Titolo:

Momenti del 2° ordine

- Momenti d'inerzia (rispetto ad una retta)

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA \qquad I_{yy} = \int_A x^2 \, dA \qquad [m^4]$$

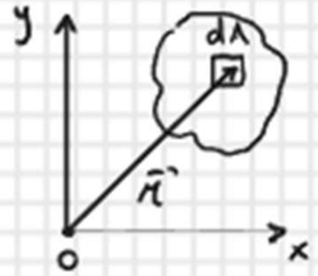
Momento d'inerzia positivo

- Momento centrifugo (rispetto a 2 rette)

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

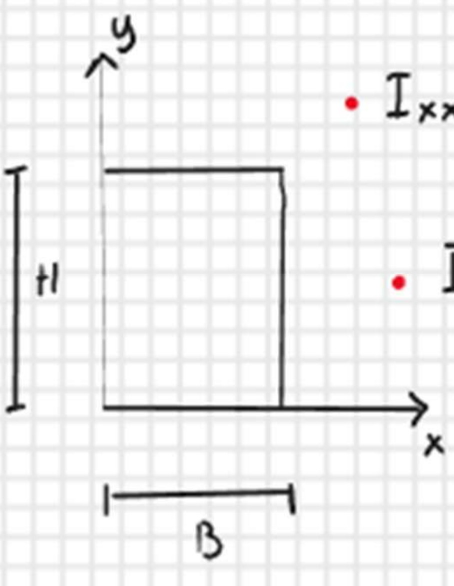
positivo, negativo e nullo

- Momento polare (rispetto ad un punto)



$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad I_p = I_{xx} + I_{yy}$$

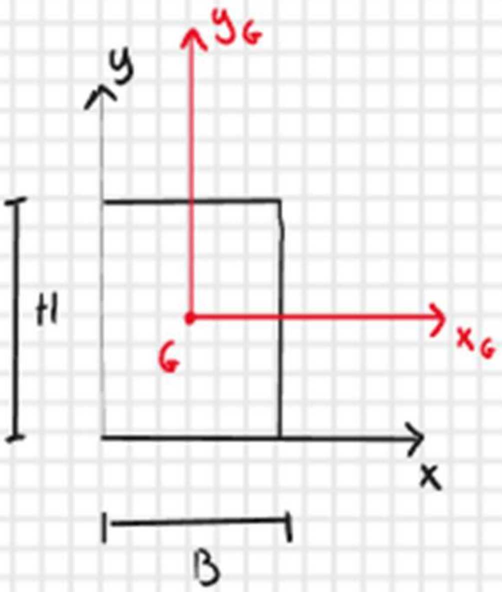


- $I_{xx} = \int_A y^2 \, dA = \int_0^H y^2 B \, dy = B \frac{y^3}{3} \Big|_0^H = \frac{BH^3}{3}$

- $I_{yy} = \frac{HB^3}{3}$

- $I_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_0^B x \left(\int_0^H y \, dy \right) dx = \int_0^B x \frac{H^2}{2} \, dx = \frac{B^2 H^2}{4}$

Titolo:



$$I_{xx}^G = \int_A y^2 \, dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2 B \, dy =$$

$$= B \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$

- $I_{xx}^G = \dfrac{BH^3}{12}$

- $I_{yy}^G = \int_A x^2 \, dA \Rightarrow I_{yy}^G = \dfrac{HB^3}{12}$

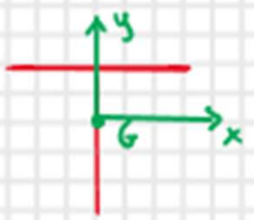
$$I_{xy}^G = \int_A xy \, dA = \int_{-B/2}^{B/2} x \underbrace{\left(\int_{-H/2}^{H/2} y \, dy \right)}_{S_x = \int y \, dA^{*}} dx = 0$$

$$\int_{-H/2}^{H/2} y \, dy = 0$$

Momento statico rispetto ad un asse baricentrico è nullo

$$* \int_{-H/2}^{H/2} y \, dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-H/2}^{H/2} = 0$$

