

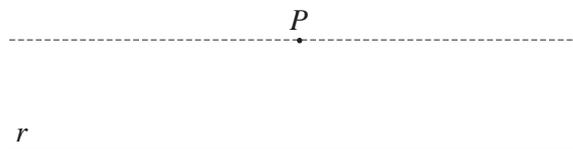
# 1 Geometria non-euclidea

I tentativi di “dimostrare” il cosiddetto quinto postulato di Euclide a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell’800, alla nascita delle *geometrie non-Euclidee* (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).



Gauss, Bolyai, Lobachevski e Klein

Il quinto postulato si può enunciare nel seguente modo: Data una retta  $r$  ed un punto  $P$  fuori da essa, per il punto  $P$  passa una ed una sola retta parallela ad  $r$  (possiamo dare al termine *parallelo* il significato di *che incontra  $r$  solo all’infinito*, in un punto improprio).

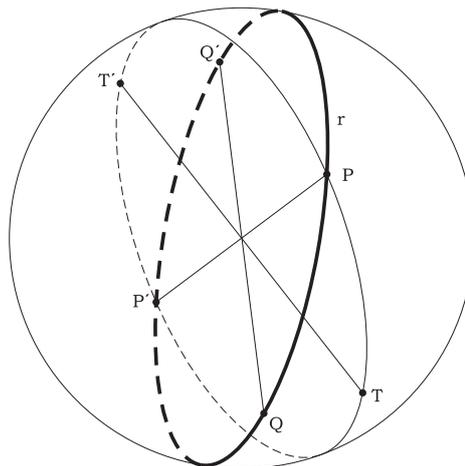


Questo postulato è risultato *indipendente* dagli altri, in senso che si possono costruire geometrie “piane” (cioè in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri enunciati originali di Euclide, ma il quinto postulato è diverso:

1. Per  $P$  esterno ad  $r$  non passa nessuna parallela
2. Per  $P$  esterno ad  $r$  passano due (o addirittura infinite) rette parallele (o *non secanti*)

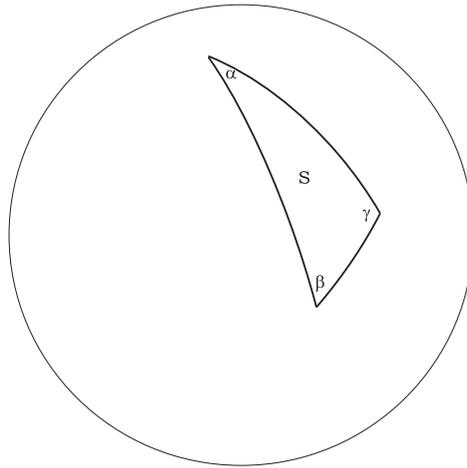
Nel caso 1, inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo è  $> 180^\circ$ , nel caso 2 è  $< 180^\circ$ .

Per costruire un “modello” di queste geometrie dobbiamo definire in modo opportuno punti, rette, ecc.



Per il caso 1 (**geometria ellittica piana**) possiamo definire come punto la coppia di punti diametralmente opposti  $(P, P')$ , e per retta un cerchio massimo passante per  $P$  e  $P'$ . Vediamo che per due punti  $(P, P')$  e  $(Q, Q')$  passa una retta  $r$  e che per un punto  $(T, T')$  esterno ad  $r$  non passa alcuna parallela ad  $r$  in quanto tutte le rette per  $(T, T')$  intersecano  $r$  in un punto.

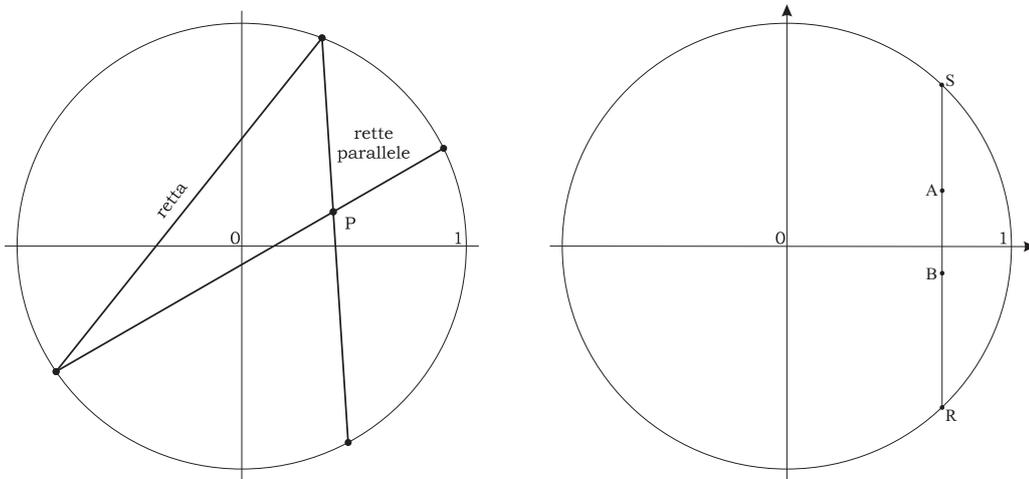
Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli  $\alpha + \beta + \gamma$  è sempre  $> \pi$ , tanto che l’area  $S$ , se la sfera ha raggio  $R$ , si può esprimere come  $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ . Se  $S \rightarrow 0$  (mantenendo  $R$  fissato) si vede che  $(\alpha + \beta + \gamma) \rightarrow \pi$ . Se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio  $R$ , la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire.



Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, che indicheremo con  $\mathbf{S}^2$ ) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale  $\mathbf{E}^3$ .

Notiamo ancora che per poter rappresentare il postulato V 1) abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie che definiamo curva, cioè la sfera. Questa "curvatura" deve essere inoltre costante in tutto il "piano" perchè gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  come  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  tutti i postulati di euclide si riducono a teoremi sui numeri reali. Risulta quindi essenziale la definizione di punto e distanza per descrivere una geometria.



Analogamente a quanto fatto per il postulato V 1), si può definire un modello per il postulato V 2), detto **geometria iperbolica piana ( $\mathbf{H}^2$ )**.

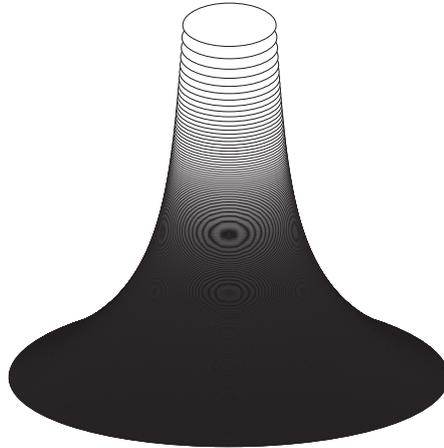
Il piano "iperbolico" non può venir immerso completamente nello spazio euclideo 3-D come quello ellittico (capiremo più avanti il perchè). Si possono però fare dei modelli limitati, come il cerchio di Klein (1870): definiamo come punti quelli interni alla circonferenza di raggio 1. Le rette sono le corde della circonferenza. I punti di questa sono punti *impropri*. Una retta è parallela ad un'altra se ha in comune con la prima un punto improprio. Vedo allora che per  $P$  passano 2 rette parallele ad una retta data, ed esistono infinite rette per  $P$  non secanti. La distanza tra due punti  $A$  e  $B$  (vedi figura) è data dall'espressione

$$d(AB) = \frac{1}{2} \log \frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}$$

vedo che  $d(AB) \rightarrow \infty$  se uno dei due punti tende alla circonferenza (ai punti  $R$  o  $S$ ).

Una rappresentazione parziale di  $\mathbf{H}^2$  "immersa" in uno spazio euclideo 3-D  $\mathbf{E}^3$  è data dalla cosiddetta *pseudosfera*, che ha la forma di una tromba. Questa superficie ha una curvatura costante, come la sfera, ma *negativa* (capiremo più avanti il significato dell'espressione *curvatura negativa*).

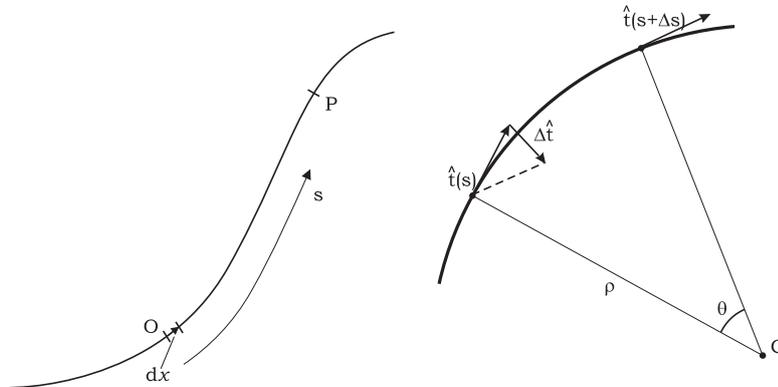
Per comprendere meglio il significato di curvatura occorre riprendere ad approfondire alcuni concetti di geometria differenziale, legati direttamente al modo di esprimere la distanza tra punti, un concetto essenziale per descrivere la geometria di una superficie, anche se di questa superficie non è possibile dare una rappresentazione intuitiva nello spazio 3-D euclideo  $\mathbf{E}^3$ . Questo serve poi da generalizzazione per passare da superfici 2-D a spazi a 3 o più dimensioni.



### 1.1 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente:  $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dove  $t$  è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è  $\frac{d\bar{x}}{dt}$ . Possiamo definire l'ascissa curvilinea  $s$ :

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt \quad \rightarrow \quad s = \int_0^t \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt = s(t)$$



Se allora passo dal parametro  $t$  al parametro  $s$ , noto che  $\frac{d\bar{x}}{ds} = \hat{t}(s)$  ha modulo 1: è il versore tangente  $\hat{t}(s)$ .

Poichè  $|\hat{x}(s)| = |\hat{t}(s)| = 1$ , abbiamo  $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$  e, derivando, segue  $2\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$ , cioè  $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$ . (nota:  $\dot{\hat{t}}(s)$  non è un versore!)

Chiamati  $\kappa(s) = |\dot{\hat{t}}(s)|$  e  $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{|\dot{\hat{t}}(s)|}$  segue che  $\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s) \cdot \hat{n}$

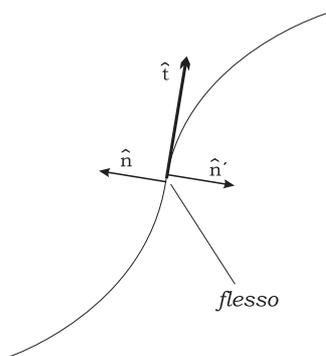
$$\Delta \hat{t} = \hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s) \quad |\Delta \hat{t}| = 2|\hat{t}| \sin \frac{\Delta \theta}{2} \sim \Delta \theta \quad \Delta s \simeq \rho \Delta \theta \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} \right| \simeq \frac{\Delta \theta}{\rho \Delta \theta} = \frac{1}{\rho}$$

Quindi

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n} = \frac{1}{\rho} \hat{n} \quad \begin{cases} \kappa : & \text{curvatura} \\ \rho : & \text{raggio di curvatura} \end{cases}$$

Misurando  $\theta$  rispetto ad una direzione fissata (ad esempio l'asse  $x$ )

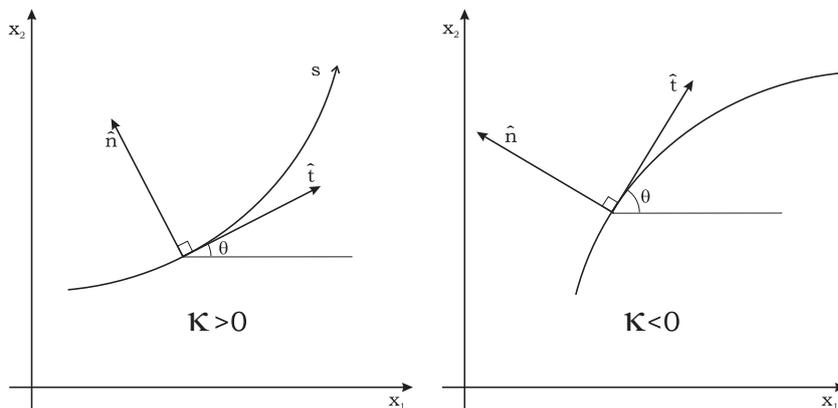
$$\Delta s = \rho \Delta \theta = \frac{\Delta \theta}{\kappa} \quad \rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$



Abbiamo definito  $\kappa$  come  $\geq 0$ . Così facendo, però, in un flesso ho una discontinuità in  $\hat{n}$ . Per evitare questo, definita una  $s$  sulla curva, resta definito anche  $\hat{t}$  e posso definire  $\hat{n}$  come rotazione di  $\hat{t}$  di  $90^\circ$  in senso positivo (coerente con  $O, x_1, x_2$ ). Poichè  $\hat{t} \perp \hat{n}$  abbiamo ancora  $\hat{t} = \kappa \hat{n}$ , ma ora possiamo avere anche  $\kappa < 0$ . A seconda del segno la curva sta a sinistra o a destra di  $\hat{t}$ ; nel flesso  $\hat{n}$  non cambia ma  $\kappa$  cambia segno e ora risulta

$$\kappa = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

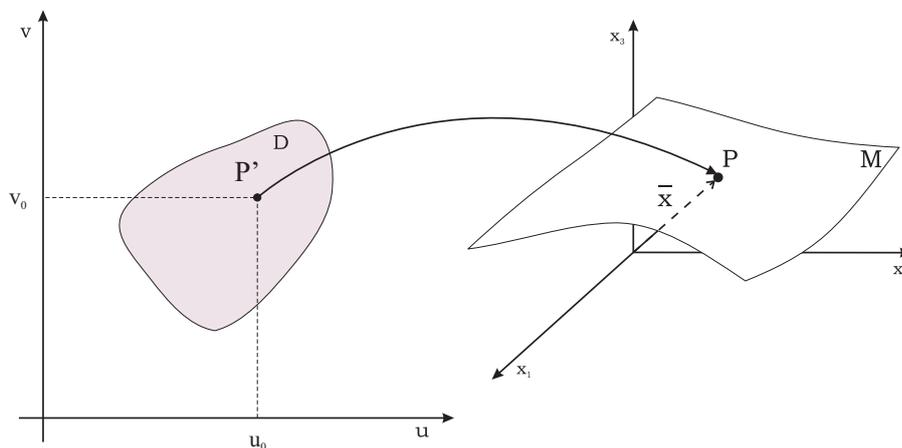
(e non in valore assoluto).



### 1.2 Superfici

Per essere precisi, più che di superfici, parleremo di elementi di superficie, poichè ci interessano le proprietà locali.

Anche in questo caso ricorriamo ad una rappresentazione parametrica: si considera una funzione biunivoca  $\bar{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (lavoriamo in uno spazio tridimensionale euclideo  $\mathbf{E}^3$ ).



Definiamo  $\bar{x}(u, v) \equiv (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ . Se la superficie è del tipo  $z = f(x, y)$  la parametrizzazione diventa  $\bar{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .

Si parla di *superficie regolare (smooth)* se, definiti i vettori,

$$\begin{aligned} \bar{x}_u(u, v) &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \\ \bar{x}_v(u, v) &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

allora è ovunque (entro il dominio)  $\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0$  (prodotto vettoriale).

Fissato  $v = v_0$  e facendo variare  $u$  in prossimità di un punto  $P'$  ( $\rightarrow P$  sull'elemento di superficie  $M$ ) ho una curva su  $M$  di cui  $\bar{x}_u$  è un vettore tangente. Analogamente anche  $\bar{x}_v$  è tangente, e i due definiscono il piano tangente in  $P$ .

Si può allora definire un versore normale  $\hat{N}$  normale alla superficie

$$\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} \quad \text{e si ha che } \hat{N}, \bar{x}_u, \bar{x}_v \text{ formano un triedro.}$$

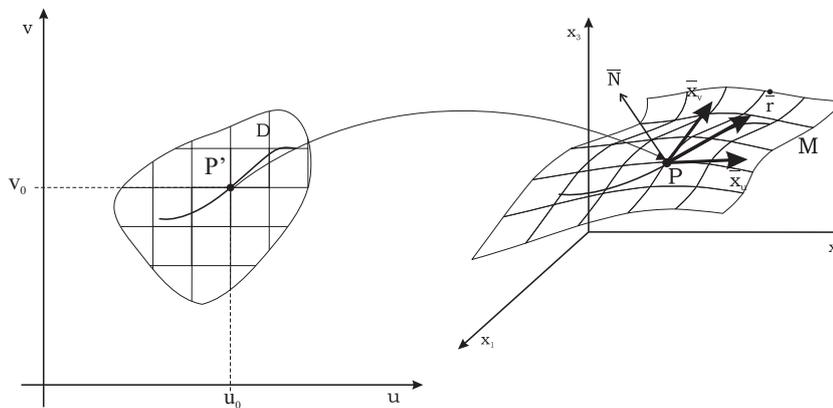
**Esempio:** sfera (in coordinate geografiche)

Si può descrivere la superficie della sfera, usando la variabile  $u$  per la longitudine ( $-\pi \leq u \leq \pi$ ) e la variabile  $v$  per la latitudine ( $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ), nel seguente modo (più comunemente si usa la colatitudine,  $\frac{\pi}{2} - v$ ):  $\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$ .

Poichè in un intorno di un punto  $P$  su  $M$  (e di un corrispondente punto  $P' \in D$ ) la corrispondenza è biunivoca, posso pensare che  $u$  e  $v$  formino sull'intorno di  $P$  un sistema di coordinate curvilinee (ad esempio paralleli e meridiani su una sfera).

Se  $u = u(t), v = v(t)$  è una curva in  $D$  per  $P'(u_0, v_0)$  allora  $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$  è una curva su  $M$  per  $\bar{x}(u_0, v_0)$ . Il vettore "velocità"  $\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  sarà

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{r}} = \bar{x}_u \frac{du}{dt} + \bar{x}_v \frac{dv}{dt}$$



Il vettore  $\dot{\bar{r}}$  è tangente anche a  $M$  ed è quindi contenuto nel piano tangente. Ogni vettore appartenente al piano tangente in  $P$  è combinazione lineare di  $\bar{x}_u$  e  $\bar{x}_v$  (in  $\bar{x}(u_0, v_0)$ ); viceversa ogni combinazione lineare  $\bar{v} = a\bar{x}_u(u_0, v_0) + b\bar{x}_v(u_0, v_0)$  è il vettore "velocità" di una curva su  $M$ . I vettori  $\bar{x}_u$  e  $\bar{x}_v$  formano una base nel piano tangente.

### 1.3 La prima forma fondamentale

Se  $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$ , con  $a \leq t \leq b$ , è una curva su una superficie, e se  $s = s(t)$  è la lunghezza d'arco (ascissa curvilinea) lungo  $\bar{r}$ , da  $\bar{r}(a)$  a  $\bar{r}(b)$ , allora la lunghezza totale  $L$  di questa curva si ottiene integrando  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$  sull'intervallo  $[a, b]$ :

$$L \equiv s(b) = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

ma poichè  $\dot{\bar{r}} = \bar{x}_u \cdot \dot{u} + \bar{x}_v \cdot \dot{v}$  (con  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  e  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ )

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^2 = \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) \cdot (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) = \dot{u}^2(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u) + 2\dot{u}\dot{v}(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v) + \dot{v}^2(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v)$$

Poniamo ora  $E \equiv \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u$ ,  $F \equiv \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v$ ,  $G \equiv \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v$ ; ( $E = E(u, v, \dots)$ ) e otteniamo:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

$$L = \int_a^b \left[ E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

che si abbrevia scrivendo

$$L = \int_{\bar{r}} ds = \int_{\bar{r}} \left[ Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

o, in forma differenziale,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Questa è la **prima forma fondamentale** o **forma metrica** di una superficie.

Come vedremo, la forma metrica determina completamente la *geometria intrinseca* della superficie, inclusa la sua curvatura. Parlando di geometria intrinseca intendiamo riferirci a quelle proprietà geometriche che possono essere valutate attraverso misure (ad esempio distanze, ma non solo) condotte *rimanendo entro la superficie*, senza “uscire” da essa (senza, cioè, esaminare la superficie bidimensionale entro uno spazio euclideo tridimensionale). La possibilità di definire proprietà intrinseche è essenziale; infatti, se passando da 2 a 3 dimensioni, vogliamo comprendere la geometria dello spazio che definisce il nostro Universo, non possiamo certo osservarlo “dall'esterno”!

N.B.: Per la corrispondenza biunivoca tra il dominio  $D \in \mathbb{R}^2$  e l'elemento di superficie  $M$ , le curve  $u = \text{cost}$  e  $v = \text{cost}$  formano una griglia sulla superficie, ed  $E$ ,  $F$ , e  $G$  posso pensarle come funzioni definite sulla superficie (quindi intrinseche). Posso pensare che gli abitanti bidimensionali della superficie facciano varie misure di distanze tra punti della superficie stessa per scoprire che forma abbiano le tre funzioni  $E$ ,  $F$  e  $G$ , espresse in funzione della griglia di coordinate curvilinee, magari facendo delle ipotesi sulla loro possibile forma e cercando la soluzione migliore.

.....

**Esempio:** il piano

$\bar{x}(u, v) = (u, v, 0)$  è il piano  $z = 0$  in  $\mathbf{E}^3$  con  $x = u$  e  $y = v$  come coordinate cartesiane.

$\bar{x}_u = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{x}_v = (0, 1, 0)$ ,  $E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1$ ,  $F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0$ ,  $G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1$ ;

$ds^2 = du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2$  (teorema di Pitagora)

$$L = \int_a^b \left[ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

e se la curva può essere rappresentata come  $y = f(x)$ , detto  $x = t$  e  $y = f(x)$  si ottiene

$$L = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

.....  
 .....

**Esempio:** la sfera in coordinate geografiche:

$$\begin{aligned} \bar{x}(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \\ \bar{x}_u &= (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v &= (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \cos^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \cos^2 u = R^2 \cos^2 v \\
G &= \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v = R^2 \\
F &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 \cos v \cos u \sin v \sin u - R^2 \cos u \cos v \sin u \sin v = 0
\end{aligned}$$

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2$$

Se  $\bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v$ ,  $\bar{w} = c\bar{x}_u + d\bar{x}_v$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , sono due vettori tangenti alla superficie  $M$ , allora  $\bar{v} \cdot \bar{w} = (a\bar{x}_u + b\bar{x}_v) \cdot (c\bar{x}_u + d\bar{x}_v) = acE + adF + bcF + bdG$  che si può scrivere in forma matriciale

$$(a, b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{in cui} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{è la matrice della prima forma fondamentale}$$

Quindi la conoscenza della prima forma fondamentale permette di calcolare prodotti scalari su  $M$ , e quindi non solo lunghezze ma anche angoli.

Ricordiamo che, essendo  $\bar{x}_u \times \bar{x}_v$  perpendicolare al piano tangente alla superficie, il versore  $\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$  è perpendicolare alla superficie.

**Identità di Lagrange** (importante):  $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v) - (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2 = EG - F^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

Dimostrazione: ricordiamo che

$$\begin{aligned}
|\bar{x}_u \times \bar{x}_v| &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \sin \theta \\
\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \cos \theta
\end{aligned}$$

da cui (ricordando che  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ )  $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta = (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v) - (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2$  C.V.D

Dalla condizione che la superficie sia regolare segue che  $EG - F^2 \neq 0$

A questo punto facciamo un cambiamento nella simbologia usata; come vedremo questo porterà ad una notevole semplificazione delle formule.

