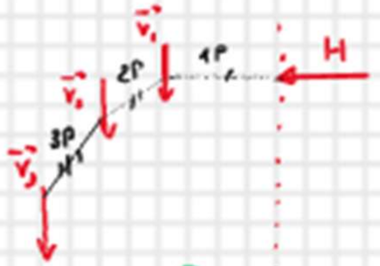

Poligono delle successive risultanti



# Titolo:





Il punto P coincide con la coda del 1° vettore O ≡ P

Marca il primo lato del poligono funicolare

$\vec{H} = \vec{P1}$

$\vec{H} + \vec{V_1} = \vec{P2}$

$\vec{H} + \vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{P3}$

.

.

$\vec{H} + \vec{V_1} + \dots + \vec{V_n} = \vec{Pn}$

=> successione di risultanti

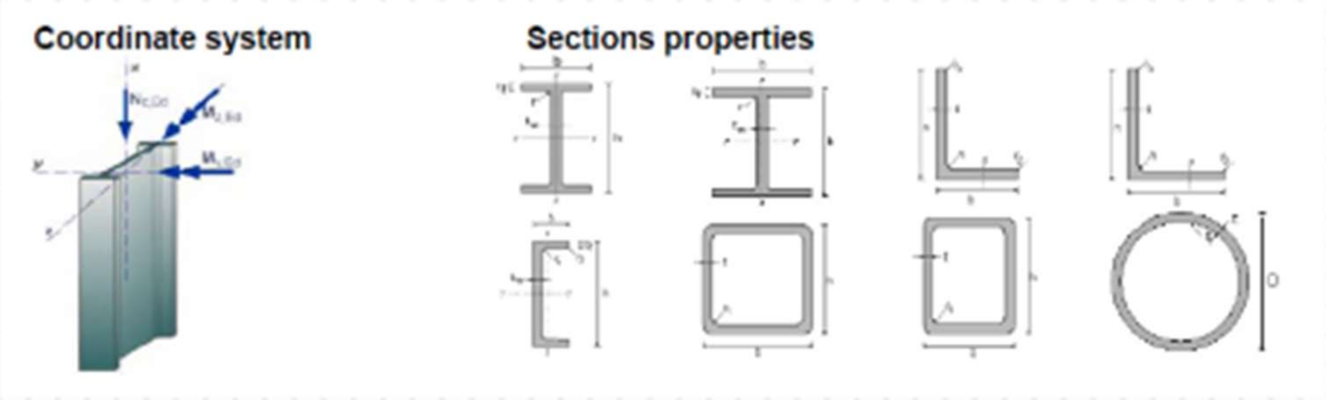
Ciascun lato del poligono delle risultanti corrisponde alla risul di tutte le forze che precedono il lato

Nel caso degli archi

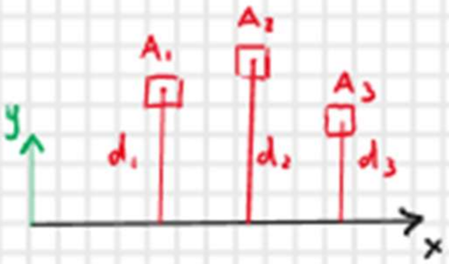
poligono risultanti ≡ curva delle pressioni