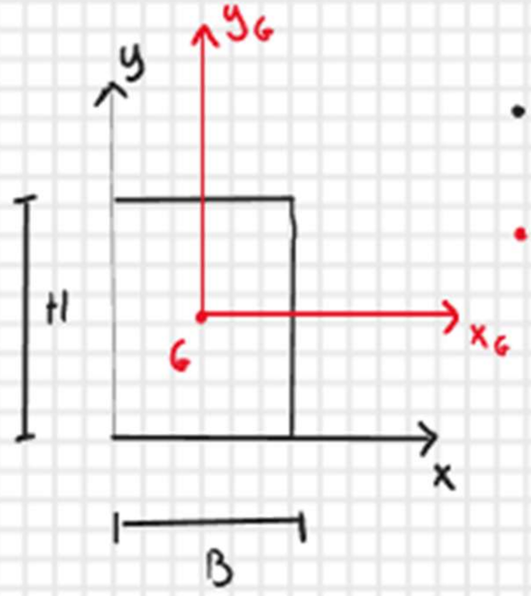
Per sezioni con asse di simmetria il momento centrifugo baricentrico $I_{xy}^G = 0$



$I_{xy}^G = 0$

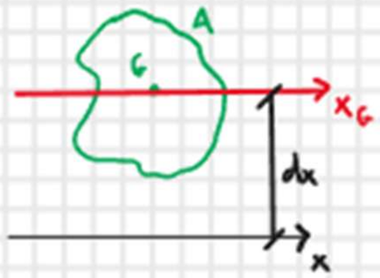
Basta che una delle due rette sia un asse di simmetria

Titolo:



- $I_{xx} = \frac{BH^3}{3} \quad I_{yy} = \frac{HB^3}{3} \quad I_{xy} = \frac{B^2H^2}{4}$
- $I_{xx}^G = \frac{BH^3}{12} \quad I_{yy}^G = \frac{HB^3}{12} \quad I_{xy}^G = 0$

Teorema di trasposizione (Huygens-Steiner)

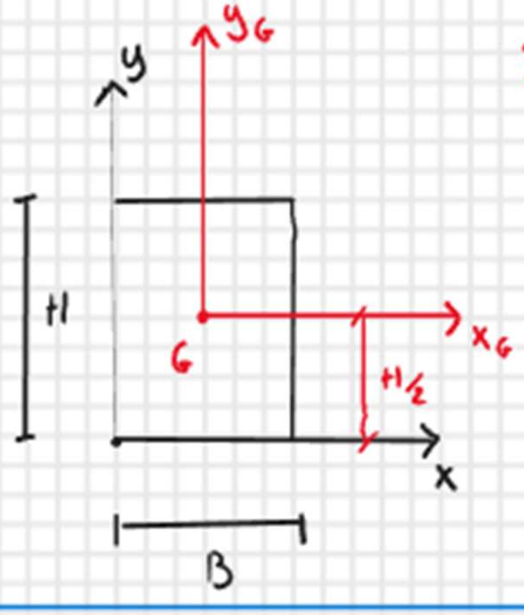


$I_{xx}^G \Rightarrow$ Noto

$I_{xx} = I_{xx}^G + A \cdot d_x^2$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ I_{xx} = I_{xx}^G + A\, d_x^2 \\ &\cdot\ I_{yy} = I_{yy}^G + A\, d_y^2 \\ &\cdot\ I_{xy} = I_{xy}^G + A\, d_x\, d_y \end{aligned}\right\} \ast\ast$$

Verifica sul rettangolo



$I_{xx}^G = \frac{BH^3}{12} \quad I_{yy}^G = \frac{HB^3}{12} \quad I_{xy}^G = 0$

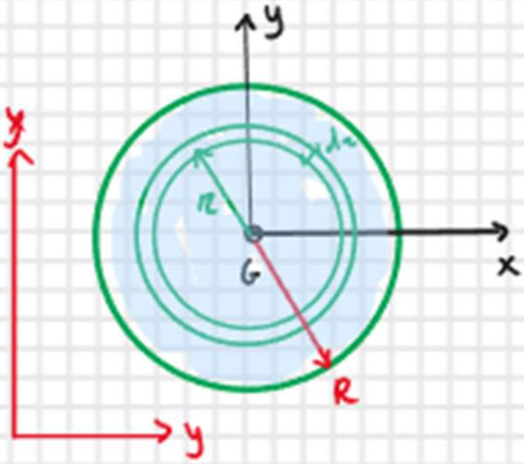
Applico le $\ast\ast$

$$I_{xx} = \underbrace{\frac{BH^3}{12} + (BH) \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2}_{I_{xx}^G + A \cdot d_x^2} = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{xy} = 0 + (BH)\left(\frac{H}{2}\right)\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{B^2H^2}{4}$$