Chiamiamo  $g_{11} \equiv E$      $g_{12} = g_{21} \equiv F$      $g_{22} \equiv G$      $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_u$      $\bar{x}_2 \equiv \bar{x}_v$

e scriviamo  $u^1 \equiv u$      $u^2 \equiv v$     (dove gli apici 1 e 2 sono indici alti e non esponenti).

Avremo allora  $g_{ij} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) e la matrice della forma metrica sarà:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che  $g_{ij} = g_{ij}(u, v) = g_{ij}(u^1, u^2)$ .

Detto  $g \equiv \det(g_{ij}) = EG - F^2$ , allora (dall'identità di Lagrange)  $|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|^2 = g$ .

Nella nuova notazione la I forma fondamentale si può allora scrivere:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$$

Abbiamo usato  $2g_{12} = g_{12} + g_{21}$  poichè  $g_{12} = g_{21}$ ; capiremo inoltre presto perchè scriviamo  $u^i$  anzichè  $u_i$ .

Un vettore, tangente in  $P$  ad  $M$ ,  $\bar{v} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2$  si potrà scrivere come  $\bar{v} = v^1\bar{x}_1 + v^2\bar{x}_2 = \sum_i v^i \bar{x}_i$  (si nota che  $i$  è una variabile "muta", ed ogni altra lettera può essere usata al suo posto.)

Se  $\bar{v} = \sum_i v^i \bar{x}_i$  e  $\bar{w} = \sum_j w^j \bar{x}_j$  sono due vettori tangenti ad  $M$  nello stesso punto  $P$ , allora

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i,j} (v^i \bar{x}_i) \cdot (w^j \bar{x}_j) = \sum_{i,j} v^i w^j \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j$$

I vettori  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  sono ortogonali se e solo se  $\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = 0$ .

Definiamo come  $g^{ij}$  gli elementi della matrice inversa di  $(g_{ij})$ , tali cioè che

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che in forma compatta si può scrivere

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

dove  $\delta_i^k$  ( $\delta$  di Kronecker) è definita come

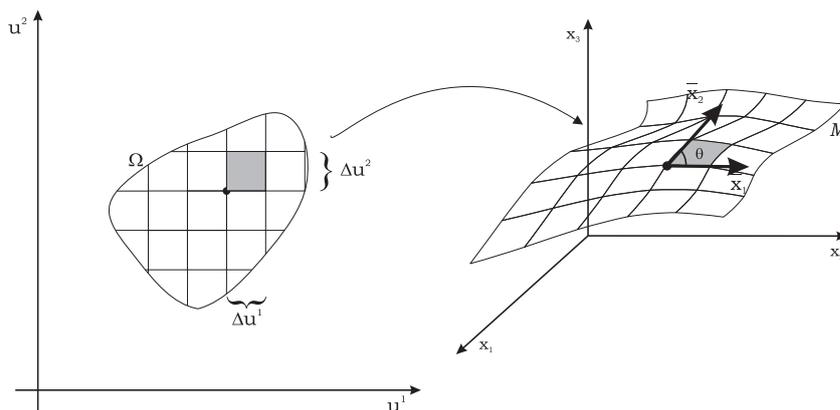
$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Ricordando che l'inversa di una matrice ha come elementi i complementi algebrici divisi per il determinante della matrice di partenza, si ha:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{21}}{g} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

Vedremo ora che la prima forma fondamentale non solo permette di misurare distanze e angoli, ma anche aree.

Sia  $\bar{x} : D \rightarrow E^3$  una superficie in  $E^3$  e sia  $\Omega \in D$  una regione del dominio in cui  $\bar{x}$  è biunivoca. Per trovare l'area di  $\bar{x}(\Omega)$  suddividiamo  $\Omega$  in elementi rettangolari per mezzo di linee parallele agli assi  $u^1$  e  $u^2$ .



Ad un'areola di  $\Omega$  di lati  $\Delta u^1$  e  $\Delta u^2$  corrisponde approssimativamente un pezzo di superficie a forma di parallelogramma, con lati paralleli ai vettori  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ . Questi lati avranno lunghezze date da  $\Delta l_1 \simeq |\bar{x}_1| \Delta u^1$  e  $\Delta l_2 \simeq |\bar{x}_2| \Delta u^2$  (Ricordiamo che  $\bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1}$ , da cui  $\Delta \bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1$ )

L'areola sarà data da:

$$\Delta A = |\bar{x}_1| \Delta u^1 \cdot |\bar{x}_2| \Delta u^2 \sin \theta = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2 = \sqrt{g} \Delta u^1 \Delta u^2$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  e  $g = \det(g_{ij})$  come visto sopra.

Sommando su tutti gli elementi di area in cui è suddiviso  $\Omega$  e passando al limite  $\Delta u^i \rightarrow 0$  si ha che l'area di  $\bar{x}(\Omega)$  è:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} \, du^1 du^2$$

Osserviamo che, lavorando in due dimensioni, la misura di un insieme è proprio l'area; se lavoriamo in tre dimensioni, sarà un volume, ed un volume  $n$ -dimensionale in  $n$  dimensioni. In tutti i casi, anche se qui non lo mostriamo, la misura si ottiene integrando  $\sqrt{g}$ , dove  $g$  è il determinante della metrica  $n$ -dimensionale. Questo vale negli spazi (*manifolds*) di tipo cosiddetto *Riemanniano*, in cui il  $ds^2 > 0$ . Negli spazi detti *pseudo-Riemanniani*, in cui il  $ds^2$  può essere positivo, negativo o nullo (come ad esempio lo spazio-tempo di Minkowski della Relatività Speciale), alcuni elementi del tensor metrico possono essere negativi; potendo in questo caso

risultare (e così è per lo spazio-tempo)  $g < 0$ , si userà in generale il modulo di  $g$ , e si scriverà  $\sqrt{|g|}$ .

**Esempio:** sfera in coordinate geografiche:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v \, du^2 + R^2 \, dv^2 \qquad \begin{matrix} -\pi \leq u \leq \pi \\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2 \end{matrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad g = R^4 \cos^2 v \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

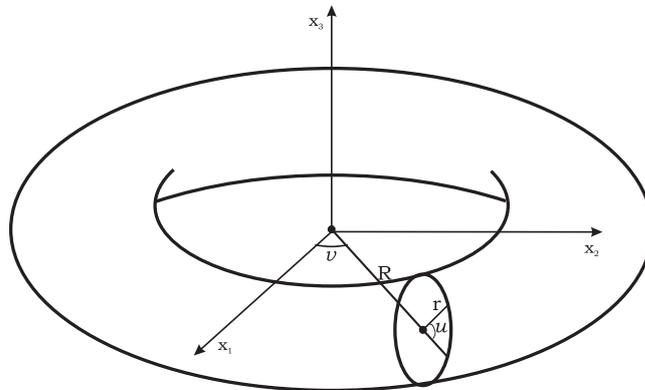
$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} R^2 \cos v \, du \right) dv = 2\pi R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 4\pi R^2$$

**Esempio:** area del toro:

$$\bar{x}(u, v) = [(R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u] \qquad \sqrt{g} = r(R + r \cos u)$$

$$0 \leq v \leq 2\pi \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 < r < R$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) \, du \right] dv = 2\pi r \left[ \int_0^{2\pi} R \, du + \int_0^{2\pi} r \cos u \, du \right] = \\ &= 2\pi r \left[ 2\pi R + r \int_0^{2\pi} \cos u \, du \right] = 4\pi^2 Rr \end{aligned}$$



## 2 Tensori

Perchè abbiamo scritto cose come  $g_{ij}$  e  $du^i$  e  $du^j$ ? Perchè abbiamo a che fare con grandezze *tensoriali*, grandezze le cui proprietà sono legate al modo di trasformarsi cambiando sistema di riferimento.

Se passo dal sistema  $u^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )  $\rightarrow u'^j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) sarà (per mezzo dei ... comincio a far vedere come si può generalizzare a più di due dimensioni)

$$du'^j = \sum_i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Ogni grandezza  $V^j$  che si trasforma con la regola

$$V'^j = \sum_i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

è un tensore *contravariante*, quindi anche  $du^i$ , o  $u^i$ , è un tensore *contravariante*. Un vettore è un tensore di ordine 1. Una grandezza scalare, invece, il cui valore non muta in un dato punto anche se cambia il sistema di coordinate, è un tensore di ordine 0.

Consideriamo ora il gradiente di un campo scalare  $\Phi(u^i) = \Phi(u'^j)$ . Avremo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$$

Vediamo che il gradiente di  $\Phi$  si trasforma in modo diverso da  $du^i$ ! Si dice che  $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$  è un vettore *covariante*, e spesso si scrive  $\partial_i \Phi$  anzichè  $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$ , con l'indice scritto in basso. Si sottintende la somma sugli indici alti e bassi uguali e ripetuti (convenzione di Einstein), per cui scriviamo semplicemente:

$$V'^j = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$$

La grandezza  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$  (sottintendendo il segno di sommatoria su  $i$  e  $j$ ) è la lunghezza, al quadrato, di un segmento, e quindi non dipende dal sistema di riferimento usato (è uno scalare). In due sistemi diversi sarà quindi

$$ds^2 = g'_{kl} du'^k du'^l = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} du'^k du'^l$$

$$\text{poichè} \quad du^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} du'^k \quad \text{e} \quad du^j = \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} du'^l$$

$$\text{Abbiamo quindi} \quad g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}$$

cioè il tensore metrico è un tensore covariante di rango 2.

Il tensore  $g^{ij}$  è invece contravariante (di rango 2).

Abbiamo visto che  $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$  (sottintendo anche qui la sommatoria sull'indice ripetuto  $j$ ).  $\delta_i^k$  è un *tensore misto* di rango 2; infatti:

$$\delta_i^k \cdot \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^m} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial u'^m} = \frac{\partial u'^l}{\partial u'^m} = \delta_m^l$$

(a parte gli scalari e lo zero,  $\delta_i^k$  è il solo tensore che mantiene le stesse componenti in tutti i sistemi di coordinate).

Abbiamo visto che il prodotto scalare  $\bar{v} \cdot \bar{w}$  si ottiene come  $\bar{v} \cdot \bar{w} = g_{ij} v^i w^j$ .

Se moltiplichiamo due tensori otteniamo ancora un tensore:  $A_{ij} \cdot C^k = D_{ij}^k$ .

Se *contraiamo* un tensore, avremo ancora un tensore:  $T_{kmj}^j = B_{km}$ .

Siano  $D_i$  e  $D^j$  le componenti covariante e controvariante di uno stesso vettore (tensore). Prendiamo un vettore generico  $C^j$  tale che sia

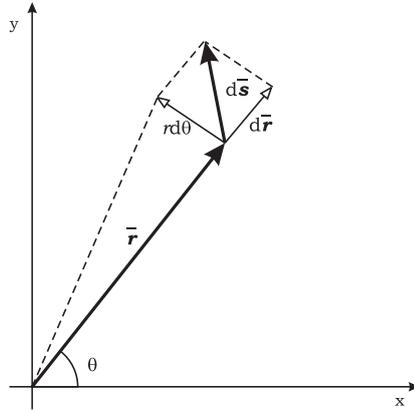
$$D_i = g_{ij} C^j / \cdot D^i \quad \rightarrow \quad D_i D^i = g_{ij} C^j D^i$$

Eseguendo questo prodotto scalare otteniamo, a sinistra, uno scalare che dipende dal vettore  $\bar{D}$ , mentre a destra abbiamo una dipendenza da  $\bar{C}$  e da  $\bar{D}$ ; essendo le due cose uguali necessariamente sarà  $\bar{C} \equiv \bar{D}$ , cioè  $D_i = g_{ij} D^j$ . Possiamo arrivarci anche in un altro modo. Abbiamo visto che un vettore  $\bar{v}$  si può scrivere come  $\bar{v} = v^i \bar{x}_i$ , usando le sue componenti controvarianti; definiamo allora come componenti covarianti  $v_k$  le quantità

$$v_k \equiv \bar{v} \cdot \bar{x}_k = v^i \bar{x}_i \cdot \bar{x}_k = v^i g_{ik} = g_{ik} v^i = g_{ki} v^i$$

Analogamente  $D^j = g^{ij} D_i$ . **Vedo allora che il tensore metrico serve a trasformare le componenti controvarianti in covarianti (e viceversa).**

*Esempio: vettori nel piano in coordinate polari*



$$\begin{aligned} u^1 &\equiv r & ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 & g_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} & g &= r^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} = r \\ u^2 &\equiv \theta & & & g^{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} & & \end{aligned}$$

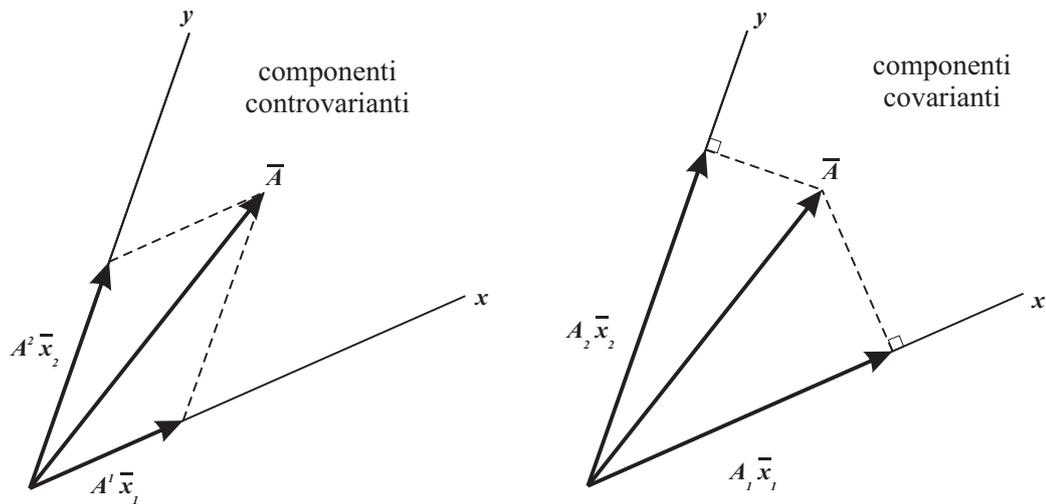
dati  $A_i = (5, 9)$  e  $B^i = (3, 7)$  abbiamo  $A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 78$

$$\begin{aligned} A^i &= g^{ij} A_j & \rightarrow & A^1 = g^{11} A_1 + g^{12} A_2 = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 9 = 5 \\ & & \rightarrow & A^2 = g^{21} A_1 + g^{22} A_2 = 0 \cdot 5 + 1/r^2 \cdot 9 = 9/r^2 \\ B_i &= g_{ij} B^j & \rightarrow & B_1 = g_{11} B^1 + g_{12} B^2 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 7 = 3 \\ & & \rightarrow & B_2 = g_{21} B^1 + g_{22} B^2 = 0 \cdot 3 + r^2 \cdot 7 = 7r^2 \\ \text{quindi} & & & A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 = 5 \cdot 3 + 9/r^2 \cdot 7r^2 = 78 = A_i B^i \end{aligned}$$

Cioè  $A^i B_i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_j B_i = A_i B^i$  è invariante

N.B.: Abbiamo che  $dS = \sqrt{g} du^1 du^2 \rightarrow r dr d\theta$  è l'elemento di superficie.

Non è facile rappresentare le componenti covarianti e controvarianti di un vettore in generale, ma si può dare una descrizione grafica in qualche caso particolare, ad esempio nel caso di coordinate rettilinee. Consideriamo, nel piano, un sistema di coordinate rettilinee *non* ortogonali  $Oxy$ . Siano  $\bar{x}_i$  i vettori di base. Se scriviamo il vettore  $\bar{A}$  come  $\bar{A} = A^i \bar{x}_i$ , vedo che le  $A^i$  altro non sono che le usuali componenti di un vettore, tali che i vettori componenti, di modulo  $A^i$  e con direzione e verso dati da  $\bar{x}_i$ , si sommano con la regola del parallelogramma per dare il vettore  $\bar{A}$ . Le componenti controvarianti corrispondono alle proiezioni *parallele* agli assi.



Se invece vado a scrivere, come già fatto sopra, per le componenti covarianti,  $A_i = \bar{A} \cdot \bar{x}_i$ , vedo che esse corrispondono alla proiezione di  $\bar{A}$  lungo la direzione  $\bar{x}_i$  e sono quindi rappresentate dalle proiezioni *perpendicolari* agli assi.

Da quanto detto vediamo che, se il sistema di riferimento è rettilineo e *ortogonale*, non essendoci allora differenza tra proiezioni parallele e perpendicolari, le componenti covarianti e controvarianti del vettore (e, in generale, dei tensori) coincidono.

Non ogni grandezza con indici è necessariamente un tensore; ad esempio la connessione affine  $\Gamma_{jk}^i$  come vedremo non lo è, poichè non si trasforma come un tensore.

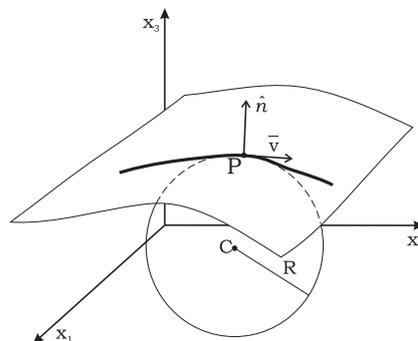
Possiamo trarre una *conclusione importante*: **ogni equazione sarà invariante rispetto ad una trasformazione generale di coordinate se è espressa come uguaglianza tra due tensori con gli stessi indici alti e bassi**:

$$A_{\beta\gamma}^{\alpha} = B_{\beta\gamma}^{\alpha} \rightarrow A'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = B'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \text{ se } A_{\beta\gamma}^{\alpha} \text{ e } B_{\beta\gamma}^{\alpha} \text{ sono tensori.}$$

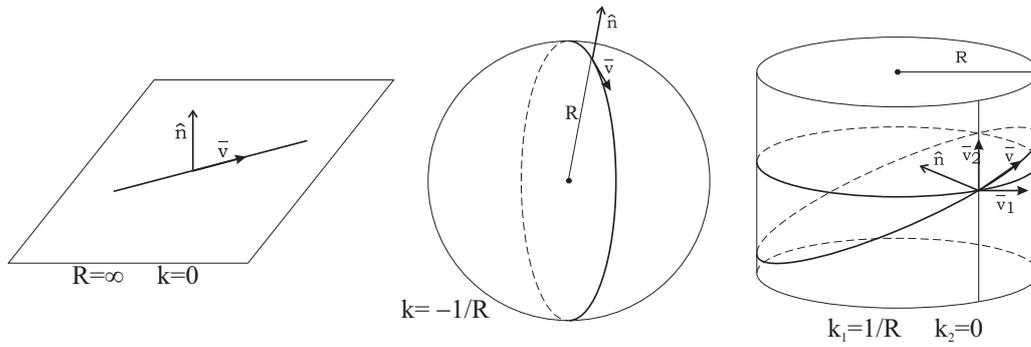
Poichè anche lo zero è un tensore di qualunque ordine (basta pensare che comunque si trasforma nello zero), una relazione del tipo  $A_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$  varrà in ogni sistema di riferimento.

Invece una uguaglianza tra grandezze che non sono entrambe tensori con gli stessi indici alti e bassi (ad esempio  $T_{\mu\nu} = 5$ ;  $V^i = B_i$ ) può valere in qualche sistema, ma non in generale.

## 2.1 Concetto di curvatura di una superficie



Vediamo come si può estendere il concetto di curvatura ad una superficie. Consideriamo quindi un punto  $P$  su una superficie, e sia  $\hat{n}$  il versore normale alla superficie in  $P$ . Se  $\bar{v}$  è un vettore tangente in  $P$  alla superficie,  $\bar{v}$  e  $\hat{n}$  definiscono un piano che taglia la superficie lungo una curva, che avrà in  $P$  un certo raggio di curvatura. La curvatura in  $P$  sarà data da  $k = \pm \frac{1}{R}$ , dove il segno è preso positivo o negativo a seconda del fatto che il centro di curvatura  $C$  stia, rispetto a  $P$ , dallo stesso lato di  $\hat{n}$  oppure da quello opposto (si può anche adottare la scelta opposta; come vedremo le cose non cambiano).

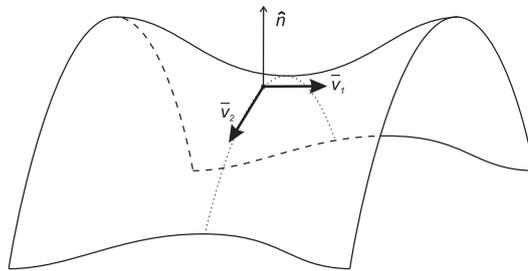


Nel caso del cilindro si vede che ci sono 2 direzioni, perpendicolari tra loro, alla quali corrispondono il massimo e il minimo valore ( $k_1$  e  $k_2$ ) di  $k$ , che sono le cosiddette *curvature principali*. Questo vale in generale, per tutte le superfici regolari.

Si definisce **curvatura di Gauss**  $K$  il prodotto  $k_1 \cdot k_2$ . Da questo vediamo che  $K$  non dipende dalla convenzione adottata per i segni di  $k$ .

Per il piano abbiamo  $K = 0$ , per la sfera  $K = 1/R^2$ , per il cilindro  $K = 0$  come per il piano! Anche se questo può apparire a prima vista strano, il realtà riflette il fatto che tagliando un cilindro retto lungo un segmento parallelo all'asse, esso si può distendere su di un piano senza deformato e senza cambiare lunghezze e angoli delle figure tracciate su di esso. La geometria di un cilindro è *localmente indistinguibile* da quella di un piano per quanto concerne misure di angoli, lunghezze, aree, cioè tutte quelle proprietà che si possono misurare muovendosi unicamente lungo la sua superficie. *Globalmente*, però, piano e cilindro sono distinguibili: un insetto che si muove lungo una sezione circolare (perpendicolare all'asse) senza deviare nè a destra nè a sinistra, finirà col ritornare sui suoi passi, cosa che sul piano non accade. Anche un cono circolare retto ha  $K = 0$

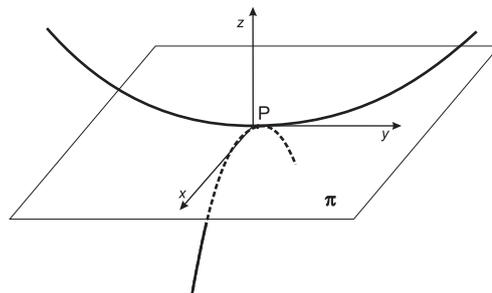
Un esempio di superficie con  $K < 0$  è dato da un paraboloide iperbolico (in generale da una superficie fatta a forma di sella)  $z = x^2 - y^2$ : i due centri di curvatura si trovano da parti opposte rispetto a  $P$  e quindi si ha  $K < 0$ .



In generale una superficie avrà  $K > 0$  se, rispetto al piano tangente in  $P$ , sta "tutta da una parte" (almeno localmente), mentre sarà  $K < 0$  se la superficie sta da entrambe le parti rispetto al piano tangente in  $P$ .

Per un toro abbiamo la zona esterna con  $K > 0$ , quella interna con  $K < 0$ , separate da una circonferenza sopra e sotto con curvatura nulla.