# Titolo:

• Geometria delle masse



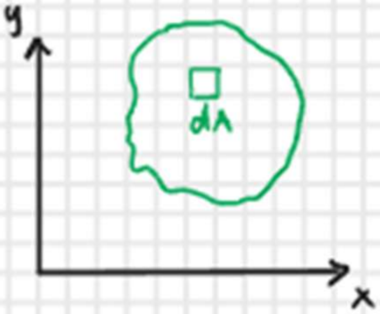

## Momento statico (1° ordine)




$S_x = A_1 d_1 + A_2 d_2 + \dots + A_n d_n$ rispetto alla retta x

$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i \qquad y_i \equiv d_i$

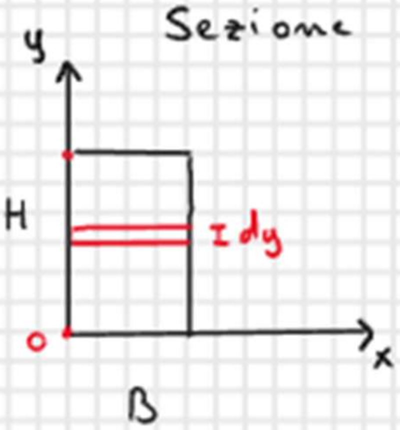
$S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$




$S_x = \int_A y \, dA \qquad S_y = \int_A x \, dA$

Può essere $\gtrless 0$

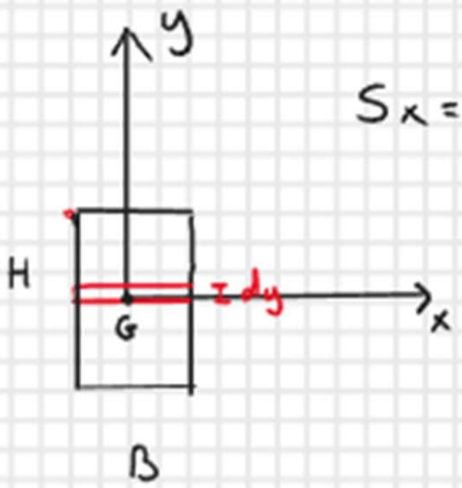
Sezione rettangolare




$$\left. \begin{array}{l} S_x = \int_A y \, dA \\ dA = B\,dy \end{array} \right\} \quad S_x = \int_0^H B y \, dy = B \frac{y^2}{2} \Big|_0^H = \frac{BH^2}{2}$$

$S_y = \frac{HB^2}{2} \qquad [m^3]$

## Titolo:



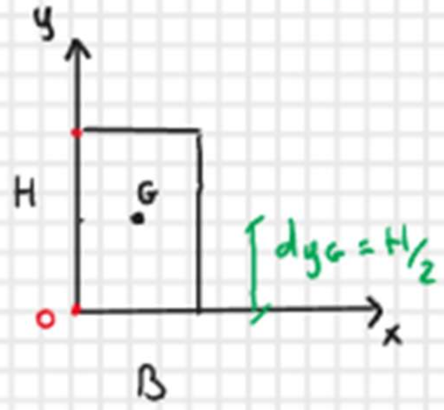

$$S_x = \int_A y\, dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} B y\, dy = B \frac{y^2}{2} \Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = 0$$

Il momento statico rispetto ad una retta passante per il baricentro G è nullo

Teorema di Varignon

Il momento statico è pari al prodotto dell' area per la distanza dal suo baricentro

$$S_x = A \cdot d_{yG} \quad *$$




$$S_x = \underbrace{B \cdot H}_{A} \cdot \underbrace{\frac{H}{2}}_{d_{yG}} = \frac{BH^2}{2}$$

Per il calcolo del baricentro

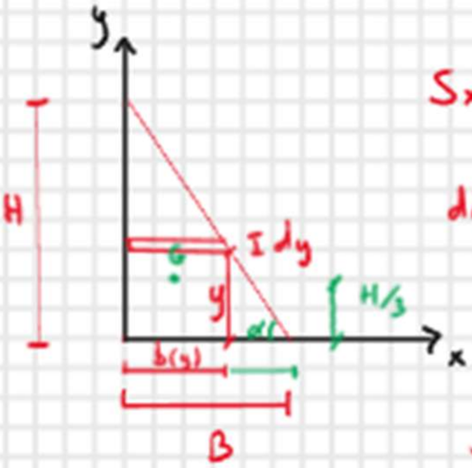
$$* \quad y_G = \frac{S_x}{A} \longrightarrow x_G = \frac{S_y}{A}$$