Titolo:

Momento d'inerzia per una sezione circolare



$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R r^2 \, 2\pi r \, dr =$$

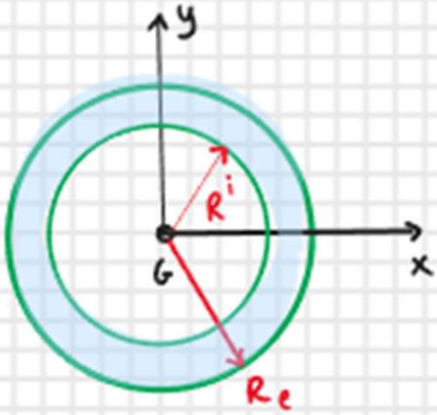
$$= 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = I_p$$

$$I_p = I_{xx} + I_{yy} \xrightarrow[\text{cerchio } I_{xx} = I_{yy}]{} I_p = 2 I_{xx}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_p/2 = \frac{\pi R^4}{4}$$

$I_{xy} = 0$ nullo $\quad I_{xy} \neq 0$

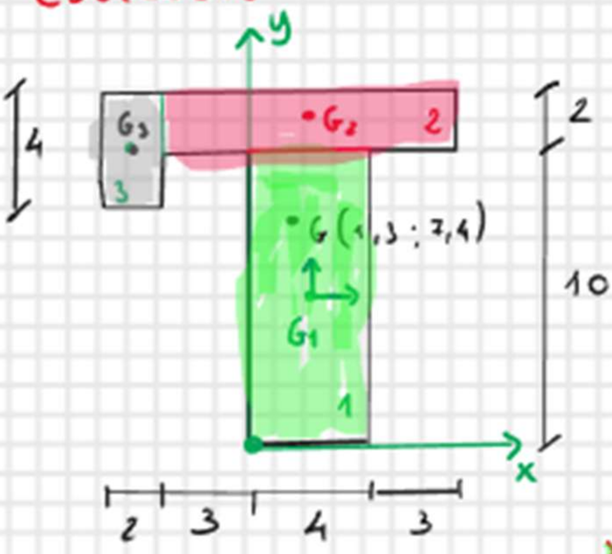
Momento d'inerzia corona circolare



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{4} R_e^4 - \frac{\pi}{4} R_i^4 = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$$

Titolo:

Esercizio



	A_i	x_i	S_{yi}	y_i	S_{xi}
1)	40	2	80	5	200
2)	20	2	40	11	220
3)	8	-4	-32	10	80
	68		88		500
	A_{tot}		S_y^{tot}		S_x^{tot}

$x_G = \frac{S_y^{tot}}{A_{tot}} = 1,3$ $\qquad y_G = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = 7,4$

- Momenti d'inerzia baricentrici dei singoli rettangoli

Rettangolo 1 G_1

$I_{xx}^{G_1} = \frac{BH^3}{12} = \frac{4\cdot 10^3}{12} = 333 \qquad I_{yy}^{G_1} = \frac{HB^3}{12} = \frac{10\cdot 4^3}{12} = 53,3 \qquad I_{xy}^{G_1} = 0$

Rettangolo 2 G_2

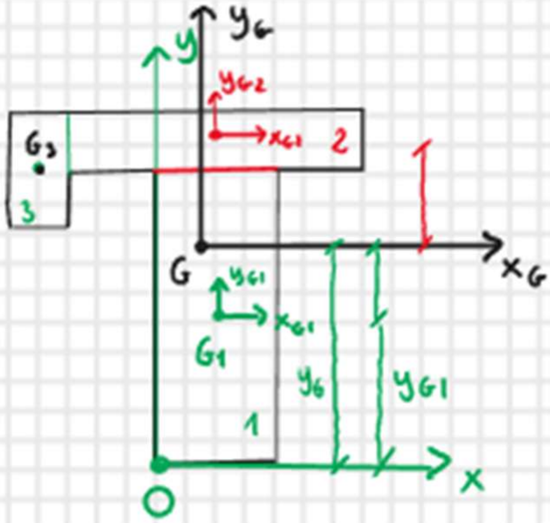
$I_{xx}^{G_2} = \frac{10\cdot 2^3}{12} = 6,6 \qquad I_{yy}^{G_2} = \frac{2\cdot 10^3}{12} = 166,6 \qquad I_{xy}^{G_2} = 0$