Vediamo di capire perchè nell'intorno di un punto  $P$  sono definite due curvatures principali, in due direzioni tra loro perpendicolari. Nell'intorno di un punto  $P$ , rispetto al piano tangente  $\pi$  ed alla normale, sarà (sviluppando in serie di Taylor)



$$z = f(x, y) \quad P \equiv \text{origine}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P x \cdot y + \mathcal{O}(3) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_P x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_P y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_P x \cdot y \right] + \mathcal{O}(3) \end{aligned}$$

che è del tipo

$$z = \frac{1}{2} [ax^2 + 2bxy + cy^2]$$

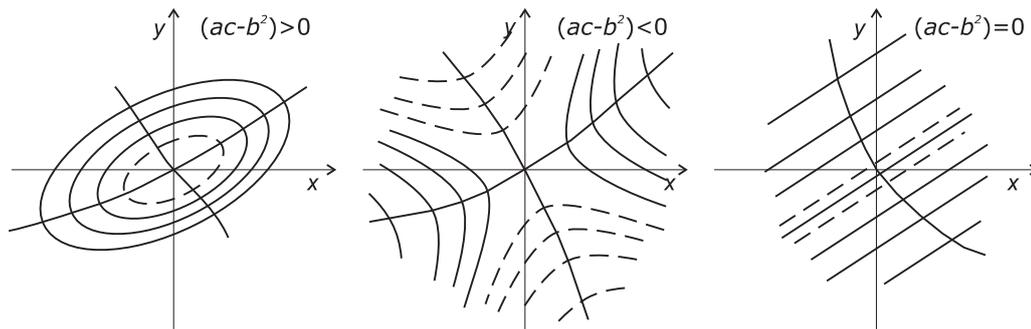
che rappresenta una conica per un dato valore di  $z$  fissato. In generale avremo:

$$\begin{aligned} (ac - b^2) > 0 &\Rightarrow \text{ellisse} \\ (ac - b^2) = 0 &\Rightarrow \text{parabola} \\ (ac - b^2) < 0 &\Rightarrow \text{iperbole} \end{aligned}$$

Nel caso di un ellisse le curve di livello  $z = \text{cost}$  descriveranno un insieme di ellissi con lo stesso centro nell'origine. In corrispondenza dell'asse maggiore e minore di queste ellissi avremo i raggi massimi e minimi di curvatura della superficie nell'intorno di  $P$ . Vediamo qui come le direzioni di massima e minima curvatura siano tra loro perpendicolari.

Nel caso iperbolico la superficie avrà la forma di una sella; anche qui avrò due direzioni perpendicolari in cui la curvatura sarà massima e minima (e di segno opposto).

Nel caso parabolico avremo una direzione in cui la curvatura è nulla.

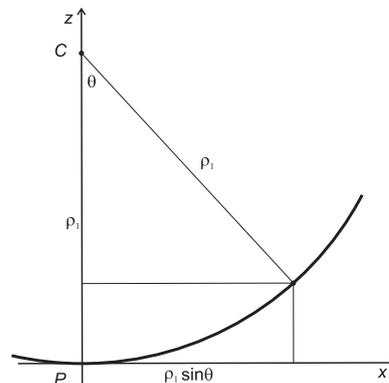


Se faccio una rotazione di assi nel piano tangente e faccio coincidere gli assi  $x$  e  $y$  con gli assi principali delle coniche allora potrò scrivere la superficie  $z = f(x, y)$  nella forma più semplice

$$z = a'x^2 + b'y^2 + \mathcal{O}(3)$$

dove  $a'$  e  $b'$  saranno legati ai raggi estremi di curvatura. Vediamo come.

Se mi muovo sul piano  $y = 0$ , ed approssimo la sezione della superficie con un arco di cerchio in un intorno di  $P$ , avrò



$$\begin{cases} z = \rho_1 - \rho_1 \cos \theta = \rho_1 (1 - \cos \theta) \simeq \rho_1 [1 - (1 - \theta^2/2 + \dots)] \\ x = \rho_1 \sin \theta \simeq \rho_1 \theta \end{cases}$$

da cui

$$z \sim \rho_1 \frac{\theta^2}{2} \sim \frac{\rho_1}{2} \left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 \sim \frac{x^2}{2\rho_1}$$

Analogamente nel piano  $zy$ , per cui in un intorno di  $P$ , scelto opportunamente il sistema di riferimento, posso porre

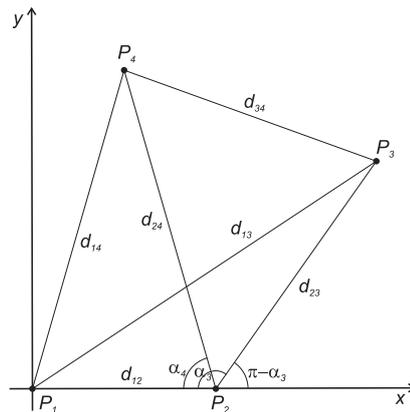
$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2} = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2}$$

Si potrebbe definire la curvatura di una superficie anche in altri modi, ad esempio  $K' = k_1 + k_2$ . In questo caso piano e cilindro sarebbero diversi anche localmente. Ma il grosso vantaggio della curvatura di Gauss risiede nel fatto che essa, come vedremo, si può determinare ricorrendo a sole misure condotte sulla superficie, senza la necessità di “vedere” la superficie in 3 dimensioni (come invece accadrebbe per  $K' = k_1 + k_2$ ).

La curvatura di Gauss è una *proprietà intrinseca* della superficie, e si può determinare conoscendo il tensore metrico  $g_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Questo è il risultato del cosiddetto **Theorema Egregium**, come ebbe a chiamarlo lo stesso Gauss.

**Esempio: il pianeta misterioso**

Per farci un’idea intuitiva di come questo sia possibile consideriamo questo esempio: supponiamo di aver misurato, sulla superficie di un corpo celeste su cui siamo stati trasportati bendati (quindi senza averlo visto dallo spazio!) le distanze tra 4 località  $P_1, P_2, P_3, P_4$  come mostrato in figura. Dati i 6 valori dei segmenti, posso dire se la superficie del pianeta è piatta oppure no?



$$d_{12} = 780km \quad d_{13} = 1498km \quad d_{14} = 1112km \quad d_{23} = 735km \quad d_{24} = 960km \quad d_{34} = 813km$$

Usiamo il teorema di Carnot:  $d_{13}^2 = d_{12}^2 + d_{23}^2 - 2d_{12}d_{23}\cos\alpha_3$  da cui

$$\cos\alpha_3 = \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}}$$

Analogamente

$$\cos\alpha_4 = \frac{d_{12}^2 + d_{24}^2 - d_{14}^2}{2d_{12}d_{24}}$$

Coordinate dei punti:  $P_1 = (0, 0)$  ;  $P_2 = (d_{12}, 0)$  ;

$P_3 = (d_{12} + d_{23}\cos(\pi - \alpha_3), d_{23}\sin(\pi - \alpha_3)) = (d_{12} - d_{23}\cos\alpha_3, d_{23}\sin\alpha_3)$  ;  $P_4 = (d_{12} - d_{24}\cos\alpha_4, d_{24}\sin\alpha_4)$ .

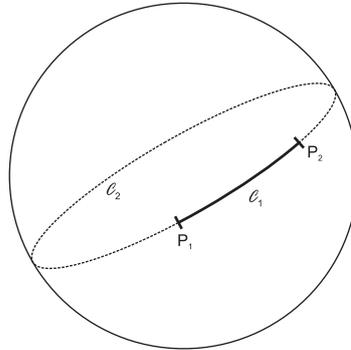
$$d_{34}^2 = [d_{12} - d_{23}\cos\alpha_3 - d_{12} + d_{24}\cos\alpha_4]^2 + [d_{23}\sin\alpha_3 - d_{24}\sin\alpha_4]^2 = d_{23}^2 + d_{24}^2 - 2d_{23}d_{24}\cos(\alpha_3 - \alpha_4)$$

cioè otteniamo  $d_{34} = 1147.6$  se la terra è piatta,  $\neq 813$  misurato.

## 2.2 Geodetiche

Si  $\bar{r}(s) = (u^i(s))$ , con  $a \leq s \leq b$ , una curva su una superficie, con  $s$  ascissa curvilinea, tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  ( $P_1 = \bar{r}(a)$ ;  $P_2 = \bar{r}(b)$ ). Diciamo che detta curva è una **geodetica** tra  $P_1$  e  $P_2$  se la sua lunghezza è stazionaria per piccole variazioni della curva che si annullano agli estremi. La curva che collega sulla superficie  $P_1$  e  $P_2$  lungo il cammino più breve è una geodetica, ma non è sempre vero il contrario.

Ad esempio su una sfera sono geodetiche tra  $P_1$  e  $P_2$  sia  $C_1$  che  $C_2$  (entrambi archi di cerchio massimo), ma il cammino più breve corrisponde a  $C_1$ .



Se ricordiamo che  $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$ , espresse le  $u^i$  in forma parametrica tramite il parametro  $t$  (che non sarà necessariamente il tempo) avremo:

$$ds^2 = \left( g_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) dt^2$$

Detta  $L(u^i, \dot{u}^i, t) = (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k)^{1/2}$  (con le  $g_{jk} = g_{jk}(u^i)$  e  $\dot{u}^i \equiv \frac{du^i}{dt}$ ) la lunghezza di una curva tra  $P_1$  e  $P_2$  sarà:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} L dt = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Per trovare la condizione che  $S$  sia stazionario si usano le *equazioni di Eulero-Lagrange* (vedi calcolo delle variazioni):

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0$$

$$L = \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} \equiv \sqrt{F}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\sqrt{F}} \left( g_{ik} \dot{u}^k + g_{ji} \dot{u}^j \right) \right] = 0$$

ma  $g_{ik} \dot{u}^k + g_{ji} \dot{u}^j = 2g_{ji} \dot{u}^j$  per la simmetria di  $g_{ij}$  e per il fatto che  $k$  e  $j$  sono indici muti (sommati) e si possono scambiare; avremo quindi:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \left\{ -\frac{1}{2F^{3/2}} \frac{dF}{dt} g_{ji} \dot{u}^j + \frac{1}{\sqrt{F}} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^i} \dot{u}^l \dot{u}^j + g_{ji} \ddot{u}^j \right) \right\} = 0$$

Se assumiamo che  $t$  sia proporzionale (o addirittura uguale) all'ascissa curvilinea  $s$ , allora  $F$  è stazionario e  $\frac{dF}{dt} = 0$ . Questo perchè:

$$ds = L dt \quad \rightarrow \quad ds^2 = L^2 (dt)^2 = F dt^2 \quad \rightarrow \quad F = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = 2 \left( \frac{ds}{dt} \right) \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

se  $s = \alpha t + \beta$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali (assumeremo per semplicità  $s = t$ ). Continuando sarà

$$g_{ji}\ddot{u}^j + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

e se poniamo, per la simmetria degli indici sommati  $l$  e  $j$ ,

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} \right] \dot{u}^l \dot{u}^j$$

Se sostituiamo, in questa relazione, l'indice  $l$  con l'indice  $k$  otteniamo

$$g_{ji}\ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad \text{e moltiplicando per } g^{il}$$

$$\delta_j^l \ddot{u}^j + \frac{1}{2} g^{il} \left[ \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad \text{che si può scrivere}$$

(ricordando le proprietà di  $\delta_j^l$ )

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

che esprime la condizione di stazionarietà, cioè l'equazione differenziale che definisce una geodetica. Il simbolo con tre indici  $\Gamma_{jk}^l$  è la cosiddetta **connessione affine** o *simbolo di Christoffel di 2° tipo*, definita come:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right)$$

cioè è una quantità dipendente da  $g_{ij}$  e dalle sue derivate prime. Si noti inoltre che  $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$ . Spesso, per semplificare ancor di più la notazione, si usa scrivere:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \equiv \partial_k g_{ij} \equiv g_{ij,k}$$

Si può verificare che  $\Gamma_{jk}^i$  non è un tensore, in quanto

$$\Gamma_{mn}^l \neq \frac{\partial u^l}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial u^m} \frac{\partial u^k}{\partial u^n} \Gamma_{jk}^i$$

Nell'equazione della geodetica è il termine a sinistra è un tensore di rango 1 (un vettore controvariante), anche se  $\Gamma_{jk}^l$  non è un tensore. Quindi, se esso è nullo in un sistema di riferimento, lo sarà anche in un sistema di riferimento generico.

**Esempio:** il piano in coordinate cartesiane

$ds^2 = du^2 + dv^2$ ; poichè  $g_{ij}$  è costante, le  $\Gamma$  sono tutte nulle, e le geodetiche sono le soluzioni di

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u &= as + b \\ v &= cs + d \end{aligned}$$

(con  $a, b, c, d$  numeri reali) cioè è l'equazione di una retta in forma parametrica.

Analogamente, anche se in modo più complesso, si può mostrare che gli archi di cerchio massimo sono le geodetiche della sfera.

**Esempio:** geodetiche nel piano in coordinate polari

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad g = r^2 \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u^1 = r \\ u^2 = \theta \end{matrix}$$

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right) \quad \text{ricordiamo la simmetria su } j \text{ e } k$$

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right) \quad \text{perché } g^{12} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2r = -r$$

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + (-r) \cdot \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (\text{II})$$

(se  $d\theta/ds = 0$  ho la retta passante per l'origine); se pongo  $d\theta/ds \equiv \theta'$  e divido (II) per  $\theta'$  e ottengo:

$$\frac{1}{\theta'} \frac{d\theta'}{ds} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \ln \theta' + \ln r^2 = \ln(\theta' r^2) = \text{cost}$$

cioè

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = h = \text{cost}$$

Invece di passare ad integrare la (I) uso un'altro sistema. Dalla  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , dividendo per  $ds^2$ , ottengo

$$1 = \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

Si può verificare che questa relazione è un integrale della (I). Da questa relazione si ha

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \quad \text{assieme alla} \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{h}{r^2}$$

Dividendo la seconda per la prima, per eliminare  $s$ , ho

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{h}{r\sqrt{r^2 - h^2}} = \pm \frac{d}{dr} \left[ \arccos \left( \frac{h}{r} \right) \right]$$

cioè

$$\theta = \pm \arccos \left( \frac{h}{r} \right) + \theta_0 \quad \rightarrow \quad \frac{h}{r} = \cos(\theta - \theta_0) \quad \rightarrow \quad r \cos(\theta - \theta_0) = h$$

Luoghessa di cammino

$$L = \int_a^b \left[ E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{du}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right) + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

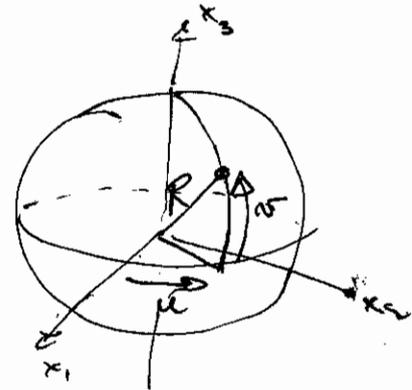
usando i  $g_{ij}$ :

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \left( \frac{du^i}{dt} \right) \left( \frac{du^j}{dt} \right)} dt$$

Per la sfera in coord. geografiche

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \alpha du^2 + R^2 dv^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

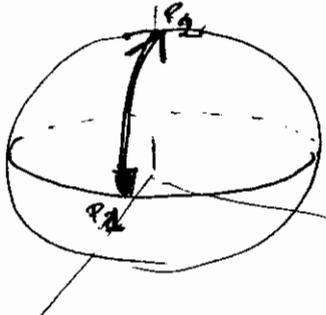


da cui, sulle sfera,

$$L = \int_a^b \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + R^2 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt =$$

$$= R \int_a^b \sqrt{\cos^2 \alpha \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

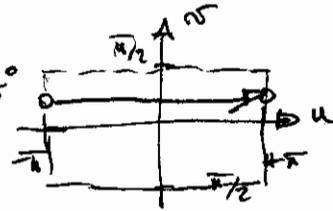
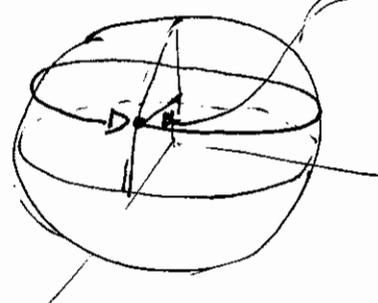
Caso 1



da  $P_1 \equiv (0,0) \rightarrow P_2 \equiv (0, \pi/2) \rightarrow w \equiv 0$   
 $v \equiv \frac{\pi}{2} \cdot t$   
 con  $t \in [0,1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot 0 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2} dt = R \cdot \frac{\pi}{2}$$

Caso 2



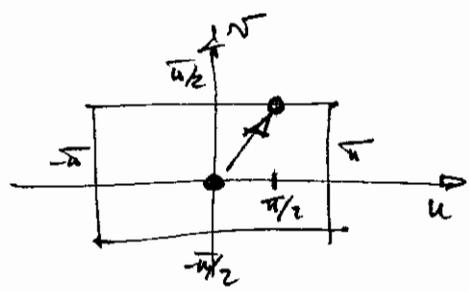
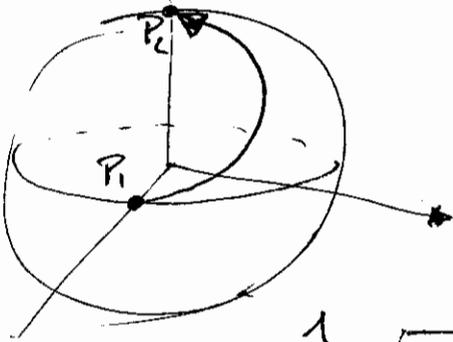
$u = 2\pi \cdot t$

$\nu = \nu_0$   
 $u$  da  $-\pi$  a  $+\pi$   
 (o da  $\phi$  a  $2\pi$ )  
 $t \in [0, 1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 \cdot (2\pi)^2 + R^2 \cdot \phi} dt = 2\pi R \cos \alpha_0$$

$\uparrow$   
 $= \cos t = \alpha_0$

Caso 3



$u = \pi/2 \cdot t$   
 $\nu = \pi/2 \cdot t$   
 $t \in [0, 1]$

$$L = R \int_0^1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} dt =$$

$$= R \int_0^1 \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 1} \cdot \frac{\pi}{2} dt \leftarrow \frac{\pi}{2} t \equiv d$$

$$= R \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 d + 1} dd$$

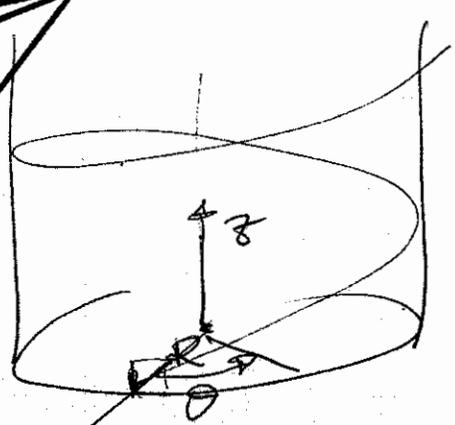
numericamente  
 $= 1.91 \cdot R$

$\int \sqrt{\cos^2 x + 1} dx = \sqrt{2} E(x | \frac{1}{2})$   
 $E(x|m)$  integrale ellittico di 2° tipo

Vedi ad esempio  
 Wolfram integrator

# SAT 2002

geodetice  
cilindric



$u^1, u^2$   
 $(\theta, z)$

$R = \text{const.}$

$ds^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$g = R^2$

$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left( \frac{\partial g_{rj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right)$

$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right)$

toate  $\Gamma$  sunt nule! ( $g_{ij}$  e const. e  $\frac{\partial g}{\partial u^i} = 0$ )

resta

$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$

$\frac{d^2z}{ds^2} = 0$

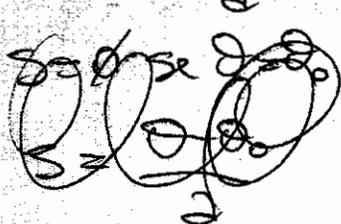
$\theta = aS + b$

$z = cS + d$

ex. di una  
elice

$S = \frac{\theta - b}{a}$

$z = \frac{c}{a} (\theta - b) + d \rightarrow \boxed{z = d\theta + \beta}$



$\theta = \theta_0 + \alpha(S - S_0)$

$z_0 = \alpha\theta_0 + \beta$

$\beta = z_0 - \alpha\theta_0$

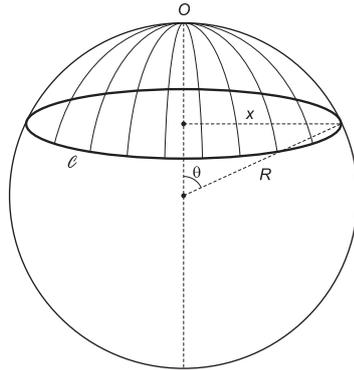
$z = \alpha\theta + z_0 - \alpha\theta_0 \rightarrow \boxed{z = z_0 + \alpha(\theta - \theta_0)}$

che è appunto l'equazione di una retta in coordinate polari ( $h$  rappresenta la distanza minima della retta dall'origine, ottenuta per  $\theta = \theta_0$ ).

Abbiamo definito le geodetiche su una superficie (che sono le analoghe alle rette nel piano cartesiano). Sappiamo che, sul piano, la circonferenza  $\mathcal{C}$  di un cerchio di raggio  $a$  è  $C = 2\pi a$ .

In modo analogo, su una superficie qualsiasi, per definire un cerchio di raggio  $a$  e centro  $O$ , tracciamo a partire da questo punto tutte le geodetiche e segniamo su ognuna il punto che dista da  $O$  di un'ascissa curvilinea pari ad  $a$ ; il luogo di tutti questi punti è la circonferenza richiesta, lungo la quale mi posso muovere (sempre lungo la superficie) e, con lo stesso regolo con cui misuro  $s = a$ , misurarne la lunghezza  $\mathcal{C}$ .

Vediamolo per una sfera di raggio  $R$ .



Avrò evidentemente (questo lo so perchè “vedo la sfera” in  $\mathbf{E}^3$ )

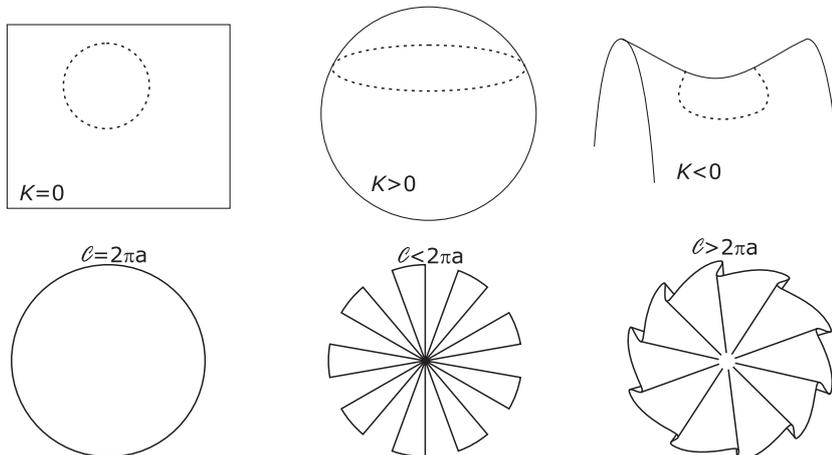
$$C = 2\pi x = 2\pi R \sin\left(\frac{a}{R}\right) \simeq 2\pi R \left[ \frac{a}{R} - \frac{1}{6} \frac{a^3}{R^3} + \dots \right] = 2\pi a - \frac{\pi}{3} \frac{a^3}{R^2} + \mathcal{O}(a^5)$$

Ma so che per la sfera  $1/R^2 = K$  e, se  $a \rightarrow 0$ , posso trascurare i termini di ordine superiore, per cui posso scrivere:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2\pi a - C}{a^3} \right)$$

Questo risultato, che vale in generale, ci mostra come effettivamente, con misure condotte *sulla* superficie, io posso ricavare la curvatura di Gauss  $K$ .