Centro di un sistema di vettori

$$y_C = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} \Rightarrow y_G = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

## Titolo:

Sezione triangolare




$$S_x = \int_A y\,dA$$

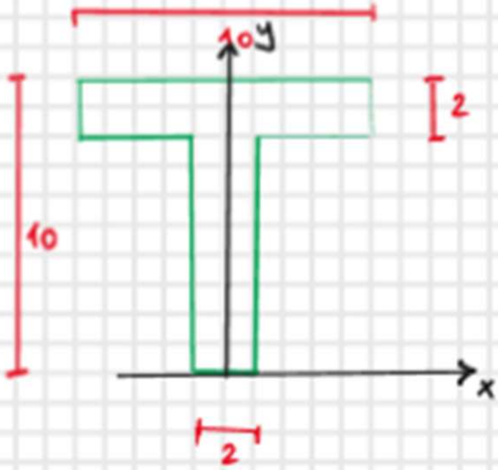
$$dA = b(y)\,dy = \underbrace{\left(B - \frac{y}{tg\alpha}\right)}_{b(y)}\cdot dy = \left(B - y\frac{B}{H}\right)dy$$

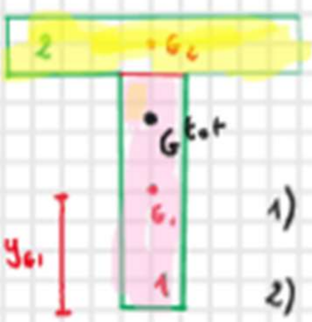
$$tg\alpha = \frac{H}{B}$$

$$S_x = \int_0^H \left(B - y\frac{B}{H}\right) y\,dy = \frac{By^2}{2} - \frac{By^3}{3H}\Big|_0^H = \frac{BH^2}{6}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{BH^2/6}{BH/2} = \frac{H}{3} \qquad x_G = \frac{B}{3}$$

Sezione




Calcolare coordinate del baricentro

| | $A_i$ | $y_{Gi}$ | $S_{xi}$ |
|---|---|---|---|
| 1) | 16 | 4 | 64 |
| 2) | 20 | 9 | 180 |
| Tot | 36 | | 244 |

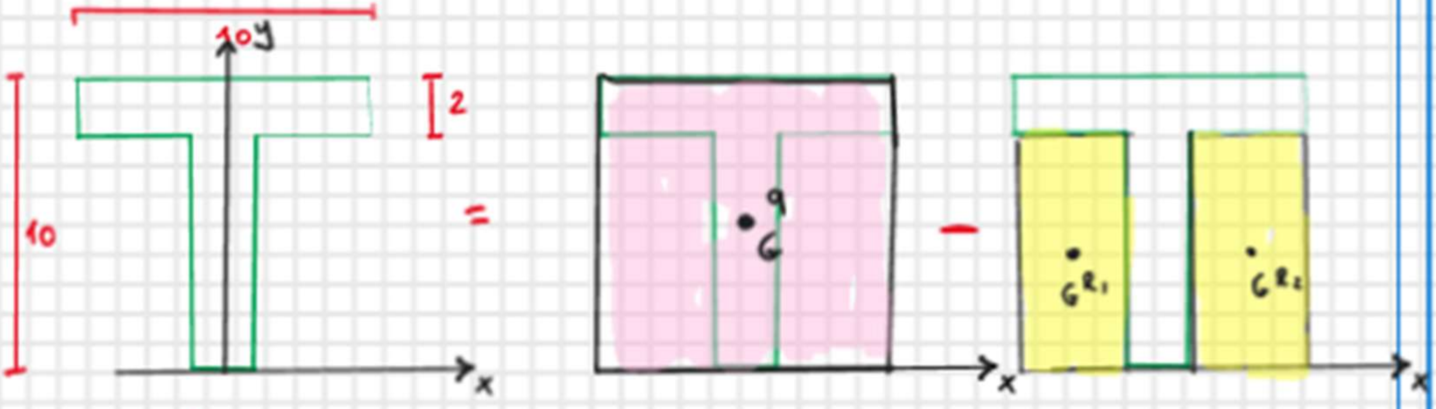
$S_x^{tot} = 244$ M. statico della figura intera (1+2) rispetto ad x