Rettangolo 3 G_3

$I_{xx}^{G_3} = \frac{2\cdot 4^3}{12} = 10,6 \qquad I_{yy}^{G_3} = \frac{4\cdot 2^3}{12} = 2,66 \qquad I_{xy}^{G_3} = 0$

- Momenti d'inerzia dell'intera figura rispetto a $G(x_G, y_G) \longrightarrow G(1,3 ; 7,4)$

Titolo:



Usiamo :

- $I_{xx} = I_{xx}^G + A\,d_x^2$
- $I_{yy} = I_{yy}^G + A\,d_y^2$
- $I_{xy} = I_{xy}^G + A\,d_x\,d_y$

1) $I_{xx}^{Gtot} = I_{xx}^{G_1} + A_1(y_{G1}-y_G)^2 + I_{xx}^{G2} + A_2(y_{G2}-y_G)^2 + I_{xx}^{G3} + A_3(y_{G3}-y_G)^2$

$I_{xx}^{Gtot} = 333 + 40(5-7{,}4)^2 + 6.6 + 20(11-7{,}4)^2 + 10{,}6 + 8\cdot(10-7{,}4)^2 = 894{,}15$

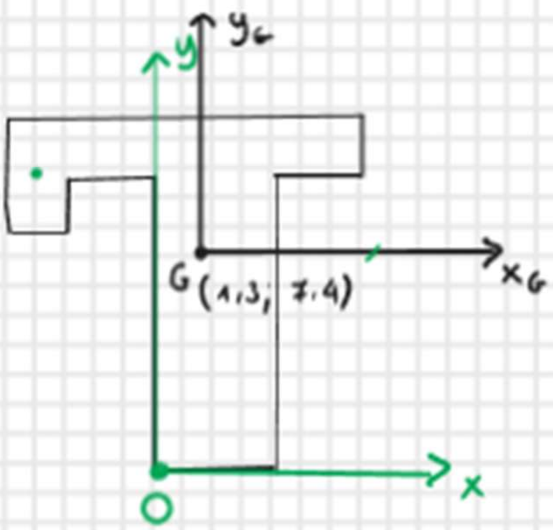
2) $I_{yy}^{Gtot} = I_{yy}^{G_1} + A_1(x_{G1}-x_G)^2 + I_{yy}^{G2} + A_2(x_{G2}-x_G)^2 + I_{yy}^{G3} + A_3(x_{G3}-x_G)^2$

$I_{yy}^{Gtot} = 476{,}62$

3) $I_{xy}^{Gtot} = \underbrace{I_{xy}^{G1}}_{=0} + A_1(x_{G1}-x_G)(y_{G1}-y_G) + \underbrace{I_{xy}^{G2}}_{=0} + A_2(x_{G2}-x_G)(y_{G1}-y_G) + \underbrace{I_{xy}^{G3}}_{=0} + A_3(x_{G3}-x_G)(y_{G3}-y_G)$

$I_{xy}^{Gtot} = 0 + 40(2-1{,}3)(5-7{,}4) + 0 + 20(2-1{,}3)(11-7{,}4) + 0 + 8(-4-1{,}3)(10-7{,}4)$