Per il piano  $2\pi a = C$  e  $K = 0$ ; per la sfera  $2\pi a > C$  e  $K > 0$ ; in un punto di sella  $2\pi a < C$  e  $K < 0$ .



La curvatura di Gauss è quindi una proprietà *intrinseca* e *locale* di una superficie. Poichè il risultato non dipende dal particolare sistema di coordinate utilizzato sulla superficie,  $K$  è una quantità invariante (come il  $ds^2$ , ad esempio), anche se può cambiare da punto a punto sulla superficie (invariante non significa costante).

Come si fa a determinare  $K$  a partire da  $g_{ij}$ ? Poichè il tensore metrico è quello che contiene l'informazione sulle distanze, e misurando queste ottengo  $K$ , ci deve essere un legame tra le due grandezze. Vediamo che  $K$  deve dipendere dalle derivate seconde (almeno) di  $g_{ij}$  in un punto. Questo deriva dal fatto che  $K$  è invariante, non dipende dal sistema di coordinate usato, ed è una quantità locale, cioè dipende dal comportamento di  $g_{ij}$  in un intorno infinitesimo del punto scelto.

Ma in un intorno infinitesimo di un punto io posso sempre scegliere un sistema di coordinate in cui  $g_{ij}$  è del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ed in cui le derivate  $g_{ij,k}$  sono nulle. Lo chiameremo *sistema localmente euclideo*.

Vediamo come questo sia, in principio, possibile. Ricordiamo che la trasformazione da  $g_{ij}$  a  $g'_{kl}$  è:

$$g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}$$

ed espandiamo  $g'_{kl}$  attorno al punto  $x_0$ :

$$g'_{kl}(x) = g'_{kl}(x_0) + g'_{kl,m}(x_0)(x^m - x_0^m) + \frac{1}{2}g'_{kl,mn}(x_0)(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \dots$$

dove

$$g'_{kl}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} \cdot g_{ij} \right]_{x_0}$$

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^m \partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}$$

$$= \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[ 2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} \quad \text{per la simmetria tra } i \text{ e } j \text{ e } k \text{ e } l$$

$$g'_{kl,mn}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,mn} \right]_{x_0} + \left[ 2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \text{derivate prime, seconde e terze...}$$

Se voglio, con un'opportuna trasformazione di coordinate, mettere  $g'_{kl}$  in una forma voluta in un intorno di  $x_0$ , ho a disposizione e devo specificare le seguenti quantità nella trasformazione:

	2 - D	3 - D	4 - D	N - D
$\left( \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 2 = 4$	9	16	$N^2$
$\left( \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 3 = 6$	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$\left( \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \right)_{x_0}$	$2 \times 4 = 8$	30	80	$\frac{N^2(N+1)(N+2)}{6}$

D'altro canto, il numero dei valori e delle derivate indipendenti del tensor metrico è il seguente:

	2 - D	3 - D	4 - D	N - D
$g'_{kl}(x_0)$	3	6	10	$\frac{N(N+1)}{2}$
$g'_{kl,m}(x_0)$	6	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$g'_{kl,mn}(x_0)$	9	36	100	$\left[ \frac{N(N+1)}{2} \right]^2$

Vediamo di trarre da questo le debite conclusioni per due, tre e quattro dimensioni:

- **2-D:** Se voglio fissare dei valori di  $g'_{kl}(x_0)$  ho 3 equazioni per 4 coefficienti: mi rimane un grado di libertà che, correttamente, corrisponde ad una rotazione degli assi attorno ad  $x_0$  nel piano. Se poi voglio che  $g'_{kl,m}(x_0) \equiv 0$ , ho 6 equazioni e 6 parametri, quindi lo posso fare. Se volessi anche  $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ , noto che ho 9 equazioni ma solo 8 parametri, e in generale il sistema è troppo condizionato per aver soluzioni: non è possibile quindi annullare localmente anche le derivate seconde della metrica.

- **3-D**: Ho 6 equazioni per 9 parametri: per fissare  $g'_{kl}(x_0)$ : ho 3 gradi di libertà corrispondenti alla rotazione del sistema di coordinate nello spazio (esempio: i tre angoli di Eulero). Posso porre  $g'_{kl,m}(x_0) = 0$  (18 equazioni in 18 incognite), ma non  $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$  (36 equazioni e 30 incognite)
- **4-D** (spazio di Minkowski): 10 equazioni per 16 parametri per fissare  $g'_{kl}(x_0)$  : ho 6 gradi di libertà corrispondenti a 3 rotazioni e 3 trasformazioni di Lorentz della velocità. Posso avere  $g'_{kl,m}(x_0) = 0$  con 40 equazioni e 40 incognite, mentre non si può avere  $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$  (100 equazioni e 80 incognite).

Poichè posso sempre mettere  $g_{ij}$  nella forma  $\delta_{ij}$  ed avere  $g_{ij,k} = 0$  in un punto, la curvatura dovrà dipendere dalle derivate seconde di  $g_{ij}$ . E la forma di dipendenza più semplice sarebbe quella lineare: vediamo se troviamo qualcosa del genere. Prima di farlo, però, dobbiamo affrontare un'altra questione.

### 2.3 Derivata covariante

Abbiamo visto che la derivata (il gradiente) di un campo scalare  $\phi$ ,  $\partial\phi/\partial u^i$ , è un vettore covariante. Potremmo allora pensare di derivare un campo vettoriale  $A_i(u^k)$ , ottenendo un tensore di rango due. *Ma non è così*. Il differenziale  $dA_i$  di un vettore  $A_i$ , ingrediente essenziale del rapporto incrementale, non si comporta in generale come un tensore. Infatti dalla legge di trasformazione

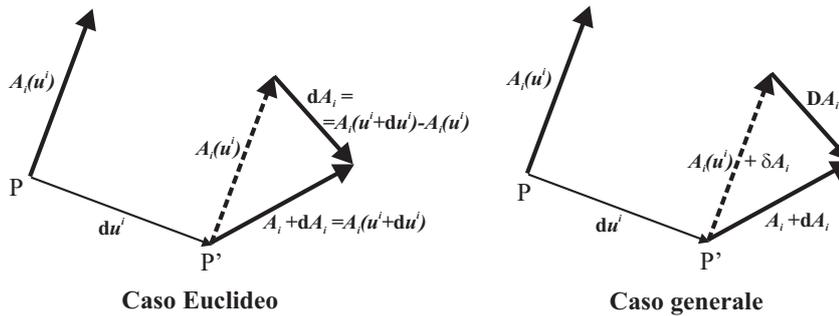
$$A_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} A'_k$$

discende che

$$dA_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial u'^k}{\partial u^i} = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} A'_k du^l$$

Vediamo che  $dA_i$  è un vettore soltanto se  $\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} = 0$ , cioè se le  $u'^i$  sono funzioni lineari delle  $u^i$  (come quando passo da un sistema di coordinate rettilinee ad un altro).

Perchè  $dA_i$  non è un vettore? Perchè la differenza  $dA_i = A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)$  è la differenza di due vettori che si trovano *in due punti diversi* (anche se infinitamente vicini). I due vettori  $A_i(u^i + du^i)$  e  $A_i(u^i)$  si trasformano quindi in modo diverso poichè i coefficienti delle trasformazioni dipendono dalla posizione. Affinchè la differenza di due vettori sia un tensore è necessario che i due vettori siano confrontati *nello stesso punto* (in questo caso entrambi, e quindi anche la loro differenza, si trasformano allo stesso modo). Per avere quindi una derivata che si comporti come un tensore occorre definire un nuovo tipo di derivata, la *derivata covariante*.



In uno spazio Euclideo, la derivata del vettore  $A_i(u^i)$  si esegue spostando  $A_i(u^i)$  parallelamente a sè stesso e lasciando invariati modulo e verso, fino a far coincidere il suo punto di applicazione con quello di  $A_i(u^i + du^i)$ . Poi, nel punto  $P'$ , si esegue la differenza e si calcola il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{du^i \rightarrow 0} \frac{A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)}{du^i}$$

Come si può fare qualcosa di analogo in uno spazio non Euclideo? In questo caso definiamo come spostamento parallelo da  $u^i$  a  $u^i + du^i$  quello spostamento che produce una variazione del vettore  $A_i$  delle quantità  $\delta A_i$  tali che, passando a un sistema localmente Euclideo (cosa, come abbiamo visto, sempre possibile - *localmente*), esse

si annullano:  $\delta A_i = 0$ . Quindi, in  $P'$ , avremo  $A_i + dA_i \equiv A_i(u^i + du^i)$  ed anche  $A_i + \delta A_i$ , corrispondente al trasporto parallelo di  $A_i(u^i)$  da  $P$  a  $P'$ . La differenza

$$DA_i = (A_i + dA_i) - (A_i + \delta A_i) = dA_i - \delta A_i$$

è un vettore, perchè è la differenza di due vettori che si trovano nello stesso punto. Si può quindi usare  $DA_i$  per definire il nuovo tipo di derivazione.

Resta ora da determinare  $\delta A_i$ . Se imponiamo che  $DA_i$  (*differenziale assoluto*) sia lineare come i differenziali ordinari,  $\delta A_i$  dovrà dipendere linearmente sia dal vettore trasportato  $A_i$  che dallo spostamento  $du^i$ , per cui potremo scrivere

$$\delta A_i = \Delta_{il}^m A_m du^l$$

dove le quantità  $\Delta_{il}^m$  sono funzioni delle coordinate e dipendono dal sistema di riferimento. Nel sistema localmente Euclideo i  $\Delta_{il}^m$  sono nulli, ma non lo saranno in generale, per cui vedo che i  $\Delta_{il}^m$  non rappresentano un tensore (ricordiamo che un tensore nullo in un sistema di riferimento rimane nullo in tutti gli altri). Questo ci fa pensare ad un altro oggetto a tre indici che non è un tensore, cioè la connessione affine. Come verificheremo tra poco è infatti  $\Delta_{il}^m \equiv \Gamma_{il}^m$ , per cui  $\delta A_i = \Gamma_{il}^m A_m du^l$ . Allora

$$DA_i = dA_i - \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} du^l - \Gamma_{il}^m A_m du^l$$

e la derivata covariante  $DA_i/\partial u^l$ , indicata anche con  $A_{i;l}$ , sarà

$$\frac{DA_i}{\partial u^l} = A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m$$

La derivata covariante di un tensore si può ricavare considerando questo come il prodotto di due vettori e richiedendo che essa soddisfi la regola di *Leibniz* per la derivazione di un prodotto. Allora, se  $T_{ik} \equiv A_i B_k$

$$\begin{aligned} T_{ik;l} &= B_k A_{i;l} + A_i B_{k;l} \\ &= B_k \left( \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m \right) + A_i \left( \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^m B_m \right) = \\ &= B_k \frac{\partial A_i}{\partial u^l} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m B_k - \Gamma_{kl}^m A_i B_m = \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m T_{mk} - \Gamma_{kl}^m T_{im} \end{aligned}$$

Questa relazione vale in generale. Osserviamo ora l'espressione

$$A_{i;l} = (g_{ik} A^k)_{;l} = g_{ik;l} A^k + g_{ik} A^k_{;l}$$

Ma  $A_{i;l}$  è un tensore, e posso usare il tensor metrico per scriverlo come  $A_{i;l} = g_{ik} A^k_{;l}$ ; se confronto con l'espressione scritta sopra vedo che  $g_{ik;l} = 0$ . Usiamo ora la relazione per la derivata covariante di un tensore per scrivere esplicitamente questo risultato:

$$g_{ik;l} = 0 \rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} = 0 \quad (1)$$

Facciamo ora, in questa relazione, una rotazione in senso antiorario degli indici  $i, k, l$  ed otteniamo

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{ki}^m g_{ml} - \Gamma_{li}^m g_{km} = 0 \quad (2)$$

Ed ancora una rotazione degli indici:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} = 0 \quad (3)$$

Se ora facciamo (1) + (3) - (2) avremo, sfruttando la simmetria degli indici bassi di  $\Gamma_{il}^m$  e di  $g_{ik}$ ,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} + \Gamma_{ki}^m g_{ml} + \Gamma_{li}^m g_{km} = 0$$

e semplificando

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - 2\Gamma_{kl}^m g_{im} = 0$$

Moltiplicando ora quest'ultima relazione per  $\frac{1}{2}g^{ij}$  si ottiene

$$\frac{1}{2}g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \right) = \Gamma_{kl}^m g_{im} g^{ij} = \Gamma_{kl}^m \delta_m^j = \Gamma_{kl}^j$$

Ritroviamo quindi la relazione che definisce la connessione affine, e con ciò abbiamo verificato l'assunzione  $\Delta_{il}^m \equiv \Gamma_{il}^m$ .

Consideriamo ora il prodotto scalare  $A_i B^i$ ; essendo una quantità scalare essa non cambia per trasporto parallelo:  $\delta(A_i B^i) = 0$  da cui

$$B^i \delta A_i + A_i \delta B^i = 0 \rightarrow A_i \delta B^i = -B^i \delta A_i$$

$$A_i \delta B^i = -B^i \Gamma_{il}^m A_m du^l$$

Essendo  $i$  ed  $m$  indici muti sommati, li scambio tra loro

$$A_i \delta B^i = -B^m \Gamma_{ml}^i A_i du^l$$

ed essendo  $A_i$  un vettore generico, dovrà essere

$$\delta B^i = -\Gamma_{ml}^i B^m du^l$$

da cui la relazione che esprime la derivata covariante per un vettore controvariante:

$$\frac{DB^i}{du^l} = B^i{}_{;l} = \frac{\partial B^i}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^i B^m$$

La regola generale per la derivazione covariante di un tensore di rango arbitrario consiste nel farne la derivata parziale e poi di aggiungere un termine del tipo  $+\Gamma$  per ogni indice controvariante ed un termine del tipo  $-\Gamma$  per ogni indice covariante.

## 2.4 Trasporto parallelo e tensore di curvatura

Sia  $u^i = u^i(s)$  l'equazione parametrica di una curva, con  $s$  ascissa curvilinea misurata a partire da un certo punto sulla curva. Sappiamo che  $du^i$  è un vettore (dalla definizione di vettore controvariante),  $ds$  è uno scalare, e  $du^i/ds \equiv v^i$  è quindi un vettore. In particolare,  $v^i$  è il *versore*<sup>1</sup> *tangente* alla curva.

Se fossi in uno spazio Euclideo, per definire una geodetica come un segmento di linea retta, direi che il versore tangente non cambia con  $s$ :

$$\frac{dv^i}{ds} = 0$$

Se ora voglio generalizzare questa relazione ad uno spazio qualsiasi, a 2 o più dimensioni, devo usare non la derivata normale, ma quella covariante:

$$\frac{Dv^i}{ds} = 0$$

Esplicitando i termini

$$\frac{Dv^i}{ds} = \frac{Dv^i}{du^l} \frac{du^l}{ds} = \frac{du^l}{ds} \left( \frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^i v^m \right) = 0$$

<sup>1</sup>Per verificare che  $v^i$  è un versore, vediamo quanto vale il suo modulo eseguendo il prodotto scalare  $v_i v^i$ :

$$v_i v^i = g_{ij} v^i v^j = g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \equiv 1 \quad \text{da} \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

cioè

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^i}{\partial u^l} \frac{du^l}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m \frac{du^l}{ds} &= 0 \\ \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m v^l &= 0\end{aligned}$$

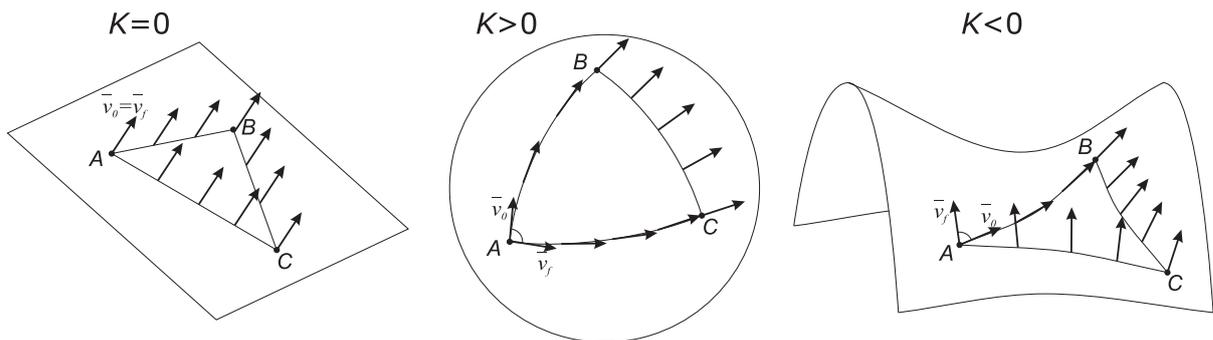
da cui, ricordando che  $du^i/ds \equiv v^i$ , abbiamo

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ml}^i \frac{du^m}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

Ritroviamo cioè la nostra equazione della geodetica (anche a riprova del fatto che, passando dal caso Euclideo a quello generale, si devono sostituire le derivate “normali” con quelle covarianti).

Vediamo che lungo la geodetica  $Dv^i = 0$ , cioè  $dv^i = \delta v^i$ : il versore  $v^i$ , trasportato parallelamente da un punto  $u^i$  sulla geodetica ad un punto  $u^i + du^i$  sulla stessa geodetica, coincide con il vettore  $v^i + dv^i$ , tangente alla geodetica nel punto  $u^i + du^i$ . Consideriamo ora un vettore  $A_i$  che viene trasportato parallelamente lungo la stessa geodetica. L'angolo che esso forma con  $v^i$ , versore tangente, sarà dato dal prodotto scalare  $A_i v^i$ . Ma uno scalare non cambia per trasporto parallelo, per cui lungo la geodetica l'angolo tra  $A_i$  e  $v^i$  resta costante: *un vettore trasportato parallelamente lungo una geodetica forma sempre lo stesso angolo con la tangente alla curva.*

Immaginiamo ora di trasportare parallelamente un vettore  $\bar{v}_0$  lungo un triangolo formato da pezzi di geodetica. Se siamo in uno spazio Euclideo (ad esempio su un piano) il vettore  $\bar{v}_f$  che ottengo dopo aver chiuso il cammino coinciderà con  $\bar{v}_0$ .



La stessa cosa non accade lungo un triangolo sferico: il vettore appare ruotato di un angolo che ha lo stesso verso di rotazione del verso in cui ho percorso il triangolo sferico. L'opposto accade se  $K < 0$ . Possiamo vedere la cosa anche in un altro modo: immaginiamo di andare da un punto  $A$  ad un punto  $B$  sia direttamente che passando per un punto  $C$ , sempre lungo archi di geodetica. Nello spazio Euclideo il risultato del trasporto parallelo lungo i due percorsi è il medesimo, ma la stessa cosa non accade sulle superfici curve (quanto qui detto per un triangolo formato da archi di geodetica vale per un percorso generico, che si può pensare come costituito da un gran numero di archetti di geodetica). Il risultato è che, a meno di non essere in uno spazio Euclideo, *non esiste un modo naturale e non ambiguo per muovere un vettore da un punto ad un altro*; possiamo trasportarlo parallelamente, ma il risultato dipende dal cammino, e non c'è una scelta naturale per questo. Quindi *posso confrontare due vettori solamente se sono applicati allo stesso punto*. Ad esempio, due particelle che passano una accanto all'altra hanno una velocità relativa ben definita (e minore di  $c$ , con  $c$  velocità della luce), ma due particelle in differenti punti di uno spazio generico non hanno una velocità relativa ben definita.

Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore  $A_k$  trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes<sup>2</sup>

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left( \frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{\partial A_l}{\partial u^m} \right) df^{lm}$$

<sup>2</sup>vedi Landau Lifsic, *Teoria dei Campi*, eq. (6.19)

dove  $df^{lm}$  è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso  $A_m du^m \rightarrow \Gamma_{km}^i A_i du^m$  per cui

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left[ \frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial u^m} \right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^m} \right] \Delta f^{lm}$$

Siccome  $A_i$  viene spostato parallelamente sulla curva

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\delta u^l} = \Gamma_{il}^n A_n$$

Allora

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{lm} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right] = \\ &= \frac{1}{2} A_i \Delta f^{lm} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato  $A_i$ , è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti  $i$  ed  $n$  nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poichè lo sono  $A_i$ ,  $\Delta f^{lm}$  e  $\Delta A_k$  (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si dà il nome di **tensore di Riemann - Christoffel** o **tensore di curvatura**:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i$$

(Nota bene: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati) Se in un punto, o una zona di spazio,  $R_{klm}^i = 0$ , allora  $\Delta A_k = 0$ : il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice **piatta**. Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui  $g_{ij}$  sia costante, perchè le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poichè un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora  $R_{klm}^i = 0$  in qualunque sistema di riferimento. Se invece  $R_{klm}^i \neq 0$  il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, **curvo** (da qui in nome di tensore di curvatura).

## 2.5 Proprietà del tensore di curvatura

Si può dimostrare che  $R_{klm}^i$  è l'unica quantità tensoriale che può essere costruita dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensor metrico si può scrivere la forma totalmente covariante  $R_{ijklm} = g_{ji} R_{klm}^i$ .

Consideriamo il tensore  $R_{klm}^i$  come scritto sopra, e mettiamoci nel sistema localmente euclideo in cui, nel punto  $u^i$ , risulta  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ . Allora le connessioni affini sono nulle, e le derivate covarianti si riducono a semplici derivate parziali. In questo sistema

$$R_{klm;j}^i = \frac{\partial}{\partial u^j} (R_{klm}^i) = \frac{\partial^2 \Gamma_{km}^i}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^i}{\partial u^j \partial u^m}$$

(si annullano in  $u^i$  le connessioni affini, ma non necessariamente le loro derivate). ermutando ciclicamente gli indici  $l$ ,  $m$  e  $j$  otteniamo:

$$R_{kmj;l}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{kj}^i}{\partial u^l \partial u^m} - \frac{\partial^2 \Gamma_{km}^i}{\partial u^l \partial u^j}$$

e ancora

$$R_{kjl;m}^i = \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m \partial u^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kj}^i}{\partial u^m \partial u^l}$$

## Esempio: geodetiche sulle sfere

(GS 1)

Se  $v^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$  è il vettore tangente alla traiettoria, l'eq. delle geodetiche si scrive come

$$\left| \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{me}^i v^m v^e = 0 \right|$$

Prima di procedere dimostriamo una proprietà che ci sarà utile:

- Date un'eq. differenziale (con condizione iniziale) del tipo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

le sue soluzioni è  $y(x) \equiv 0$

Per dimostrarlo consideriamo il problema simile

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) y \\ y(0) = \varepsilon \end{cases}$$

Integrando per separazione di variabili abbiamo

$$\int_{\varepsilon}^{y(x)} \frac{dy'}{y'} = \int_0^x f(x') dx' \equiv g(x) \text{ funzione finita}$$

La soluzione sarà  $\ln y(x) - \ln \varepsilon = g(x)$

cioè  $y(x) = \varepsilon e^{g(x)}$

Se  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $y(x) \rightarrow 0 \quad \forall$  valore di  $x$  c.v.d.