Calcolo baricentro $\quad y_G^{tot} = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = \frac{244}{36} = 6.77$

- Se la sezione ha un asse di simmetria il baricentro giace sull'asse

# Titolo:

## Sezione




Quadrato

$S_x^q = A^q \cdot y_G^q$

$S_x^q = 100 \cdot 5 = 500$

$A^q = 100$

Rettangoli

$S_x^R = 2 \cdot (4 \cdot 8) \cdot 4 = 256$

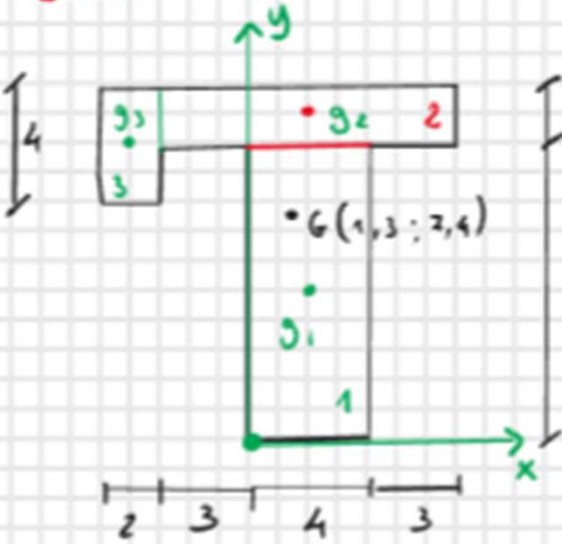
$A^R = 64$

$S_x^{tot} = S_x^q - S_x^R = 500 - 256 = 244$

$A^{tot} = A^q - A^R = 100 - 64 = 36$

$y_G^{tot} = \frac{244}{36} \simeq 6,77$

## Esercizio

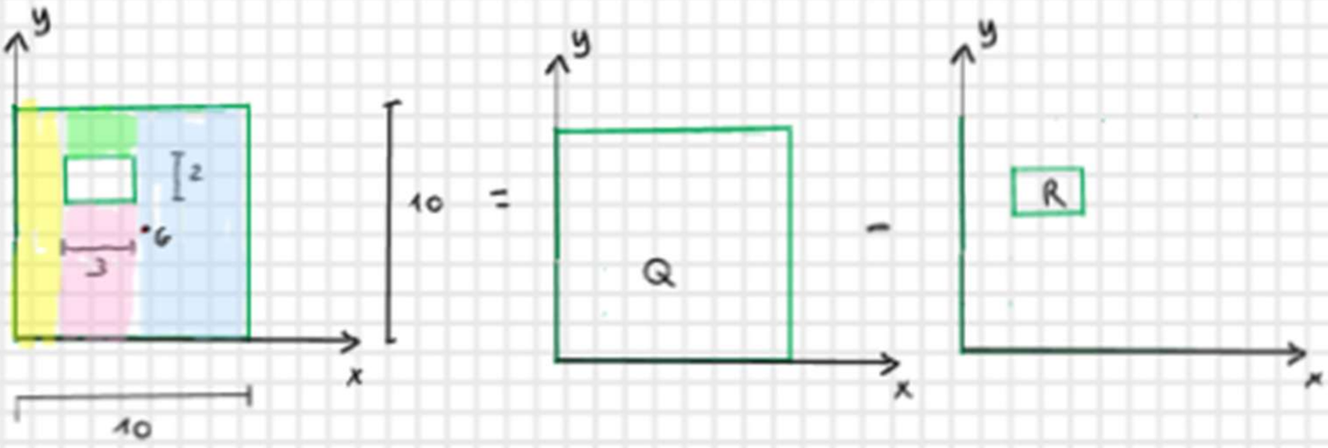



| | $A_i$ | $x_i$ | $S_{yi}$ | $y_i$ | $S_{xi}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 40 | 2 | 80 | 5 | 200 |
| 2) | 20 | 2 | 40 | 11 | 220 |
| 3) | 8 | -4 | -32 | 10 | 80 |
| | 68 | | 88 | | 500 |
| | $A_{tot}$ | | $S_y^{tot}$ | | $S_x^{tot}$ |

$x_G = \frac{S_y^{tot}}{A_{tot}} = 1,3$ $\qquad y_G = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = 7,4$

# Titolo:

Es



$$S_x^Q = 10 \times 10 \cdot 5 = 500 \qquad S_x^R = (2 \cdot 3) \cdot 7 = 42$$

$$S_y^Q = 10 \times 10 \cdot 5 = 500 \qquad S_y^R = (2 \cdot 3) \cdot 3{,}5 = 21$$

$$A^Q = 100 \qquad A^R = 6$$

$$S_x^{tot} = 500 - 42 = 458$$