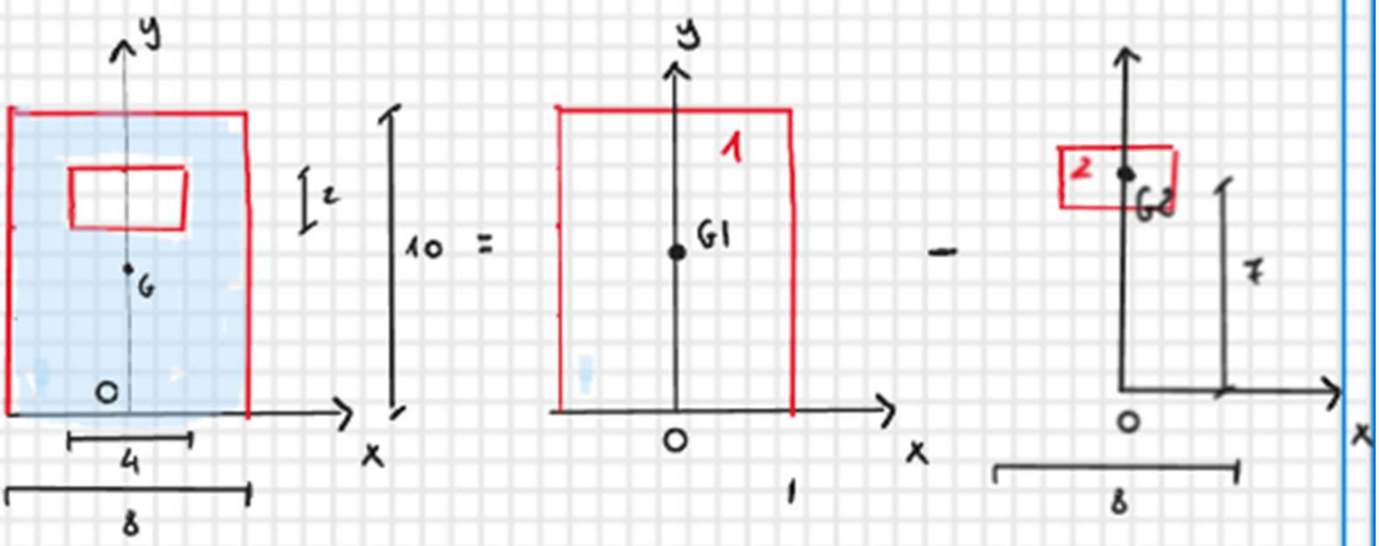
$I_{xy}^{Gtot} = -127{,}6$



$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx}^G &= 894{,}15 \\ I_{yy}^G &= 476{,}62 \\ I_{xy}^G &= -127{,}6 \end{aligned}}$$

Titolo:

Esempio sezione cava



$$S_x^{TOT} = \underbrace{(8 \times 10) \cdot 5}_{S_x^1} - \underbrace{(2 \times 4) \cdot 7}_{S_x^2} = 344 \qquad A^{tot} = 80 - 8 = 72$$

$$x_G = 0 \qquad y_G = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = \frac{344}{72} = 4,77$$

$$G(0; 4,77)$$

$$I_{xx}^{G1} = \frac{8 \cdot 10^3}{12} = 666,6$$

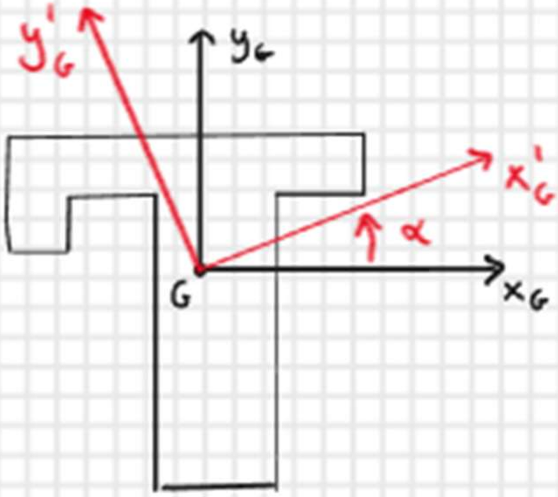
$$I_{xx}^{G2} = \frac{4 \cdot 2^3}{13} = 2,66$$

$$I_{xx}^{Gtot} = \underbrace{I_{xx}^{G1} + A_1 (y_{G1} - y_G)^2}_{1} - \underbrace{\left(I_{xx}^{G2} + A_2 (y_{G2} - y_G)^2 \right)}_{2} = 627,8$$

$$I_{xy}^{Gtot} = 0 \qquad I_{yy}^{Gtot} = ? = I_{yy}^{G1} - I_{yy}^{G2}$$

Titolo:

Assi principali d'inerzia



I valori con l'apice ' sono quelli nel riferimento ruotato

$\alpha = 0°$	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 20°$
$I_{xx}^G = 894,15$	$I_{xx}^{G'} = 913$	925	927
$I_{yy}^G = 476,62$	$I_{yy}^{G'} = 457$	445	443
$I_{xy}^G = -127,6$	$I_{xy}^{G'} = -89$	$-42,5$	36

- Assi principali d'inerzia

$\alpha = 15,72°$

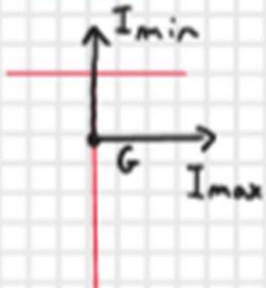
$I_{xx}^{G'} = I_{max} = 936$

$I_{yy}^{G'} = I_{min} = 440$

$I_{xy}^{G'} = \emptyset$

In corrispondenza dell'angolo per il quale si annulla il momento centrifugo $I_{xy}^{G'} = 0$, i momenti assiali $I_{xx}^{G'}$ e $I_{yy}^{G'}$ assumono uno il valore massimo I_{max} e l'altro il valore minimo I_{min} (Assi principali)