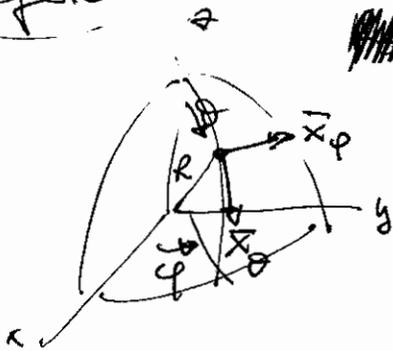
$$v^i = \frac{dx^i}{ds}$$

variable konstante

(GS2)

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{me}^i v^m v^e = 0 \quad \leftarrow \text{z.f. geodetische}$$

Sphäre



$$u^1 = \theta \quad u^2 = \varphi$$

$$\vec{x} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta)$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_\varphi = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$g_{\theta\theta} = \vec{x}_\theta \cdot \vec{x}_\theta = R^2$$

$$g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g = R^4 \sin^2 \theta$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \underline{R = \text{konstante!}}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right) \quad \begin{matrix} u^1 = \theta \\ u^2 = \varphi \end{matrix}$$

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{1l} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left( - \frac{\partial (R^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sin^2 \theta}{\partial \theta}$$

also

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial (R^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0$$

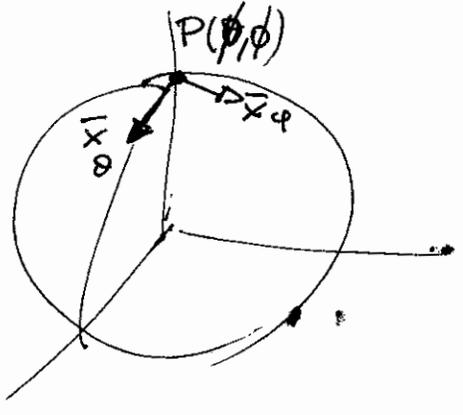
Eq. geodetiche:

- (I)  $\frac{d\sigma^\theta}{ds} = \sin \theta \cos \theta (\sigma^\varphi)^2$
- (II)  $\frac{d\sigma^\varphi}{ds} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sigma^\varphi \sigma^\theta$

NB:  $\theta = \theta(s)$   
 $\varphi = \varphi(s)$

Consideriamo la geodetica che parte dal polo  $P \equiv (\theta, \varphi)$ , in cui il vettore  $\hat{v}$  iniziale ha

$$\hat{v} \equiv \begin{cases} \sigma^\theta = 1 \\ \sigma^\varphi = \varphi \end{cases}$$



Dalla II  $\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma^\varphi}{ds} &= (\dots) \cdot \sigma^\varphi = f(s) \cdot \sigma^\varphi \\ \sigma^\varphi(s=\varphi) &= \varphi \end{aligned} \right.$  condizione iniziale

Per punto  $v=8\text{to}$  in GS1 questo implica che

$$\sigma^\varphi(s) \equiv 0 \quad \forall s$$

della I, essendo  $\sigma^\varphi(s) = 0$ , si ha

↳ G54

$$\frac{d\sigma^\theta}{ds} \equiv 0, \text{ cioè } \sigma^\theta(s) = \cos t = \sigma^\theta(\phi) = 1$$

Quindi il vettore tangente alle geodetiche mantiene invariata le sue componenti:  $\sigma^\theta = 1$  e  $\sigma^\varphi = 0$  e lo spostamento avviene lungo un meridiano, cioè un arco di cerchio massimo. Infatti:  $\sigma^\varphi = 0$  significa che  $\sigma^\varphi = \frac{d\varphi}{ds} = 0 \Rightarrow \varphi = \cos t = \phi$  (valore iniziale)

Questo discorso vale per ogni punto P della sfera, perché posso sempre fare una rotazione che porta P al polo. Quindi tutte le geodetiche sulla sfera sono archi di cerchio massimo.



Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore  $A_k$  trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes<sup>3</sup>

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left( \frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{\partial A_l}{\partial u^m} \right) df^{lm}$$

dove  $df^{lm}$  è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso  $A_m du^m \rightarrow \Gamma_{km}^i A_i du^m$  per cui

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left[ \frac{\partial (\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial (\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial u^m} \right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^m} \right] \Delta f^{lm}$$

Siccome  $A_i$  viene spostato parallelamente sulla curva

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\partial u^l} = \Gamma_{il}^n A_n$$

Allora

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{lm} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right] = \\ &= \frac{1}{2} A_i \Delta f^{lm} \left[ \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato  $A_i$ , è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti  $i$  ed  $n$  nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poichè lo sono  $A_i$ ,  $\Delta f^{lm}$  e  $\Delta A_k$  (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si dà il nome di **tensore di Riemann - Christoffel** o **tensore di curvatura**:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i$$

(Nota bene: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati) Se in un punto, o una zona di spazio,  $R_{klm}^i = 0$ , allora  $\Delta A_k = 0$ : il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice **piatta**. Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui  $g_{ij}$  sia costante, perchè le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poichè un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora  $R_{klm}^i = 0$  in qualunque sistema di riferimento. Se invece  $R_{klm}^i \neq 0$  il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, **curvo** (da qui in nome di tensore di curvatura).

## 2.5 Proprietà del tensore di curvatura

Si può dimostrare che  $R_{klm}^i$  è l'unico tensore che può essere costruito dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensor metrico si può scrivere la forma totalmente covariante  $R_{ijklm} = g_{ji} R_{klm}^i$ .

<sup>3</sup>vedi Landau Lifsic, *Teoria dei Campi*, eq. (6.19)

Consideriamo il tensore  $R^i_{klm}$  come scritto sopra, e mettiamoci nel sistema localmente euclideo in cui, nel punto  $u^i$ , risulta  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ . Allora le connessioni affini sono nulle, e le derivate covarianti si riducono a semplici derivate parziali. In questo sistema

$$R^i_{klm;j} = \frac{\partial}{\partial u^j} (R^i_{klm}) = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial u^j \partial u^m}$$

(si annullano in  $u^i$  le connessioni affini, ma non necessariamente le loro derivate). Permutando ciclicamente gli indici  $l$ ,  $m$  e  $j$  otteniamo:

$$R^i_{kmj;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kj}}{\partial u^l \partial u^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial u^l \partial u^j}$$

e ancora

$$R^i_{kjl;m} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial u^m \partial u^j} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kj}}{\partial u^m \partial u^l}$$

Sommando le tre relazioni, è facile vedere che si ottiene:

$$R^i_{klm;j} + R^i_{kmj;l} + R^i_{kjl;m} = 0.$$

Questa è la cosiddetta *Identità di Bianchi*. Ricordiamo che, anche se l'abbiamo ricavata nel sistema localmente euclideo, essendo una relazione tensoriale, essa vale in tutti i sistemi di riferimento.

Possiamo abbassare l'indice controvariante con il tensor metrico e otteniamo

$$R_{iklm;j} + R_{ikmj;l} + R_{ikjl;m} = 0.$$

Il tensore di Riemann presenta delle proprietà, vediamole nella versione completamente covariante  $R_{jklm} = g_{ji} R^i_{klm}$ :

- Proprietà di *simmetria*

$$R_{jklm} = R_{lmjk}$$

- Proprietà di *antisimmetria*

$$R_{jklm} = -R_{kjl m} = -R_{j k m l} = R_{k j m l}$$

- Proprietà di *ciclicità*

$$R_{jklm} + R_{jmkl} + R_{jlmk} = 0.$$

Dal tensore di Riemann, per contrazione, si può ricavare un tensore di rango 2, il *tensore di Ricci*, definito come:

$$R_{km} \equiv R^i_{kim}$$

(si contraggono gli indici  $i$  ed  $l$  di  $R^i_{klm}$ ). Per le proprietà di antisimmetria, se in  $R^i_{klm}$  contraggo invece  $i$  ed  $m$  riottengo il tensore di Ricci, ma con il segno cambiato:

$$R^i_{kli} = -R^i_{kil} = -R_{kl}$$

Il tensore di Ricci è simmetrico:

$$R_{mk} = R^i_{mik} = g^{ir} R_{rmik} = g^{ir} R_{ikrm} = R^r_{krm} = R_{km}$$

Esso è l'unico tensore simmetrico di rango 2 che si può ottenere da  $R^i_{klm}$ . Dal tensore di Ricci si ricava lo *scalare di Ricci* o *scalare di curvatura*:

$$R = g^{km} R_{km}$$

Esso è il solo scalare che si può ottenere da  $R^i_{klm}$ .

Le proprietà sopra evidenziate del tensore di Riemann fanno sì che, in  $N$  dimensioni, il numero delle sue componenti indipendenti sia  $\mathcal{N} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}$ . In particolare:

- Per  $N = 1$ ,  $\mathcal{N} = 0$  ed  $R_{1111} \equiv 0$  sempre: una curva ha sempre curvatura (intrinseca) nulla, non ho informazioni su come la curva è "embedded" in uno spazio a 2 o più dimensioni.
- Per  $N = 2$ ,  $\mathcal{N} = 1$ . C'è un'unica componente indipendente, ad esempio  $R_{1212}$ .

- Per  $N = 3$ ,  $\mathcal{N} = 6$ , tante quante sono le componenti del tensore di Ricci (simmetrico). Quindi per  $N = 3$  basta conoscere  $R_{km}$  per descrivere la curvatura di uno spazio.
- Per  $N = 4$ ,  $\mathcal{N} = 20$ , mentre  $R_{km}$  ha 10 componenti soltanto. È necessario ricorrere al tensore  $R^i_{klm}$  completo (a parte situazioni di particolari simmetria, e vedremo che così sarà nel caso dell'universo isotropo ed omogeneo).

Dall'identità di Bianchi, nella forma covariante, sfruttando le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann, si ha

$$R_{iklm;j} - R_{kimj;l} - R_{iklj;m} = 0 \quad / \cdot g^{il} g^{km}$$

$$g^{km} R^l_{klm;j} - g^{il} R^m_{imj;l} - g^{km} R^l_{klj;m} = 0$$

cioè

$$g^{km} R_{km;j} - g^{il} R_{ij;l} - g^{km} R_{kj;m} = 0$$

da cui

$$R_{;j} - R^l_{j;l} - R^m_{j;m} = R_{;j} - 2R^l_{j;l} = 0$$

dalla quale si ha

$$R^l_{j;l} = \frac{1}{2} R_{;j} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial u^j}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che  $R$  è uno scalare, non dipende quindi dal sistema di riferimento usato, e la sua derivata covariante coincide con la semplice derivata parziale. La quantità  $R^l_{j;l}$  rappresenta la *divergenza* (covariante) del tensore di Ricci. Consideriamo ora il tensore misto

$$R^l_j - \frac{1}{2} \delta^l_j R$$

La sua divergenza sarà (per la regola della derivazione di un prodotto ed essendo  $\delta^l_{j;l} = 0$ <sup>4</sup>)

$$R^l_{j;l} - \frac{1}{2} \delta^l_j \frac{\partial R}{\partial u^l} = R^l_{j;l} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial u^j} = 0$$

per quanto visto poco sopra. Il tensore in questione ha quindi divergenza (covariante) nulla. Se passiamo alle componenti covarianti otteniamo

$$g_{il} R^l_j - \frac{1}{2} g_{il} \delta^l_j R = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \equiv G_{ij}$$

dove  $G_{ij}$  è detto *tensore di Einstein*. Questo tensore ha importantissime proprietà: è *simmetrico*, ha *divergenza nulla* e, derivando dal tensore di Riemann, contiene *termini lineari nelle derivate seconde* della metrica e *quadratici nelle sue derivate prime*.

## 2.6 Il Theorema Egregium

In 2 dimensioni il *Theorema Egregium* di Gauss afferma che la curvatura di Gauss  $K$  si può ricavare a partire dal tensor metrico; in particolare, si ha che  $K = R_{1212}/g$ .

Diamo qui una giustificazione del Theorema Egregium. Abbiamo visto che, localmente, in un intorno del punto  $P$ , un elemento di superficie si può scrivere nella forma

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$$

che, messo nella forma  $\bar{x}(u, v)$ , si può esprimere come ( $x \equiv u$ ,  $y \equiv v$ ):

$$\bar{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{2\rho_1} + \frac{v^2}{2\rho_2} \right); \quad \bar{x}_u = \left( 1, 0, \frac{u}{\rho_1} \right) \quad \bar{x}_v = \left( 0, 1, \frac{v}{\rho_2} \right)$$

<sup>4</sup>  $\delta^l_{j;l} = \frac{\partial \delta^l_j}{\partial u^l} + \Gamma^l_{lk} \delta^k_j - \Gamma^m_{jl} \delta^l_m = \Gamma^l_{lj} - \Gamma^l_{jl} = 0$

$$\begin{aligned}
E &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} \\
F &= \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\
G &= \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}
\end{aligned}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{u^2}{\rho_1^2}\right) du^2 + 2 \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} du dv + \left(1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}\right) dv^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} & \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\ \frac{uv}{\rho_1 \rho_2} & 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad g = \det(g_{ij}) = 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} + \frac{v^2}{\rho_2^2}$$

Notiamo che, in  $P$ ,  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $g_{ij,k} = 0$  e sono le derivate seconde ad essere non nulle

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{\rho_2^2} & -\frac{uv}{\rho_1 \rho_2} \\ -\frac{uv}{\rho_1 \rho_2} & 1 + \frac{u^2}{\rho_1^2} \end{pmatrix} \quad K|_P = \frac{R_{1212}|_P}{g|_P}$$

$R_{1212} = g_{1k} R_{212}^k = g_{11} R_{212}^1 + g_{12} R_{212}^2$  ma in  $P$   $g_{12} = 0$  e  $g_{11} = 1$ , cioè  $R_{1212}|_P \equiv R_{212}^1|_P$

$$R_{212}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^r \Gamma_{r1}^1 - \Gamma_{21}^r \Gamma_{r2}^1$$

ma le  $\Gamma$  contengono le  $g_{ij,k}$  che in  $P$  sono nulle e rimane

$$R_{212}^1|_P = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} \Big|_P - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial v} \Big|_P$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\sigma} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + g^{12} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2g} \left[ \left(1 + \frac{v^2}{\rho_2^2}\right) \left(2 \cdot \frac{u}{\rho_1 \rho_2}\right) + \left(-\frac{uv}{\rho_1 \rho_2}\right) \left(\frac{2v}{\rho_2^2}\right) \right] = \frac{u}{g \rho_1 \rho_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\sigma} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u} \right) + g^{12} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial v} - \frac{\partial g_{21}}{\partial v} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{u}{g \rho_1 \rho_2} \right] = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{g - u \cdot \frac{2u}{\rho_1^2}}{g^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left[ \frac{1}{g} - \frac{2u^2}{g^2 \rho_1^2} \right]$$

Finalmente

$$K|_P = \frac{R_{1212}|_P}{g|_P} = \frac{R_{212}^1|_P}{g|_P} = \frac{\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u} \Big|_P}{g|_P} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \quad \text{C.V.D.}$$

Il fatto di dividere per  $g$  sembra, apparentemente, inessenziale. Ma ricordiamoci che  $K$  è uno scalare, cioè un tensore di rango zero, mentre  $R_{1212}$  è invece una componente di un tensore, che non è invariante per

LD: tensore di Ricci:

$$R_{11} = g^{il} R_{il11} = g^{11} R_{1111} + g^{12} R_{1121} + g^{21} R_{2111} + g^{22} R_{2121}$$

$\uparrow$  antisimmetria       $\uparrow$  idem=0       $\uparrow$  idem=0  
 $R_{1111} = -R_{1111}$   
 $\uparrow$   
 $= \phi$

$$= g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212}$$

$$R_{12} = R_{21} = g^{il} R_{il12} = g^{11} R_{1112} + g^{12} R_{1122} + g^{21} R_{2112} + g^{22} R_{2122}$$

$\downarrow$  =0       $\downarrow$  0       $\downarrow$  0       $\downarrow$  0

$$= g^{21} R_{2112} = -g^{21} R_{1212}$$

$$R_{22} = g^{il} R_{il22} = g^{11} R_{1212} + g^{12} R_{1222} + g^{21} R_{2212} + g^{22} R_{2222} = g^{11} R_{1212}$$

$\downarrow$  0       $\downarrow$  0       $\downarrow$  0       $\downarrow$  0

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{12} g^{21} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{1212} =$$

$$= 2 R_{1212} (g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) = 2 R_{1212} \det(g^{ij})$$

Ma  $g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{g_{22}}{g} & -\frac{g_{21}}{g} \\ -\frac{g_{12}}{g} & \frac{g_{11}}{g} \end{pmatrix} \rightarrow \det(g^{ij}) = \frac{1}{g^2} (g_{22} g_{11} - g_{12} g_{21}) = \frac{g}{g^2} = \frac{1}{g}$

Allora  $R = 2 \frac{R_{1212}}{g} \rightarrow \boxed{\frac{R}{2} = \frac{R_{1212}}{g} = K_{\text{Gauss}}}$

trasformazioni di coordinate, e lo stesso vale per  $g$ , che non è uno scalare. Tuttavia il loro rapporto si comporta come uno scalare. Il termine  $g$  serve anche da normalizzazione [se ad esempio trasformo  $x \rightarrow \alpha u \quad y \rightarrow \beta v$  ho  $\bar{x}(u, v) = (\alpha u, \beta v, \frac{\alpha^2 u^2}{2\rho_1} + \frac{\beta^2 v^2}{2\rho_2})$  e rifaccio tutti i conti trovo che il fattore  $1/g$  nella formula per  $K$  è essenziale:  $g|_P = \alpha^2 \beta^2$ ].

Osserviamo che la relazione che esprime il Theorema Egregium,  $K = R_{1212}/g$ , è una relazione tra tensori di rango zero, cioè scalari. Se, come abbiamo fatto vedere, essa vale in un sistema di riferimento particolare, essa vale in qualunque sistema di riferimento, ed il risultato particolare ottenuto si può estendere in generale.

Questo metodo di provare che una relazione tra tensori vale in un particolare sistema di riferimento e che quindi, avendo a che fare con oggetti tensoriali, essa vale in qualunque sistema di riferimento, è un metodo usato abitualmente nel calcolo tensoriale.

Il tensore di curvatura è legato alla curvatura di Gauss anche in spazi con un numero qualsiasi di dimensioni. Dato un punto  $P$  in uno di questi spazi, e due vettori  $a^\mu$  e  $b^\mu$  applicati nel punto  $P$ , possiamo tracciare per  $P$  una famiglia di curve geodetiche  $x^\mu(s, \alpha, \beta)$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali, che hanno come vettore tangente iniziale  $dx^\mu/ds = \alpha a^\mu + \beta b^\mu$ . Tutte queste geodetiche formano una superficie bidimensionale per  $P$ , con curvatura di Gauss data da<sup>5</sup>

$$K(a, b) = \frac{R_{\lambda\mu\nu\kappa} a^\lambda b^\mu a^\nu b^\kappa}{(g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) a^\lambda b^\mu a^\nu b^\kappa}$$

**Esempio:** calcolo della curvatura di Gauss

Su un elemento di superficie la metrica si può scrivere come

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{k}} dv^2$$

Calcolare  $K$  (curvatura di Gauss intrinseca).

Sarà  $K = R_{1212}/g$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2u/k} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad g = e^{2u/k} \quad \rightarrow \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2u/k} \end{pmatrix}$$

Dati i valori particolari di  $g_{ij}$  e  $g^{ij}$  sarà  $R_{1212} = g_{1k} R^k_{212} = R^1_{212}$

$$R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^r_{22} \Gamma^1_{r1} - \Gamma^r_{21} \Gamma^1_{r2} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial v} + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22} \Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{21} \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22}$$

Risulta

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{k} e^{2u/k}$$

$$\Gamma^1_{21} = 0 \quad \Gamma^1_{11} = 0 \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{k} \quad \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} = -\frac{2}{k^2} e^{2u/k}$$

$$R^1_{212} = -\frac{2}{k^2} e^{2u/k} - \left( \frac{1}{k} \cdot -\frac{1}{k} e^{2u/k} \right) = -\frac{1}{k^2} e^{2u/k} \equiv R_{1212}$$

$$K = \frac{R_{1212}}{g} = -\frac{1}{k^2} e^{2u/k} / e^{2u/k} = -\frac{1}{k^2}$$

**Esempio:** curvatura della pseudosfera

La pseudosfera può essere rappresentata da una superficie di rivoluzione: dalla rotazione della *trattrice*<sup>6</sup> attorno al suo asintoto

<sup>5</sup>Vedi Weinberg 1972, paragrafo 6.9

<sup>6</sup>Consideriamo un segmento di lunghezza  $a$  adagiato sull'asse  $x$  di un sistema cartesiano  $Oxy$ , con un estremo nell'origine e l'altro nel punto  $P : (a, 0)$ ; se l'estremo inizialmente nell'origine si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse  $y$ , l'altro estremo descrive una curva detta *trattrice*, dal latino *trahere*, tirare. La rotazione della trattrice attorno all'asse  $y$  produce la superficie chiamata pseudosfera. Il nome le deriva dal fatto che la curvatura è costante, come per la sfera, ma ha segno opposto.

$$\bar{x}(u, v) = \left( a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left[ \cos u + \ln \left( \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right] \right) \quad \text{con } 0 < u < \pi/2$$

Trovare la metrica della superficie e  $K$

$$\bar{x}_u = \left( a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \left[ -\sin u + \frac{1}{\operatorname{tg} u/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u/2} \cdot \frac{1}{2} \right] \right) = \left( a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right)$$

$$\bar{x}_v = \left( -a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0 \right)$$

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = a^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 u}$$

$$G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = a^2 \sin^2 u$$

$$F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 u} du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$$

Se trasformo  $(u, v) \rightarrow (x, y)$   $\begin{cases} x = a \ln(\sin u) \\ y = av \end{cases} \quad dx = \frac{a}{\operatorname{tg} u} du \quad dy = a dv \quad e^{x/a} = \sin u$

da cui vedo che  $ds^2 = dx^2 + e^{2x/a} dy^2$  è una metrica equivalente.

Dall'esercizio precedente, inoltre, vedo che  $K = -1/a^2$

.....

### 3 Relatività generale

#### 3.1 Lo spazio di Minkowski

Nella relatività ristretta, passando da un sistema di riferimento ad un altro, si conserva (= è invariante) la distanza infinitesima tra due eventi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Se definisco  $x^0 = ct$ ;  $x^1 = x$ ;  $x^2 = y$ ;  $x^3 = z$  posso scrivere

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{con} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

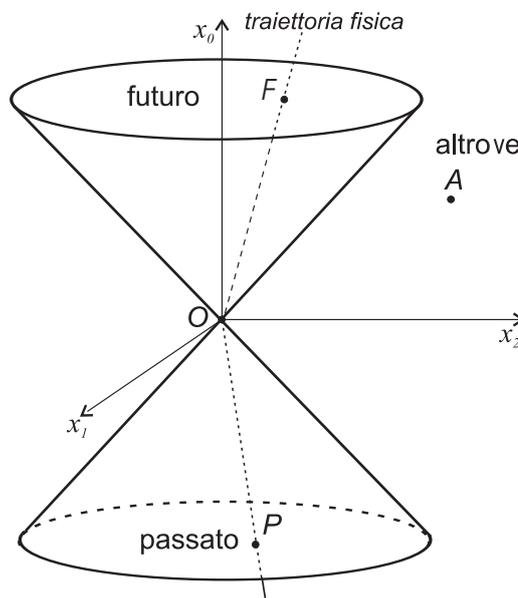
Abbiamo la metrica dello spazio di Minkowski, che è “pseudo-euclideo”, ma è comunque piatto: infatti gli  $\eta_{\alpha\beta}$  sono costanti e quindi i  $\Gamma_{jk}^i$  e  $R_{ijk}^h$  sono nulli. Nel seguito useremo, per convenzione, gli indici *greco*  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  se questi variano da 0 a 3, mentre useremo gli indici *italici*  $i, j, k, \dots$  se questi variano da 1 a 3. Attenzione: in letteratura si trova anche la convenzione opposta. Anche  $\eta_{\alpha\beta}$  è definito spesso con i segni opposti, cioè con la *segnatura*  $(-1, 1, 1, 1)$  invece di  $(1, -1, -1, -1)$ .