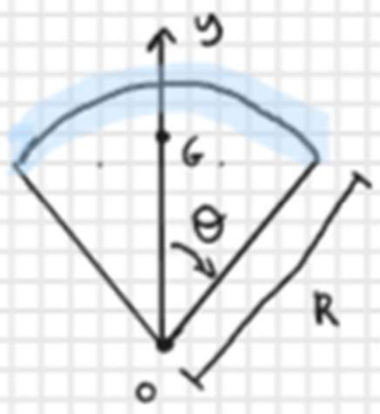
$$S_y^{tot} = 500 - 21 = 479$$

$$A^{tot} = 100 - 6 = 94$$

$$x_G = \frac{S_y^{tot}}{A_{tot}} = \frac{479}{94} \simeq 5{,}1$$

$$y_G = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = \frac{458}{94} \simeq 4{,}8$$

Baricentro arco circolare

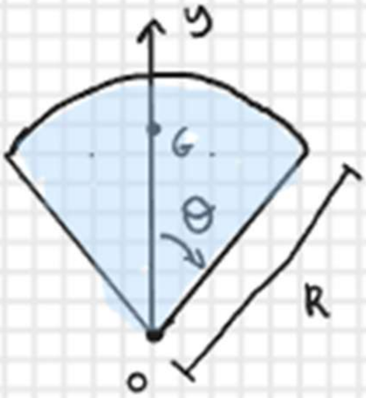


$$\overline{OG} = R \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{OG} = \frac{2R}{\pi} \simeq 0{,}633\,R$$

# Titolo:

Baricentro settore circolare




$$\overline{OG} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\theta}{\theta} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{OG} = \frac{2R}{\pi} \simeq 0,422R$$

## Momenti del 2° ordine

- Momenti d'inerzia (rispetto ad una retta)

$$I_{xx} = \int_A y^2\,dA \qquad I_{yy} = \int_A x^2\,dA \qquad [m^4]$$

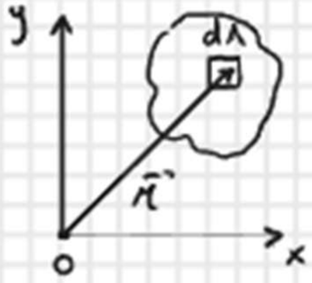
Momento d'inerzia positivo

- Momento centrifugo (rispetto a 2 rette)

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA$$

positivo, negativo e nullo

- Momento polare (rispetto ad un punto)




$$I_p = \int_A r^2\,dA = \int_A (x^2+y^2)\,dA = \int_A x^2\,dA + \int_A y^2\,dA$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad I_p = I_{xx} + I_{yy}$$