Se avessimo sezione simmetrica



Momento centrifugo è nullo $I_{xy}^G = 0$

$\left.\begin{array}{l} I_{xx}^G = I_{max} \\ I_{yy}^G = I_{min} \end{array}\right\}$ Assi principali d'inerzia

Titolo:

Momenti d'inerzia al variare dell'angolo alpha

- $I_{xx}^{G'} = \frac{I_{xx}^{G} + I_{yy}^{G}}{2} + \frac{I_{xx}^{G} - I_{yy}^{G}}{2} \cdot \cos(2\alpha) - I_{xy}^{G} \, \text{sen}(2\alpha)$
- $I_{yy}^{G'} = \frac{I_{xx}^{G} + I_{yy}^{G}}{2} - \frac{I_{xx}^{G} - I_{yy}^{G}}{2} \cdot \cos(2\alpha) + I_{xy}^{G} \, \text{sen}(2\alpha)$
- $I_{xy}^{G'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \, \text{sim}(2\alpha) + I_{xy}^{G} \cos(2\alpha)$

Angolo del quale devo ruotare il sistema di riferimento iniziale affinchè sia principale, per tale angolo Ixy=0

- $\alpha = \frac{1}{2} \, \text{arctg}\left(- \frac{2 I_{xy}^{G}}{I_{xx}^{G} - I_{yy}^{G}} \right)$

Momenti d'inerzia massimo e minimo in corrispondenza dell'angolo per il quale Ixy=0

- $I_{max} = \frac{I_{xx}^{G} + I_{yy}^{G}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{xx}^{G} - I_{yy}^{G})^2 + 4 {I_{xy}^{G}}^2}$
- $I_{min} = \frac{I_{xx}^{G} + I_{yy}^{G}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{xx}^{G} - I_{yy}^{G})^2 + 4 {I_{xy}^{G}}^2}$

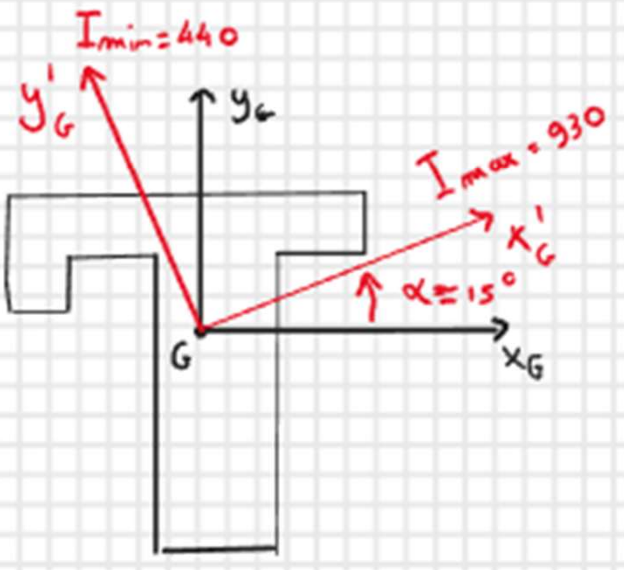
Associare gli assi ruotati (con apice ') con I_{max} e I_{min}

$I_{xx}^{G} > I_{yy}^{G} \quad I_{xx}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{max} \quad e \quad I_{yy}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{min}$

Attenzione agli apici

Nel nostro esempio $I_{xx}^{G} = 894{,}15 > I_{yy}^{G} = 476{,}62 \quad I_{xx}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{max} = 930 \quad e \quad I_{yy}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{min} = 440$

$I_{xx}^{G} < I_{yy}^{G} \quad I_{xx}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{min} \quad e \quad I_{yy}^{G'} \xrightarrow{yields} I_{max}$