Diciamo anche che l'intervallo  $ds^2$  è:

- di **tipo tempo** (*time like*) se  $ds^2 > 0$  (corrispondente ad una traiettoria fisica con  $v < c$ )
- di **tipo spazio** (*space like*) se  $ds^2 < 0$
- di **tipo luce** o **nullo** (*light like, null*) se  $ds^2 = 0$  (corrispondente al moto di particelle, come i fotoni, che si muovono con velocità  $v = c$ )

Se rappresento lo spazio-tempo (eliminando una delle coordinate spaziali) attorno ad un evento preso come origine, posso dividerlo in tre zone definite dal cono in figura:

- **futuro**: è la zona con la quale l'evento può interagire tramite corpi che seguono una traiettoria fisica.
- **passato**: è la zona dai cui eventi passati l'evento in O può essere influenzato.
- **altrove**: è la zona dai cui eventi non posso essere stato influenzato, nè posso influenzare, perchè occorrerebbero segnali con  $v > c$ . Un osservatore in moto rispetto ad O può vedere O ed A accadere contemporaneamente.



Ogni osservatore ha con se un regolo ad un orologio: il tempo scandito da questo orologio è il tempo proprio  $\tau$ . Per un osservatore, per il quale due eventi fisicamente connessi avvengono in tempi diversi ma nello stesso luogo ( $dx = dy = dz = 0$ ), risulta  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ : tra  $ds$  e  $d\tau$  c'è proporzionalità.

La distanza  $ds$  tra due medesimi eventi, per un osservatore per cui avvengono nello stesso punto, e per un altro osservatore per cui avvengono a distanza  $dl$ , sarà la stessa:

$$ds^2 = cd\tau^2 = cdt^2 - |d\vec{l}|^2 \quad \rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \right) = dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

dove  $v$  è la velocità della particella per l'osservatore che la vede in moto, ed anche la velocità relativa dei due osservatori. Detto  $\beta \equiv v/c$  e  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$  si ha che  $dt = \gamma d\tau$ . Poichè  $\gamma \geq 1$  allora  $dt \geq d\tau$ : l'intervallo tra due "tic" di un orologio è più corto per l'orologio "proprio", gli orologi in moto appaiono più lenti (si pensi al paradosso dei gemelli).

Definiamo la **quadrivelocità** come  $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{ds}$ ; si tratta di un vettore poichè  $dx^\alpha$  è un vettore e  $ds$  uno scalare.

In un sistema generico, non in quiete con la particella la quale ha una velocità  $\bar{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ , sarà

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{d(ct)}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

$$u^i = \frac{dx^i}{cd\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{v^i}{c} = \gamma \beta^i$$

per cui posso scrivere che  $u^\alpha = \gamma(1, \vec{\beta})$ . Se la particella è in quiete si ha  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ .

La quantità  $u^\alpha u_\alpha$  è invariante:  $u^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = u^0 u^0 - (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) = \gamma^2 - (\gamma^2 v^2/c^2) = 1$ ;  $u^\alpha$  rappresenta il vettore (versore) tangente alla traiettoria della particella (nello spazio-tempo 4-D).

Definiamo ora il **quadrimento**  $P^\alpha = m_0 u^\alpha$  dove  $m_0$  è la massa a riposo della particella. Se ricordiamo che  $\bar{P} = m\bar{v} = \gamma m_0 \bar{v}$ ;  $E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma$  abbiamo:

$$P^0 = \gamma m_0 = E/c^2 \quad P^i = \gamma m_0 \frac{v^i}{c} = m \frac{v^i}{c}$$

$$P^\alpha P_\alpha = \gamma^2 m_0^2 - \gamma^2 m_0^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 m_0^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$

$$P^\alpha P_\alpha = m_0^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{1}{c} \bar{P} \cdot \bar{P} \quad \rightarrow \quad m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\bar{P}|^2$$

Dire che  $P^\alpha = cost \Rightarrow E = cost$  e  $\bar{P} = cost$ : è la conservazione dell'energia e del momento (quantità di moto).

La **quadriaccelerazione** è  $\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \frac{du^\alpha}{ds}$ . Nella relatività ristretta, mentre posizione, velocità e tempo sono relativi, l'accelerazione è assoluta: se è zero in un sistema, è zero in qualunque sistema inerziale (legato al primo da una trasformazione di Lorentz); questo perchè la quadriaccelerazione è un tensore, come  $u^\alpha$ .

L'equazione per le **geodetiche** è sempre:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Se la metrica è data da  $\eta_{\alpha\beta}$ , allora i  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sono nulli e resta  $d^2 x^\alpha / ds^2 = 0$ , cioè  $x^\alpha = a^\alpha \cdot s + b^\alpha$ , ovvero

$$\begin{cases} ct = a^0 \cdot s + b^0 \\ \vec{x} = \vec{a} \cdot s + \vec{b} \end{cases}$$

e la traiettoria è una retta percorsa di moto rettilineo uniforme.

Se uso un altro tensore metrico, espresso ad esempio in coordinate polari sul piano (per semplicità):  $ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2)$ , allora i  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  non sono tutti nulli, ma ottengo sempre come traiettoria una retta (ma ora in coordinate polari).

*N.B.*: Mentre nello spazio 3-D Euclideo la geodetica tra due punti è un segmento di retta, quindi è la distanza minima tra due punti, nella Relatività la quantità  $\int_A^B ds$  è massimo rispetto a variazioni di percorso con gli estremi fissi. È  $\Delta\tau = \Delta s/c$ , e si pensi al paradosso dei gemelli, nel quale il tempo è massimo per il gemello che è rimasto fermo.

### 3.2 Il tensore energia-impulso

Per affrontare la Relatività Generale e la Cosmologia ci serve un “oggetto” che esprima le proprietà di un mezzo continuo, come densità e velocità, e le colleghi alla conservazione dell’energia e della quantità di moto.

Consideriamo inizialmente della materia incoerente, le cui particelle (per il momento) non interagiscono (polvere - “*dust*”); il campo di materia sarà quindi descritto in ogni punto dalla quadrivelocità  $u^\alpha = \gamma(1, \bar{v}/c)$  e dalla densità propria  $\rho_0(x)$ , cioè quella misurata da un osservatore che segue il fluido. Con queste grandezze posso formare un tensore simmetrico di rango 2 nel modo più semplice come:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$$

Vediamo come è fatto in dettaglio questo tensore:

$$T^{00} = \rho_0 c^2 \gamma^2 = \gamma^2 \rho_0 c^2 = \rho c^2 \quad \text{posto } \rho = \gamma^2 \rho_0$$

Per interpretare questo risultato ricordiamo che la massa è  $m = \gamma m_0$  ( $m_0$  massa a riposo) e che un elemento di volume in moto appare contratto di un fattore  $1/\gamma$ , per cui la densità cresce di un ulteriore fattore  $\gamma$ . Perciò se la densità propria è  $\rho_0$ , un osservatore rispetto al quale il fluido ha velocità  $\bar{v}$  misurerà una densità  $\gamma^2 \rho_0$ .

$T^{00}$  misura quindi la densità di massa-energia (qui l’unico contributo all’energia viene dal moto della materia).

Le componenti di  $T^{\alpha\beta}$  possono essere scritte:

$$T^{\alpha\beta} = \rho c^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_y v_x/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_z v_x/c^2 & v_z v_y/c^2 & v_z^2/c^2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Vediamo come le equazioni del moto possono essere ricavate in modo sintetico come  $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

- Per  $\alpha = 0$  avrò  $\partial_\beta T^{0\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0$  che scritta per esteso dà:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial z} = 0$$

che si può semplificare come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

cioè l’equazione di continuità per un fluido, che esprime la conservazione della massa-energia.

- Per  $\alpha = 1, 2, 3$  ho

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 3)$$

Moltiplicando la prima per  $\hat{i}$  (versore relativo all’asse x), la seconda per  $\hat{j}$  e la terza per  $\hat{k}$  e sommando, le tre si condensano in

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) = 0$$

che, sviluppando e usando poi l’equazione di continuità, diventa

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) \right] + \rho v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0$$

$$\text{cioè} \quad \rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right] = 0 \quad (I) \Leftrightarrow \quad \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \quad (II)$$

Questa relazione, tipica della fluidodinamica, rappresenta l'equazione del moto per un fluido senza pressione, viscosità e forze esterne. Esprime quindi la *conservazione della quantità di moto*. In particolare, nella forma (I) si immagina di osservare il fluido in un punto fisso e di vedere come in esso evolve il moto (punto di vista cosiddetto *Euleriano*), mentre nella forma (II) si immagina di seguire nel loro moto le particelle di fluido (punto di vista cosiddetto *Lagrangiano*).

Vediamo quindi che il tensore  $T^{\alpha\beta}$  esprime tutte le proprietà energetiche e dinamiche del fluido (polvere) in questione.  $T^{\alpha\beta}$  è il **tensore energia-impulso**.

In un *sistema inerziale localmente in quiete (SILQ)* rispetto al fluido, nel quale quindi  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ ,  $T^{\alpha\beta}$  ha la forma particolarmente semplice

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

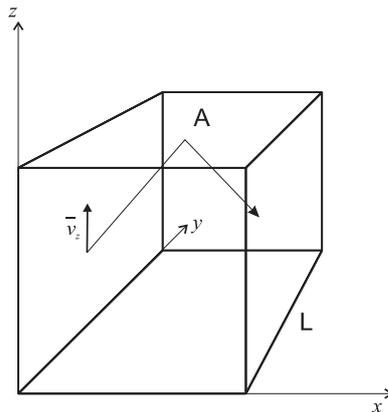
Veniamo adesso a considerare il caso in cui le particelle interagiscono nel modo più semplice, cioè attraverso urti dovuti all'agitazione termica: è presente una *pressione* del fluido. Assumiamo che non vi sia trasporto di energia per conduzione o irraggiamento e non vi sia viscosità. Il **fluido** così definito è detto **perfetto**.

Se siamo nel *SILQ*, ora  $T^{\alpha\beta}$  non sarà più come quello scritto appena sopra, con solo  $T^{00} \neq 0$ . Le particelle avranno dei moti casuali attorno allo zero delle posizioni e delle velocità. Devo rifarmi quindi alla forma precedente (\*\*) di  $T^{\alpha\beta}$ , in cui però i termini che compaiono andranno mediati sul tempo e sulla distribuzione delle velocità delle particelle.

Questo però mi dà subito un'informazione importante: tutti i termini al di fuori della diagonale contengono elementi come  $v_x$ ,  $v_y$  o  $v_z$  o loro prodotti; quando medio  $\langle v_x \rangle = 0$  ed anche  $\langle v_x v_y \rangle = \langle v_x \rangle \langle v_y \rangle = 0$  (assumendo  $v_x$  e  $v_y$  scorrelate). Quindi  $T^{\alpha\beta}$  è diagonale in *SILQ*.

$T_{SILQ}^{00}$  (che esprime la densità di massa-energia) non sarà più semplicemente  $\rho_0 c^2$ , ma piuttosto un  $\rho c^2$  con  $\rho > \rho_0$  per tener conto del fatto che le particelle hanno velocità diverse da zero anche in *SILQ* e la loro densità di massa-energia è maggiore che nel caso della pura polvere. Per gli altri termini diagonali avremo  $\langle \rho v_x^2 \rangle$ ,  $\langle \rho v_y^2 \rangle$ ,  $\langle \rho v_z^2 \rangle$ .

Per interpretare questi termini facciamo una piccola digressione sulla teoria cinetica dei gas.



Siano  $\bar{v}$  e  $\bar{P}$  la velocità e la quantità di moto di una particella, ed  $f_z$  la forza media esercitata da questa particella perpendicolarmente alla superficie  $A$  (vedi figura)

$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \bar{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

$$f_z = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2P_z}{2L/v_z} = \frac{1}{L} P_z v_z$$

per una particella.

Per  $N$  particelle la forza sarà (indichiamo con  $p$  la pressione)

$$F_z = \frac{N}{L} P_z v_z = \frac{N}{L^3} P_z v_z L^2 \equiv p \cdot A$$

per cui, facendo in realtà la media sulla distribuzione delle velocità, sarà ( $A = L^2$ )

$$p = \frac{N}{L^3} \langle P_z v_z \rangle = n \langle P_z v_z \rangle$$

$$\bar{P} \cdot \bar{v} = P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z = 3P_z v_z \quad (\text{per simmetria})$$

$$\text{e quindi} \quad p = \frac{n}{3} \langle \bar{P} \cdot \bar{v} \rangle$$

che vale anche per un gas degenere e relativistico. Possiamo riscrivere questa relazione come  $p = \frac{n}{3} \langle \bar{P} \cdot \bar{v} \rangle = \langle n P_x v_x \rangle = \langle n \cdot m v_x^2 \rangle = \langle \rho \cdot v_x^2 \rangle$ . Quindi, per un fluido perfetto, sarà:

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

dove  $\rho$  tiene conto anche della massa-energia dovuta all'agitazione termica.

È facile verificare che, in SILQ, si può sintetizzare il tutto con

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}$$

Infatti, ad esempio, per  $T^{00}$ , essendo  $u^0 = 1$  e  $\eta^{00} = 1$  si ha  $T^{00} = p + \rho c^2 - p = \rho c^2$

Ma questa espressione è un tensore, e quindi varrà in ogni sistema di riferimento, con  $u^\alpha \neq (1, 0, 0, 0)$  ed eventualmente l'opportuno tensore metrico al posto  $\eta^{\alpha\beta}$ . Scritta con gli indici covarianti sarà quindi:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

### **Esempio:** le equazioni dell'idrodinamica relativistica

Vediamo cosa corrisponde in questo caso alla relazione

$$\begin{aligned} \partial_\beta T^{\alpha\beta} &= [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Per  $\alpha = 0$ , ricordando che  $u^\alpha = \gamma(1, \bar{v}/c)$ , si ottiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + \frac{\partial}{\partial x} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_x}{c}] + \frac{\partial}{\partial y} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_y}{c}] + \frac{\partial}{\partial z} [(p + \rho c^2) \gamma^2 \frac{v_z}{c}] - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Sviluppando le derivate spaziali si arriva a scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + (p + \rho c^2) \gamma^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} [(p + \rho c^2) \gamma^2] &= \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} [(p + \rho c^2) \gamma^2] + (p + \rho c^2) \gamma^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{v} &= \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

Questa relazione non è particolarmente illuminante. Vedremo tra poco, invece, una relazione più utile e comprensibile, ottenuta trasformando la  $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$  in una relazione scalare.

Se  $\alpha = 1, 2, 3$ , con un metodo simile a quello seguito sopra per la "polvere", si ottiene

$$\left( \frac{p}{c^2} + \rho \right) \gamma^2 \frac{d\bar{v}}{dt} = - \left[ \bar{\nabla} p + \bar{v} \frac{\partial(p/c^2)}{\partial t} \right]$$

che è una generalizzazione della relazione  $\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\bar{\nabla} p$  dell'idrodinamica (*equazione di Eulero*). Come si vede,  $(\rho + p/c^2)$  svolge il ruolo di "densità di massa inerziale".

Possiamo aggiungere la *conservazione del numero di particelle*, o equazione di continuità, che si può introdurre partendo dalla quantità

$$J^\alpha \equiv n u^\alpha$$

che corrisponde ad una *corrente*, dove  $n$  è la densità numerica di particelle in un sistema in quiete col fluido. Ponendo la divergenza di  $J^\alpha$  uguale a zero si ha conservazione del numero di particelle:

$$\begin{aligned} J^\alpha_{,\alpha} &= \frac{\partial (n u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n\gamma \frac{v_x}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n\gamma \frac{v_y}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( n\gamma \frac{v_z}{c} \right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + \bar{\nabla} \cdot (n\gamma \bar{v}) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\gamma) + n\gamma \bar{\nabla} \cdot \bar{v} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) n\gamma = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} (n\gamma) + (n\gamma) \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$$

.....  
 .....

**Esempio:** *conservazione dell'entropia per particella*

Vediamo ora di ricavare, come detto poco sopra, una relazione scalare dalla  $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$ ; per fare questo la moltiplicheremo per  $u_\alpha$ .

Partiamo dal fatto che, come abbiamo già visto,  $u^\alpha u_\alpha = 1$ . Sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (u^\alpha u_\alpha) &= u^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \eta^{\alpha\gamma} u_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= u_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 2u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \end{aligned}$$

da cui  $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$  (abbiamo sfruttato il fatto che  $\alpha$  e  $\gamma$  sono indici muti). Se riprendiamo l'equazione che esprime la divergenza di  $T^{\alpha\beta}$  e la moltiplichiamo per  $u_\alpha$  otteniamo

$$u_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$

e, sviluppando la derivata del primo termine, abbiamo

$$u_\alpha \left\{ u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] + (p + \rho c^2) u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} u^\beta = 0$$

Se ricordiamo che  $u^\alpha u_\alpha = 1$  e che  $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} &= 0 \\ (p + \rho c^2) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (p + \rho c^2) - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla conservazione del numero di particelle abbiamo

$$\frac{\partial (n u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow n \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial n}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{u^\beta}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta}$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella precedente relazione e raccogliendo  $u^\beta$  abbiamo

$$u^\beta \left\{ \frac{\partial (p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p + \rho c^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{p + \rho c^2}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{\partial(p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} n - (p + \rho c^2) \frac{\partial n}{\partial x^\beta} \right] = \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial(p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p + \rho c^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta} \right]$$

Sostituendo nella precedente

$$\begin{aligned} u^\beta \left\{ n \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{p + \rho c^2}{n} \right) - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} &= 0 \quad \Rightarrow \quad u^\beta \left\{ n \left[ \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{p}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\rho c^2}{n} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0 \\ u^\beta \left\{ n p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{n}{n} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + n \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\rho c^2}{n} \right) - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} &= 0 \\ n u^\beta \left\{ p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\rho c^2}{n} \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Ricordiamo ora il primo principio della termodinamica:  $dU = dQ + dL$ ; se introduciamo l'entropia  $S$  possiamo scrivere:  $TdS = dU + pdV$ , dove l'energia interna è  $U = \rho c^2$ . Se lo riscrivo riferendomi ad una particella avrò  $Td\sigma = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right)$ , con  $\sigma$  entropia per particella. Sviluppando i differenziali si ha

$$T \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\rho c^2}{n} \right) dx^\beta + p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{1}{n} \right) dx^\beta \quad / \cdot \frac{1}{ds}$$

Se ricordiamo che  $\frac{dx^\beta}{ds} \equiv u^\beta$  e confrontiamo questa relazione con la precedente otteniamo

$$u^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} = 0$$

che, sviluppato, diventa

$$\begin{aligned} \gamma \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \frac{v_x}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma \frac{v_y}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \gamma \frac{v_z}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \sigma &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Si ha come risultato che, nel sistema in cui il fluido è in quiete, l'entropia per particella (o, se preferiamo, l'entropia per un certo numero  $N$  di particelle contenute in un volume cubico  $V$  di spigolo  $L$ , che può variare mantenendo però sempre al suo interno lo stesso numero di particelle) è costante. Questo è legato al fatto che, nel fluido ideale, non c'è scambio di energia per conduzione (o irraggiamento), né vi è dissipazione. Dal 1° principio della termodinamica, nel sistema che segue il fluido,  $dQ = dU + pdV$  e  $U = \rho c^2 \cdot V$ , per cui

$$dQ = \rho c^2 dV + V d(\rho c^2) + p dV = (p + \rho c^2) dV + V d(\rho c^2) = T dS$$

Poichè  $dQ = 0 \rightarrow dS = 0$ .

Se scriviamo  $p = w\rho c^2$  (con  $w$  costante, anche se, più in generale, potrà essere  $w = w(T)$ ),

$$(1 + w)\rho c^2 dV = -V d(\rho c^2)$$

e se  $w = \text{cost}$ , ho  $d\rho/\rho = -(1 + w) dV/V$ , cioè  $\rho V^{1+w} = \text{costante}$ .

Incontreremo tre casi interessanti in cosmologia:

1. Per un gas non-relativistico  $p \ll \rho_0 c^2$  ( $\rho \approx \rho_0$ ) per cui  $w \simeq 0$  e quindi  $\rho_0 V \simeq \text{cost}$ . Detto  $L$  lo spigolo di un volume cubico  $V = L^3$ , abbiamo  $\rho \propto 1/L^3$
2. Per un gas di fotoni  $\rho_{rad} \propto aT^4$  e  $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ ;  $w = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned} T^4 V^{4/3} &= \text{cost} & TV^{1/3} &= \text{cost} & V \propto L^3 &\rightarrow T \propto \frac{1}{L} \\ \rho_{rad} V^{4/3} &= \text{cost} & V \propto L^3 &\rightarrow V^{4/3} \simeq L^4 &\rightarrow \rho_{rad} \simeq \frac{1}{L^4} \end{aligned}$$

3. Se  $p = -\rho c^2$  ( $w = -1$ )  $\rightarrow \rho V^0 = \text{cost}$  cioè  $\rho$  non dipende da  $V$  e da  $L$  e rimane costante se  $V$  varia.

Possiamo esprimere il primo principio in un' altra forma utile, ponendo  $V \propto L^3$

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)dV + Vd\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \cdot 3L^2dL + L^3d\rho = 0$$

da cui

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dL}{L} + d\rho = 0$$

e, tenendo conto di una dipendenza di  $L$  dal tempo,

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{L}}{L} + \dot{\rho} = 0$$

Abbiamo scritto  $\partial_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$  nello spazio di Minkowski; se però i  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  non sono tutti nulli, ed in generale sarà così, al posto della derivata parziale semplice si deve utilizzare la derivata covariante:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

che esprime le leggi di conservazione in un sistema di riferimento generico.

### 3.3 Il principio di Mach

Per la dinamica di Newton le proprietà inerziali di un corpo dipendono dal suo moto rispetto ad uno spazio assoluto. *Ernst Mach*<sup>7</sup> suggerì invece che l'inerzia è legata al moto rispetto alla distribuzione totale di materia dell'universo. Il moto è solamente relativo agli altri corpi: operativamente possiamo misurare solo il moto della materia relativamente ad altra materia, non rispetto allo spazio assoluto di Newton. Se vi fosse un solo corpo nell'universo, il suo moto non sarebbe definibile: senza altra materia non potremmo dire se questo corpo è in quiete o se sta accelerando. E siccome la reazione della materia all'accelerazione è il solo modo per determinarne l'inerzia, questo corpo non possiederebbe inerzia. Viene detta **principio di Mach** l'idea che sono la massa e la posizione dei corpi celesti a definire l'inerzia ed i sistemi inerziali. Si possono muovere varie obiezioni a questa idea: nessun osservatore può trovarsi in un universo vuoto e verificare le idee di Mach, e l'inerzia potrebbe esistere anche in un universo vuoto.

Comunque sia, le idee di Mach influenzarono, per sua stessa ammissione, Einstein. Secondo la fisica newtoniana, in uno spazio privo di interazioni, i corpi dovrebbero rimanere in quiete o muoversi di moto rettilineo uniforme. Siccome però l'universo è permeato da campi gravitazionali che non possono essere schermati, tutti i corpi si muovono lungo traiettorie curve per effetto di questi campi. Sorge però un problema: se diciamo che una traiettoria è curva, assumiamo di saper definire una linea retta. Ma come possiamo farlo se nessun corpo, nemmeno i fotoni, come vedremo, segue una linea retta? Cerchiamo allora di far a meno del concetto di linea retta, e assumiamo che non ci siano enti fisici come le "forze gravitazionali" che curvano le traiettorie dei corpi celesti, ma che la geometria dello spazio venga modificata dalla gravitazione in modo tale che le traiettorie osservate corrispondono ai moti liberi, inerziali, di detti corpi. Ma come esprimere questo legame tra moto inerziale e gravitazione?

La Relatività Ristretta può venir descritta da una geometria di Minkowski  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$  ed è dalle proprietà di invarianza del  $ds^2$  tra sistemi inerziali che derivano i risultati di questa Teoria (dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze, ...). Come si passa ad una metrica  $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$  in presenza di campi gravitazionali? Che legami ci sono tra  $g_{\alpha\beta}$  ed il campo gravitazionale e tra  $g_{\alpha\beta}$  e la gravitazione di Newton? Impostata in questo modo, la Relatività Generale risulta essere una teoria geometrica della gravitazione.

<sup>7</sup>*Ernst Mach (1838-1916) fu professore di fisica e poi di filosofia all'Università di Vienna. Le sue idee avevano avuto un precursore nel filosofo e vescovo inglese George Berkeley, nel 1710, quando Newton era ancora vivo.*

### 3.4 Sistemi localmente inerziali

Volendo dare una descrizione geometrica dello spazio-tempo possiamo usare quello che già abbiamo appreso riguardo alle superfici e generalizzarlo in 4 dimensioni. In particolare, abbiamo visto che, in un intorno di un generico punto, è possibile trasformare  $g_{\alpha\beta}$  in modo tale che abbia una data forma e che le derivate prime siano nulle. Quindi, nell'intorno di un evento, possiamo sempre porre  $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(|x|^2)$ : al prim'ordine la geometria è la stessa della Relatività Ristretta. Nell'intorno (infinitesimo) di ogni evento le leggi della Fisica sono quelle che valgono in un sistema di riferimento inerziale. In un intorno di ogni evento posso definire un *sistema di riferimento localmente inerziale*.

In presenza di campi gravitazionali, per quanto detto poco sopra, localmente gli scostamenti dalla Relatività Ristretta si manifestano solo a livello delle derivate seconde di  $g_{\alpha\beta}$  che, ricordiamo, sono connesse con il tensore di curvatura  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ . In questo senso **la gravitazione curva lo spazio-tempo**. Ma quali sono questi sistemi localmente inerziali?

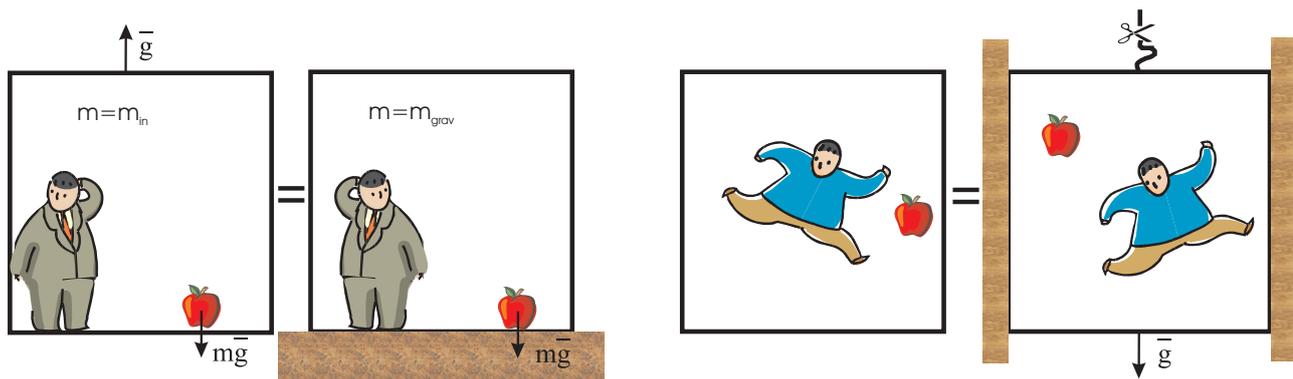
### 3.5 Principio di Equivalenza

L'esperienza che corpi diversi cadono (in assenza di resistenza dell'aria) allo stesso modo per effetto della gravità ha portato a concludere, con grande precisione, che massa inerziale  $m_{in}$  e massa gravitazionale  $m_{grav}$  sono tra loro proporzionali (e in pratica uguali, facendo rientrare entro la costante di gravitazione  $G$  la costante di proporzionalità). Einstein assunse che, **per definizione**,  $m_{in} \equiv m_{grav}$ . Questo porta al famoso *esperimento pensato* dell'**ascensore di Einstein**: se un osservatore, dotato di strumenti scientifici, è rinchiuso in un ascensore e non può quindi vedere cosa accade attorno a lui, non sarà in grado di distinguere, dai suoi esperimenti di meccanica, tra le due situazioni:

- è fermo in campo gravitazionale con accelerazione di gravità  $\bar{g}$
- è nello spazio vuoto, e l'ascensore è accelerato verso l'alto con accelerazione costante  $\bar{g}$

Analogamente, poichè tutto cade allo stesso modo in un campo gravitazionale, l'osservatore non sarà in grado di distinguere tra le situazioni di:

- moto rettilineo uniforme nel vuoto
- caduta libera in un campo gravitazionale



Questo ci permette di dire quali sono i *sistemi localmente inerziali*: *quelli in caduta libera*. Quindi in un sistema in caduta libera valgono localmente (e al prim'ordine in  $g_{\alpha\beta}$ ) le leggi della Relatività Ristretta.

Il Principio di Equivalenza richiede che tutte le leggi della fisica (non solamente quelle della Meccanica) siano le stesse sia in un sistema localmente inerziale, sia nella Relatività Ristretta.

Il fatto che gli effetti della gravitazione scompaiano in un sistema in caduta libera, fa sì che i fenomeni che vi avvengono sono completamente indipendenti dalla presenza di masse vicine. Secondo il punto di vista di Mach, invece, una grossa massa vicina dovrebbe introdurre una anisotropia della massa inerziale. Effetti dovuti al Sole o alla nostra Galassia sono stati ricercati, ma non trovati entro  $\Delta m/m \sim 10^{-20}$ , per cui il principio di equivalenza sembra favorito rispetto alle ipotesi di Mach (che quindi non sono completamente coerenti con la

Relatività Generale, a parte l'ispirazione fornita ad Einstein<sup>8</sup>).

### 3.6 Principio di Covarianza Generale

Questo principio ci suggerisce come scrivere le equazioni della fisica in presenza di un campo gravitazionale, quando sappiamo come sono fatte in assenza di gravità.

Affinchè un'equazione esprime una legge fisica valga in un campo gravitazionale è necessario che:

1. Sia "covariante", cioè non cambi forma cambiando sistema di riferimento, sia cioè espressa come una relazione tra tensori.
2. L'equazione valga in assenza di gravitazioni, quando cioè  $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$  e  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \equiv 0$ .

Ci possono essere molte equazioni covarianti che si riducono, in assenza di gravità, alla stessa equazione della Relatività Ristretta. Tuttavia, poichè il Principio di Covarianza Generale, come quello di Equivalenza, agiscono su scale piccole, ci aspettiamo che entrino in gioco solo  $g_{\alpha\beta}$  e le sue prime derivate. Questo obbedisce anche ad un principio di semplicità.

In questo modo  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} \rightarrow T^{\alpha\beta}_{;\beta}$  (derivata covariante), o, ad esempio, per l'equazione del moto di un corpo libero,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Abbiamo visto che in ogni punto (evento) possiamo definire un sistema localmente inerziale, ed in esso le derivate seconde di  $g_{\alpha\beta}$  sono in generale  $\neq 0$ : è quindi a livello di derivate seconde del tensor metrico che entra in gioco il campo gravitazionale.

Analogamente, nella fisica newtoniana, in un sistema in caduta libera, quello che si può misurare è la differenza di accelerazione di gravità tra due corpi  $\Delta g/\Delta x$ . Questo è il tipo di fenomeno che chiamiamo *maree*. Ma  $\bar{g} = -\bar{\nabla}\Phi_{grav}$  e quindi  $\partial g/\partial x \propto \partial^2 \Phi_{grav}/\partial x^2$ . Quello che è rilevabile sono quindi le derivate seconde di  $\Phi_{grav}$ , come in Relatività Generale lo sono le derivate seconde di  $g_{\alpha\beta}$ ; vedo quindi che c'è un'analogia tra  $g_{\alpha\beta}$  e  $\Phi_{grav}$ : le  $g_{\alpha\beta}$  fanno le veci del potenziale gravitazionale di Newton.

### 3.7 Le equazioni di Einstein

Nella teoria di Newton della gravitazione il potenziale  $\Phi$  soddisfa l'equazione di Poisson:  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0$  e  $\bar{g} = -\bar{\nabla}\Phi$ . La Relatività Ristretta ci insegna che tutte le forme di energia sono equivalenti alla massa, e allora una teoria relativistica della gravità avrà come sorgenti del campo gravitazionale tutte le forme presenti di energia, e non solamente  $\rho_0$ . In particolare, la densità di energia del campo gravitazionale stesso è proporzionale a  $(\bar{\nabla}\Phi)^2$  nel caso newtoniano (pensiamo, per analogia, che la densità di energia del campo elettromagnetico è proporzionale a  $E^2$ ).<sup>9</sup>

Se dunque portiamo a sinistra, nell'equazione di Poisson, il termine  $\propto (\bar{\nabla}\Phi)^2$  che deriverebbe dalla densità di energia gravitazionale, otteniamo un'equazione differenziale non lineare (che sarà lineare nella derivata seconda e quadratica in quella prima) per il campo gravitazionale.

Formalmente avremo un'equazione del tipo:

$$F(g) \sim \kappa T$$

dove  $g$  rappresenta il tensore metrico (corrispondente a  $\Phi$ );  $F$  è un operatore differenziale (verosimilmente qualcosa di lineare nelle derivate seconde e quadratico nelle derivate prime) che si riduce a  $\nabla^2$  nel limite di

<sup>8</sup>Einstein concepì la sua teoria della Relatività Generale cercando di incorporarvi l'idea di Mach secondo la quale l'inerzia è dovuta alle interazioni gravitazionali con tutta la materia dell'Universo. Ma, come lui stesso ammise, c'era riuscito solo parzialmente, dato che ottenne una soluzione delle sue equazioni di campo nella quale una singola particella, immersa in un Universo peraltro vuoto, possedeva proprietà inerziali.

<sup>9</sup>Possiamo vedere che la densità di energia del campo gravitazionale è proporzionale a  $(\bar{\nabla}\Phi)^2$ , cioè a  $g^2$ , nel seguente modo. L'energia potenziale gravitazionale per una massa  $M$  di raggio  $R$  è data da  $E = -GM^2/R$ . Se penso che questa energia sia distribuita nel campo ( $g \propto M/r^2$ ) creato da  $M$ , tra  $R$  e  $\infty$ , vedo che, chiamando  $\delta_G$  la densità di energia gravitazionale, affinché sia  $-\int_R^\infty \delta_G(r) \cdot 4\pi r^2 dr \approx -M^2/R$  occorre che  $\delta_G(r) \sim (M/r^2)^2 \sim g^2$ .

campo debole per cui valgono le leggi di Newton,  $\kappa$  è una costante di proporzionalità che conterrà  $G$ ,  $T$  è una quantità che descrive tutte le forme non-gravitazionali di energia, e che, nel caso nonrelativistico, dovrebbe ridursi essenzialmente a  $\rho_0$ .

Un naturale candidato per  $T$  è la componente  $T^{00}$  del tensore energia-impulso. Ma tenere come sorgente del campo solo una componente di un tensore darebbe una teoria non invariante: si dovrebbe adottare un sistema di riferimento particolare per calcolare  $T^{00}$ . Da qui l'idea di Einstein di usare come sorgente l'intero  $T^{\alpha\beta}$ : anche la pressione, gli sforzi (se  $T^{\alpha\beta}$  non è diagonale), ecc.. tutto agisce come sorgente. Ma se  $T$  è un tensore, allora nell'equazione anche il termine di sinistra deve essere un tensore, funzione del tensor metrico.

Ma  $T^{\alpha\beta}$  è simmetrico, ed ha divergenza "covariante" nulla:  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ . Quindi il termine di sinistra dovrà avere queste proprietà; in più ci aspettiamo che sia lineare nelle derivate seconde di  $g_{\alpha\beta}$  e quadratico nelle derivate prime.

Ma abbiamo già incontrato un tensore con queste proprietà, ed abbiamo visto che è unico nel suo genere: il tensore di Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$$

Einstein propose quindi, come equazione del campo gravitazionale,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

Se penso di includere anche le derivate di ordine zero nell'operatore differenziale, ed essendo  $g_{\alpha\beta}$  simmetrico ed a divergenza covariante nulla si può aggiungere un termine proporzionale a  $g_{\alpha\beta}$ :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

$\Lambda$  e  $\kappa$  sono costanti;  $\Lambda$  è la cosiddetta *costante cosmologica*.

### 3.8 Il limite newtoniano - campo debole (weak field)

Scritte le equazioni di Einstein, occorre verificare che, nel limite di validità della fisica classica, esse si riducono alla legge di Newton; dobbiamo anche vedere quanto vale la costante  $\kappa$  che compare nelle equazioni.

Supponiamo che il campo sia stazionario (cioè la sua derivata temporale sia nulla), che le velocità delle particelle siano piccole ( $v \ll c$ ) e che, a grandi distanze dalle masse che generano il campo, il tensore metrico sia asintoticamente piatto:  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ . Supponiamo inoltre che il campo sia debole: cioè che gli scostamenti dalla metrica  $\eta_{\alpha\beta}$  siano piccoli:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{con } |h| \ll 1$$

Poichè  $v/c \ll 1$  sarà

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{ds} &= \frac{cdt}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx^i}{ds} &= \frac{dx^i}{cd\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{c} \frac{dt}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dx^0}{ds} \end{aligned}$$

L'equazione delle geodetiche sarà, come al solito,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

ma, per  $\alpha$  fissato, nella somma sugli indici  $\beta$  e  $\gamma$ , i termini in cui compaiono i  $dx^i/ds$  sono trascurabili rispetto al termine con  $(dx^0/ds)(dx^0/ds)$ , per cui

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

Con l'assunzione  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$  ( $|h| \ll 1$ ) vediamo come calcolare  $g^{\alpha\beta}$ . Sappiamo che, per definizione,  $g_{\alpha\delta}g^{\delta\beta} \equiv \delta_{\alpha}^{\beta}$  e che  $\eta_{\alpha\delta}\eta^{\delta\beta} \equiv \delta_{\alpha}^{\beta}$ . Definiamo la quantità  $h^{\gamma\delta} \equiv \eta^{\gamma\alpha}\eta^{\delta\beta}h_{\alpha\beta}$ . Mostriamo che

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta}) = \delta_{\alpha}^{\delta} :$$

Sviluppando il termine a sinistra, e trascurando i termini del secondo ordine in  $h$ ,

$$\begin{aligned} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta}) &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - \eta_{\alpha\beta}h^{\beta\delta} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - h_{\alpha\beta}h^{\beta\delta} = \\ &= \delta_{\alpha}^{\delta} - \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma}\eta^{\delta\tau}h_{\sigma\tau} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} = \delta_{\alpha}^{\delta} \end{aligned}$$

Infatti  $\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma} \equiv \delta_{\alpha}^{\sigma}$ ,  $\delta_{\alpha}^{\sigma}h_{\sigma\tau} = h_{\alpha\tau}$  e  $\eta^{\delta\tau}h_{\alpha\tau} \equiv h_{\alpha\beta}\eta^{\delta\beta}$ , poiché  $\tau$  è un indice muto e posso chiamarlo  $\beta$ . Vedo quindi che  $\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta} = g^{\beta\delta}$ .

Calcoliamo  $\Gamma_{00}^{\alpha}$  (ricordiamo che la stazionarietà implica che le derivate rispetto a  $x^0$  sono nulle):

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} \left[ \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\gamma}} \right] = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\gamma} - h^{\alpha\gamma}) \left( -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\gamma}} \right) \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}}$$

al primo ordine in  $h$ . Quindi

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

- Per  $\alpha = 0$  abbiamo:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = \frac{1}{2}\eta^{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^0}{ds} = \text{cost} = \frac{dt}{d\tau}$$

- Per  $\alpha = 1, 2, 3$  invece:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{c^2 d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{dx^i}{d\tau} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{1}{c^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2}$$

per cui

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}\eta^{i\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\gamma}} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (\eta^{i\gamma} = -1 \text{ se } i = \gamma)$$

cioè

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{e vettorialmente} \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \bar{\nabla} h_{00}$$

Ma secondo la gravità di Newton, indicato con  $\Phi$  il potenziale,

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\Phi$$

e confrontando i due risultati:

$$-\bar{\nabla}\Phi \simeq -\frac{c^2}{2} \bar{\nabla} h_{00} \quad \rightarrow \quad h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} + \text{cost.}$$

Ma, se a grandi distanze dalle masse sorgenti del campo,  $\Phi \rightarrow 0$  e  $h_{00} \rightarrow 0$  pure perchè assumiamo che  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ , segue che  $\text{cost.} = 0$ , cioè

$$h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} \quad \rightarrow \quad g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

L'ipotesi di campo debole,  $|h| \ll 1$ , implica quindi che sia  $2\Phi/c^2 \ll 1$ .

Nel caso di una massa  $M$  in cui la densità è distribuita con simmetria sferica, il potenziale esterno è dato da  $\Phi = -GM/r$  secondo Newton. L'ipotesi che il campo sia debole implica che  $|2\Phi/c^2| \ll 1$ , cioè

$$\frac{2GM}{rc^2} \ll 1$$

Per un buco nero o un corpo generico sferico,  $R_S \equiv 2GM/c^2$  è il cosiddetto *raggio di Schwarzschild*, corrispondente, per un buco nero non rotante ed elettricamente neutro, all'*orizzonte degli eventi*, la zona dalla quale nulla può uscire (prescindendo da effetti quantistici di evaporazione). In questo caso vedo che la condizione di campo debole è che

$$\frac{R_S}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad r \gg R_S$$

Per il nostro sole,  $R_S \sim 3$  km.

Vediamo ora, con le stesse assunzioni fatte sopra, che le equazioni di Einstein si riducono all'equazione di Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$  e determiniamo la costante  $\kappa$ . Il tensore di curvatura è:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \simeq \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \quad (\text{gli altri termini sono } \mathcal{O}(h^2))$$

I simboli di Christoffel saranno:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial h_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (\text{allo } \mathcal{O}(h))$$

Il tensore di Ricci si ottiene da  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$  contraendo il primo e terzo indice:

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} = R^\alpha_{\beta(\gamma\equiv\alpha)\delta} &= \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta} = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\delta}}{\partial x^\sigma} \right) - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\delta} \left( \frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^\sigma} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[ \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} + \frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} \right] = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[ \frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right] \end{aligned}$$

Riprendiamo l'equazione di Einstein, con il termine in  $\Lambda$  portato a destra:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

lo moltiplichiamo per  $g^{\alpha\gamma}$  e otteniamo:

$$R^\gamma_{\beta} - \frac{1}{2}R\delta^\gamma_{\beta} = \kappa T^\gamma_{\beta} + \Lambda\delta^\gamma_{\beta}$$

poniamo  $\gamma = \beta$  (cioè sommiamo su  $\beta = \gamma = 0, 1, 2, 3$ ,  $\delta^\beta_{\beta} = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ) e cioè contraiamo i tensori; essendo  $R = R^\gamma_{\gamma}$  sarà:

$$R - \frac{1}{2}R \cdot 4 = \kappa T^\gamma_{\gamma} + 4\Lambda \quad \rightarrow \quad R = -\kappa T^\gamma_{\gamma} - 4\Lambda$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione di partenza, questa diventa:

$$R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-\kappa T^\gamma_{\gamma} - 4\Lambda) = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^\gamma_{\gamma}) - \Lambda g_{\alpha\beta}$$

Valutiamo, sempre con le approssimazioni assunte, la componente 00 di  $R_{\alpha\beta}$ :

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[ \frac{\partial^2 h_{0\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{0\alpha}}{\partial x^0 \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^0 \partial x^0} \right] \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \quad (\text{per la stazionarietà } \partial/\partial x^0 = 0)$$

ma se  $\alpha = 0$  e/o  $\sigma = 0$  la derivata è nulla; quindi restano solo i termini con indici 1, 2, 3 (e  $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$ ):

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^3 \partial x^3} \right] \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

D'altra parte

$$R_{00} = \kappa \left[ T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T_{\gamma}^{\gamma} \right] - \Lambda g_{00}$$

Consideriamo per  $T^{\alpha\beta}$  il caso *polvere*:  $T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta}$ , supponendo trascurabili, rispetto a  $\rho_0 c^2$ , i termini che esprimono la pressione. Sarà

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta} \quad (u^i \ll u^0 \simeq 1)$$

$$T_{00} = g_{0\alpha} g_{0\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta} \simeq g_{00} g_{00} \rho_0 c^2 u^0 u^0 \simeq g_{00}^2 \rho_0 c^2$$

Ma  $g_{00} = 1 + h_{00} \simeq 1$  e quindi

$$T_{00} \simeq \rho_0 c^2$$

$$T_{\gamma}^{\alpha} = g_{\gamma\beta} T^{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta} \rho_0 c^2 u^{\alpha} u^{\beta}$$

$$T_{\gamma}^{\gamma} = g_{\gamma\beta} \rho_0 c^2 u^{\gamma} u^{\beta} \simeq g_{00} \rho_0 c^2 u^0 u^0 (+\text{termini trascurabili}) \simeq g_{00} \rho_0 c^2 \simeq \rho_0 c^2$$

Avremo quindi

$$\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \simeq \kappa (\rho_0 c^2 - \frac{1}{2} \rho_0 c^2) - \Lambda \quad \rightarrow \quad \nabla^2 h_{00} \simeq \kappa \rho_0 c^2 - 2\Lambda$$

ma  $h_{00} = 2\Phi/c^2$  e quindi:

$$\nabla^2 \Phi \simeq \frac{\kappa \rho_0 c^4}{2} - \Lambda c^2 \simeq \kappa \left( \frac{\rho_0 c^4}{2} - \frac{c^2 \Lambda}{\kappa} \right)$$

L'equazione di Poisson prevede che  $\nabla^2 \Phi = 4\pi g \rho_0$ ; le due espressioni coincidono se

$$(A) \quad \frac{\rho_0 c^4}{2} \gg \left| \frac{c^2 \Lambda}{\kappa} \right|$$

$$(B) \quad 4\pi G \rho_0 = \frac{\kappa \rho_0 c^4}{2} \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Abbiamo quindi l'equazione di Einstein completa

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

La condizione su  $\Lambda$  scritta sopra diventa:

$$|\Lambda| \ll \frac{4\pi G \rho_0}{c^2} = \Lambda_E$$

Nel 1916, quando Einstein scrisse le equazioni della Relatività Generale, non si conosceva l'espansione cosmica, e Einstein cercò una soluzione statica per il modello di universo. Vediamo infatti che se  $\Lambda = \Lambda_E$  e  $\rho_0$  è la densità dell'universo; abbiamo  $\nabla^2 \Phi = 0$ ,  $\Phi = \text{cost}$ ,  $\bar{g} = -\bar{\nabla} \Phi = 0$ , dal punto di vista *classico*.