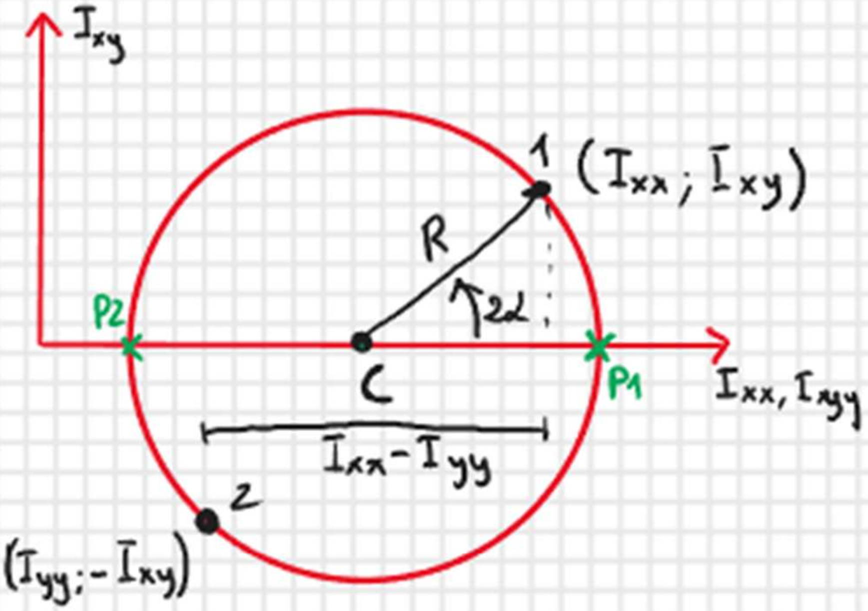
$\alpha = 15{,}7°$

α > 0 Rotazione antioraria

Titolo:

Circolo di Mohr

I valori che possono assumere i momenti d'inerzia al variare dell'angolo α giacciono sul cerchio



Centro $C = \dfrac{I_{xx} + I_{yy}}{2}$

Triangolo rettangolo

$$R^2 = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right) tg\, 2\alpha = I_{xy}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}\right)$$

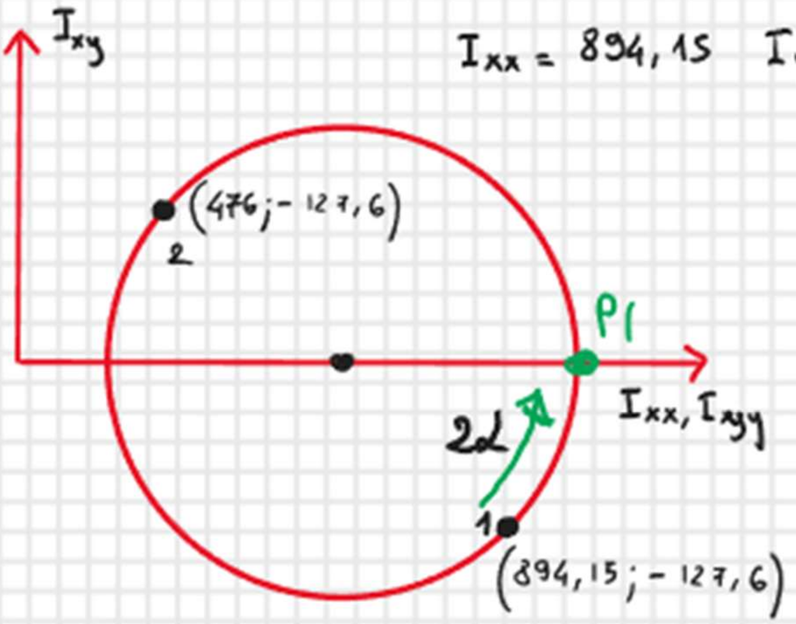
α angolo di cui ruotare il sistema di riferimento affinchè sia principale (Ruoto il punto 1 fino a sovrapporsi a P1, segno - nella formula)

Coordinate P1 (I_{max}) e P2 (I_{min})

$P_1 (C + R ; 0) \longrightarrow I_{max}$ $\quad$ $P_2 (C - R ; 0) \longrightarrow I_{min}$

Nostro esempio (ometto l'apice G)

$I_{xx} = 894,15 \quad I_{yy} = 476 \quad I_{xy} = -127,6$



Centro $C = 685$

Raggio $R = 245$

$I_{max} = C + R \simeq 930$

$I_{min} = C - R \simeq 437$

Ruoto il punto 1 fino a sovrapporsi a P1 (antiorario)

Rotazione nel cerchio $2\alpha = 31{,}4° \xrightarrow{quindi} \alpha = 15{,}7°$ *è la rotazione del sistema iniziale affinchè diventi principale*