Una cosa analoga risulta dalle equazioni della Relatività Generale. Questo modello statico è però instabile: basta una piccola fluttuazione di densità e si produce, localmente, espansione o contrazione.

Dimensionalmente  $[c^2 \Lambda] = [4\pi g \rho_0] = [\nabla^2 \Phi]$  cioè  $[\Lambda] = [\nabla^2 (\Phi/c^2)] = L^{-2}$  (ricordiamo che  $\Phi/c^2$  è adimensionale).

Scrivendo  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G [\rho_0 - c^2 \Lambda / 4\pi G]$  vedo che posso pensare che  $\Lambda$  misuri la densità di massa-energia del vuoto.

Per valutare un limite superiore di  $\Lambda$  possiamo assumere per  $\rho_0$  la densità media di un sistema gravitante per cui le leggi di Newton vanno bene e che quindi richiede  $\Lambda \sim 0$ . Se assumiamo come sistema gravitante il sistema solare (massa =  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} g$ , raggio dell'orbita di Plutone  $\sim 6 \cdot 10^9 km$ ) otteniamo

$$|\Lambda_{SS}| \ll 2 \cdot 10^{-39} cm^{-2}$$

Se assumiamo come sistema autogravitante un ammasso di galassie (ma qui la sicurezza sulla bontà delle leggi di Newton è minore), con massa pari a  $\sim 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$  e raggio  $\sim 3h^{-1} Mpc$ , otteniamo

$$|\Lambda_{SS}| \ll 10^{-54} h^2 cm^{-2}$$

Einstein definì l'introduzione di  $\Lambda$  come il più grande sbaglio della sua vita, ma, come vedremo, essa è ritornata prepotentemente in auge negli ultimi anni.

Da recenti osservazioni basate su supernovae di tipo *Ia* in galassie lontane, e dallo studio del fondo cosmico a microonde, si è ottenuto **non più un limite superiore, ma una possibile stima di  $\Lambda \sim 2 \cdot 10^{-56} h^2 cm^{-2}$** .

### 3.9 Metrica del campo debole e trasformazioni di gauge, onde gravitazionali

Abbiamo visto, trattando il campo debole, che il Tensore di Ricci si può scrivere

$$R_{\beta\delta} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \left[ \frac{\partial^2 h_{\delta\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right]$$

Portando  $\eta^{\alpha\sigma}$  (costante) entro gli operatori di derivazione parziale, e chiamando  $h$  la *traccia* di  $h_{\alpha\sigma}$

$$h = h^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\sigma} h_{\alpha\sigma} = h_{00} - (h_{11} + h_{22} + h_{33})$$

posso riscrivere la relazione di sopra come

$$2R_{\beta\delta} \simeq \frac{\partial^2 h^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\sigma \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\delta \partial x^\beta}$$

Definiamo ora un campo ausiliario  $\bar{h}_{\beta\delta}$ , definito in modo che  $\bar{h}_{\beta\delta} \equiv h_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\delta} \cdot h$  e avremo, moltiplicando per  $\eta^{\beta\delta}$ :

$$\begin{aligned} \bar{h} &= h - \frac{1}{2}h \cdot 4 = -h && \text{essendo } \eta_{\beta\delta} \cdot \eta^{\beta\delta} = 4 \\ h_{\beta\delta} &= \bar{h}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\delta} \bar{h} \end{aligned}$$

Osserviamo anche che, usando  $\bar{h}_{\beta\delta}$ , si ha, per i termini misti di  $h_{\beta\delta}$ ,

$$h^\alpha_\delta = \eta^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\delta} \bar{h} = \bar{h}^\alpha_\delta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\delta \bar{h}$$

Sostituendo nell'espressione del tensore di Ricci si ha:

$$\begin{aligned} 2R_{\beta\delta} &\simeq \frac{\partial^2 \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\delta \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{h}^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\beta \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{h}^\sigma_\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} \end{aligned}$$

poiché il secondo e quarto termine sono uguali, ma di segno opposto, alla metà del sesto e si annullano con questo.

Osserviamo che le equazioni di Einstein per  $G_{\mu\nu}$  sono 10, essendo  $G_{\mu\nu}$  simmetrico. Ma  $G_{\mu\nu}$  soddisfa anche le quattro condizioni  $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$ , per cui ho  $10 - 4 = 6$  equazioni indipendenti. Le incognite sono le 10 componenti del tensor metrico, in questo caso  $h_{\beta\delta}$ . Vedo quindi che le equazioni di Einstein non riescono a definire in modo univoco la soluzione. Per far questo è necessario imporre altre quattro condizioni su  $h_{\beta\delta}$ , occorre cioè scegliere quello che si dice un *gauge* particolare. In questo caso è particolarmente indicato il cosiddetto *gauge di Lorentz* (vedremo più avanti perché questo si può fare e che senso ha):

$$\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \quad (4 \text{ condizioni: } \delta = 0, 1, 2, 3)$$

Con questa scelta i due termini contenenti  $\bar{h}^\alpha_\delta$  nell'equazione in alto sono nulli e rimane:

$$R_{\beta\delta} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial z^2} \right) \right] \equiv -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta}$$

dove con  $\square^2$  si indica l'operatore d'Alembertiano.

$\implies$  *Metrica del campo debole (stazionario)*

$\implies$  *Trasformazioni di gauge*

Abbiamo visto che le equazioni di Einstein si possono scrivere anche nella forma  $R_{\beta\delta} =$  funzione di  $T_{\beta\delta}$  e  $\Lambda$ . Se siamo nel vuoto, e trascuriamo  $\Lambda$ , allora sarà:

$$R_{\beta\delta} \equiv 0 \quad \implies \quad \square^2 h_{\beta\delta} \equiv 0$$

che è l'**equazione di un'onda che propaga alla velocità della luce.**

Metrica nel campo debole (stazionario), senza  $\Lambda$  CD 1

Scriviamo le eq. di Einstein nella forma

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\beta\delta} \right]$$

Se il campo è stazionario, le derivate rispetto al tempo saranno nulle, per cui

$$R_{\beta\delta} \approx \frac{1}{2} \nabla^2 h_{\beta\delta}$$

Abbiamo già visto che

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^\delta_\delta \right) \quad \text{e nel caso "polvere"} \quad T^\delta_\delta \approx \rho c^2$$

$$\text{e } T_{\alpha\beta} = \rho c^2 g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} u^\delta u^\gamma \quad (u^i \ll u^0 \approx 1)$$

Esplicitamente

$$T_{\alpha\beta} = \rho c^2 g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} u^\delta u^\gamma \approx \rho c^2 g_{\alpha 0} g_{\beta 0} \approx \rho c^2 (\eta_{\alpha 0} + h_{\alpha 0})(\eta_{\beta 0} + h_{\beta 0}) \approx$$

$$\approx \rho c^2 \left[ \eta_{\alpha 0} \eta_{\beta 0} + \eta_{\alpha 0} h_{\beta 0} + \eta_{\beta 0} h_{\alpha 0} + h_{\alpha 0} h_{\beta 0} \right]$$

$$T_{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{in somma su } \delta \text{ e } \gamma \\ \text{resta } u^\delta u^\gamma \end{array}$$

Solo termine con  $\alpha=0$  e  $\beta=0$  è diverso da zero

• caso 00

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ \rho c^2 - \frac{1}{2} (\eta_{00} + h_{00}) \rho c^2 \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \frac{1}{2} \rho c^2 = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

$= \frac{1}{2} \rho c^2$

Dall'eq. di Poisson  $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \rightarrow \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \rightarrow \nabla^2 h_{00} = \nabla^2 \left( \frac{2\phi}{c^2} \right)$

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + \text{cost} \quad (\text{ma la cost} = 0 \text{ per condizioni all'infinito})$$

Ritroviamo  $\boxed{h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}}$

• caso 11

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ T_{11} - \frac{1}{2} \eta_{11} \rho c^2 \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \frac{1}{2} \rho c^2 = \frac{4\pi G \rho}{c^2} = \frac{\nabla^2 \phi}{c^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{11}$$

da cui anche qui  $\boxed{h_{11} = \frac{2\phi}{c^2}}$

• caso 22 e 33: come sopra  $\boxed{h_{22} = h_{33} = h_{11} = \frac{2\phi}{c^2}}$

• fuori diagonale:  $\alpha \neq \beta$

$$T_{\alpha\beta} = 0; \eta_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} \cong 0$$

per cui ho

$$\frac{1}{2} \square^2 h_{\alpha\beta} \cong 0 \rightarrow \square^2 h_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{eq. di Laplace:}$$

Se la soluzione è nulla all'infinito  
(io ho imposto questo), allora è nulla

$$h_{\alpha\beta} \cong \text{cost} = 0$$

o costante anche all'interno

Quindi la metrica è diagonale e, messo tutto insieme,  
si ha:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(-1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \text{cioè:}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

qui: indice di rifrazione gravitazionale

Sempre nelle condizioni di linearità, le eq di Einstein  
si scrivono

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2} \square^2 h_{\beta\delta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ T_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} T^\alpha_\alpha \right] - \Lambda g_{\beta\delta} \quad / \cdot -2$$

$$\square^2 h_{\beta\delta} \cong -\frac{16\pi G}{c^4} \left[ T_{\beta\delta} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\delta} T^\alpha_\alpha \right] + 2\Lambda \eta_{\beta\delta}$$

dove sono state trascurate le perturbazioni  $h_{\beta\delta}$  nel tensor metrico  
e nel tensore energia-impulso.

### Unicità soluzioni equazione di Poisson

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da$$

applies to any well-behaved vector field  $\mathbf{A}$  defined in the volume  $V$  bounded by the closed surface  $S$ . Let  $\mathbf{A} = \phi \nabla\psi$ , where  $\phi$  and  $\psi$  are arbitrary scalar fields. Now

$$\nabla \cdot (\phi \nabla\psi) = \phi \nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \quad (1.32)$$

and

$$\phi \nabla\psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad (1.33)$$

where  $\partial/\partial n$  is the normal derivative at the surface  $S$  (directed outward from inside the volume  $V$ ). When (1.32) and (1.33) are substituted into the divergence theorem, there results *Green's first identity*:

$$\int_V (\phi \nabla^2\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi) \, d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, da \quad (1.34)$$

We want to show the uniqueness of the solution of the Poisson equation,  $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ , inside a volume  $V$  subject to either Dirichlet or Neumann boundary conditions on the closed bounding surface  $S$ . We suppose, to the contrary, that there exist two solutions  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  satisfying the same boundary conditions. Let

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (1.37)$$

Then  $\nabla^2 U = 0$  inside  $V$ , and  $U = 0$  or  $\partial U/\partial n = 0$  on  $S$  for Dirichlet and Neumann boundary conditions, respectively. From Green's first identity (1.34), with  $\phi = \psi = U$ , we find

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) \, d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} \, da \quad (1.38)$$

With the specified properties of  $U$ , this reduces (for both types of boundary condition) to:

$$\int_V |\nabla U|^2 \, d^3x = 0$$

which implies  $\nabla U = 0$ . Consequently, inside  $V$ ,  $U$  is constant. For Dirichlet boundary conditions,  $U = 0$  on  $S$  so that, inside  $V$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2$  and the solution is unique. Similarly, for Neumann boundary conditions, the solution is unique, apart from an unimportant arbitrary additive constant.

# Trasformazioni di gauge

La RG è invariante rispetto a un enorme gruppo di simmetria, il gruppo di tutte le possibili trasformazioni di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

dove  $x'^\mu$  è una funzione regolare (smooth) di  $x^\mu$ ; più precisamente si richiede che  $x'^\mu(x)$  sia invertibile, differenziabile e con una inversa differenziabile;  $x'^\mu(x)$  è un arbitrario diffeomorfismo.

Stiamo considerando la teoria lineare, in cui

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Il fatto di aver scelto un particolare sistema di riferimento, in cui  $g_{\mu\nu}$  ha la forma appena scritta, "rompe" l'invarianza della RG. Ma rimane ancora una simmetria residua di gauge; imporre le condizioni  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  non è sufficiente = esistono infinite possibilità di scrivere  $g_{\mu\nu}$  in questo modo.

Consideriamo infatti le trasformazioni di coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

in cui le derivate  $|\partial_\mu \xi^\nu|$  siano al più dello stesso ordine di  $|h_{\mu\nu}|$ . [  $\partial_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \eta_{\rho\sigma} \xi^\sigma = \eta_{\rho\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma$ , dello stesso ordine di  $\partial_\mu \xi^\sigma$ , essendo  $\eta_{\rho\sigma} \sim 1$  ]

l'effetto delle

trasformazioni di coordinate sul tensore metrico

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g^{\alpha\beta} = \left( \delta^\mu_\alpha + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left( \delta^\nu_\beta + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})$$

$$= \left( \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\alpha \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} + \delta^\nu_\beta \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})$$

$$= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} + \eta^{\nu\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + \mathcal{O}(\partial \xi \cdot h)$$

dal confronto ho

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} - \eta^{\nu\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha$$

Ricordiamo che  $(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta})(\eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}) = \delta^\alpha_\sigma$  e che gli indici di  $h$  si alzano e si abbassano con  $\eta$

otteniamo:

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \left( \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \underbrace{\eta^{\mu\rho}}_{\delta^{\mu\rho}} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} \underbrace{\eta^{\mu\sigma}}_{\delta^{\mu\sigma}} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\tau} \right)$$

$$= h_{\sigma\tau} - \left( \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \eta_{\nu\tau} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\tau} \eta_{\mu\sigma} \right) \quad \left| \eta_{\mu\sigma} \xi^\mu \equiv \xi_\sigma \right.$$

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \left( \frac{\partial \xi_\tau(x)}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \xi_\sigma(x)}{\partial x^\tau} \right)$$

Quindi, se  $h_{\sigma\tau}$  è soluzione delle eq. di Einstein, ogni metrica ottenuta per cambio di coordinate è ancora soluzione. In particolare anche  $h'_{\sigma\tau}$  è una soluzione che mantiene  $g_{\mu\nu}$  nella forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Vediamo di giustificare che si può porre  $\frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \equiv 0$ .

Ricordiamo che  $\bar{h}_{\beta\gamma} \equiv h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h$

Indicando con un "primo" le quantità che hanno subito le trasform. di gauge, per la linearità delle trasformazioni sarà

$$\bar{h}'_{\beta\gamma} = h'_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h'$$

$$= h_{\beta\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} \left( h - 2 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\bar{h}'_{\beta\gamma} = \underbrace{h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} h}_{\bar{h}_{\beta\gamma}} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{h}'^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \eta^{\beta\gamma} - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \eta^{\alpha\gamma} + \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\gamma} \quad / - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial \bar{h}'^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) - \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\gamma} \right)$$

$$\square \xi^\gamma_\sigma(x)$$

$$h'_{\sigma\tau} = h_{\sigma\tau} - \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \xi_\tau}{\partial x^\sigma} \quad / \eta^{\sigma\alpha}$$

$$h'^{\alpha\tau} = h^{\alpha\tau} - \eta^{\sigma\alpha} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} \quad \alpha \equiv \tau$$

$$h'^{\alpha\alpha} = h^{\alpha\alpha} - \eta^{\sigma\alpha} \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$$h' = h - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} = h - 2 \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\beta}$$

Ottengo quindi

$$\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} - \square^2 \zeta_\delta(x)$$

Se  $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \neq 0$ , posso fare una trasf. di gauge che mi porta ad avere  $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$ , basta che  $\square^2 \zeta_\delta(x) = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = f_\delta(x)$

E' quindi giustificato porre le 4 condizioni  $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} \equiv 0$

Nel vuoto le eq. di Einstein diventano

$$\square^2 h_{\beta\gamma} = 0$$

con in più le condizioni di gauge  $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$ . Quindi, da 10 componenti indipendenti, con le condizioni di gauge (4) arriviamo a 6 componenti indipendenti di  $h_{\beta\gamma}$ .

Ma abbiamo visto che, se facciamo una trasformazione

$$x'^\mu(x) = x^\mu(x) + \zeta^\mu(x) \quad \text{allora, per effetto di questa,}$$

$$\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} - \square^2 \zeta_\delta(x)$$

Se  $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$  e scelgo le 4  $\zeta_\delta(x)$  in modo che  $\square^2 \zeta_\delta(x) = 0$ , continuo a vedere le condizioni di gauge  $\frac{\partial \bar{h}'^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$ . Quindi la condizione  $\frac{\partial \bar{h}^\alpha_\delta}{\partial x^\alpha} = 0$  non fissa completamente il gauge, ma restano 4 funzioni  $\zeta^\mu(x)$  arbitrarie (perché  $\square^2 \zeta_\delta = 0$ ), le quali permettono di porre altre 4 condizioni su  $h_{\beta\gamma}$ , per cui le sue componenti indipendenti si riducono da 6 a 2 soltanto!

Le 4 condizioni supplementari che conviene imporre sono:

$$h = 0 \quad h_{0i} = 0$$

\* Una possibile trasformazione è del tipo  $\zeta_\mu = \epsilon_\mu e^{i k_\delta \cdot x^\delta}$  con  $\epsilon_\mu$  costante. Questo soddisfa alle  $\square^2 \zeta_\mu = 0$

A questa equazione vanno affiancate le **condizioni di gauge**

$$\frac{\partial \bar{h}_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{ma siccome} \quad \bar{h}_\delta^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\beta\delta} = \eta^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\delta} h = h_\delta^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\delta^\alpha h$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \delta_\delta^\alpha \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\delta} = 0$$

Cerchiamo una soluzione rappresentata da un'onda piana:  $h_{\beta\delta} = A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma}$  con  $A_{\beta\delta} = \text{cost}$ .

Poichè  $h_{\beta\delta}$  è simmetrico (10 componenti indipendenti), poste le 4 condizioni di gauge, restano 6 gradi di libertà. Ma di questi 6, 4 sono in realtà fittizi, legati all'arbitrarietà del sistema di riferimento, per cui alla fine mi rimangono solo 2 gradi di libertà veri e propri. Vediamo come.

Scegliamo, come 4 condizioni che fissano il sistema di riferimento, le seguenti:

$$h = 0 \qquad h_{0i} = 0$$

Dalla prima segue subito che  $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta}$ .

Sostituiamo l'onda piana nella  $\square^2 h_{\beta\delta} = 0$ , che scriviamo nella forma

$$\eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = 0$$

e otteniamo

$$A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) = A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( i k_\sigma e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) = i k_\sigma A_{\beta\delta} \eta^{\alpha\sigma} \cdot e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot i k_\alpha =$$

$$= -A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot k_\sigma k_\alpha \eta^{\alpha\sigma} = -A_{\beta\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot k_\sigma k^\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\sigma k^\sigma = 0$$

Scriviamo il quadrivettore  $k^\sigma$  come  $k^\sigma \equiv (\frac{\omega}{c}, \bar{k})$ . Poichè  $k_\sigma = \eta_{\sigma\alpha} k^\alpha$  sarà:

$$k_\sigma k^\sigma = \eta_{\sigma\alpha} k^\alpha k^\sigma = k^0 k^0 - (k^1 k^1 + k^2 k^2 + k^3 k^3) = \frac{\omega^2}{c^2} - |\bar{k}|^2 \equiv 0$$

Da questo ho  $\omega = kc \rightarrow \hbar\omega = \hbar k \cdot c \Rightarrow E = P \cdot c$  come per i fotoni, con massa a riposo nulla: il quanto mediatore dell'interazione gravitazionale, il *gravitone*, ha massa nulla.

Osserviamo anche che

$$k_\gamma \cdot x^\gamma = \eta_{\gamma\sigma} k^\sigma \cdot x^\gamma = k^0 x^0 - |\bar{k} \cdot \bar{x}| = \omega t - \bar{k} \cdot \bar{x}$$

Dalla condizione di gauge:

$$\frac{\partial h_\delta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{essendo} \quad h_\delta^\alpha = \eta^{\alpha\sigma} h_{\sigma\delta} = \eta^{\alpha\sigma} A_{\sigma\delta} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( A_{\sigma\delta} \eta^{\alpha\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \right) = A_{\sigma\delta} \eta^{\alpha\sigma} e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot i k_\alpha \equiv 0$$

cioè

$$i k_\alpha A_\delta^\alpha e^{i k_\gamma \cdot x^\gamma} = i k_\alpha h_\delta^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad h_\delta^\alpha \cdot k_\alpha = 0$$

che è detta *condizione di trasversalità*. Vediamo perchè.

Scegliamo la direzione di propagazione lungo l'asse  $x$ : ovvero  $\bar{k} \equiv (k, 0, 0)$  e quindi  $h_\sigma^\alpha \cdot k_\alpha = \eta^{\alpha\delta} h_{\delta\sigma} k_\alpha = h_{\delta\sigma} k^\delta = 0$ . Ricordiamo le condizioni di scelta del sistema di riferimento ( $h = 0$  e  $h_{0i} = 0$ ).

$$\begin{array}{llll} \sigma = 0 & \rightarrow & h_{00} k^0 + h_{10} k^1 + h_{20} k^2 + h_{30} k^3 = 0 & \rightarrow & h_{00} = 0 \\ \sigma = 1 & \rightarrow & h_{01} k^0 + h_{11} k^1 + h_{21} k^2 + h_{31} k^3 = 0 & \rightarrow & h_{11} = 0 \\ \sigma = 2 & \rightarrow & h_{02} k^0 + h_{12} k^1 + h_{22} k^2 + h_{32} k^3 = 0 & \rightarrow & h_{12} = h_{21} = 0 \\ \sigma = 3 & \rightarrow & h_{03} k^0 + h_{13} k^1 + h_{23} k^2 + h_{33} k^3 = 0 & \rightarrow & h_{13} = h_{31} = 0 \end{array}$$

Riassumendo il tutto in forma matriciale

$$h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad h = 0 \Rightarrow h_{22} + h_{33} = 0 \Rightarrow h_{22} = -h_{33} \equiv h_+ \Rightarrow \quad h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$$

e per simmetria  $h_{23} = h_{32} \equiv h_\times$

Vedo che se  $\bar{k}$  è lungo l'asse  $x$ , le componenti non nulle dell'onda sono perpendicolari all'asse  $x$ . Sono onde trasversali a due componenti (polarizzazioni):

$$\begin{cases} h_+ = A_+ e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x})} \\ h_\times = A_\times e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{x})} \end{cases}$$

### 3.10 Lenti gravitazionali

Abbiamo visto che la metrica del campo debole, stazionario, si può scrivere nella forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Questo risultato ci permette di ricavarne un altro molto interessante. Per un raggio luminoso  $ds^2 = 0$  e, posto  $dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv dl^2$ , avremo

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2$$

da cui

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)} \equiv v_{eff}^2 \equiv \frac{c^2}{n_g^2}$$

dove  $v_{eff}$  è la velocità *efficace* di propagazione dell'onda luminosa e  $n_g$  si può pensare come un *indice di rifrazione* gravitazionale. Si ha

$$n_g = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)}} \sim \sqrt{\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)} \quad \rightarrow \quad n_g \simeq 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

Se  $\Phi = 0$  all'infinito ed è negativo nei pressi di una massa,  $n_g > 1$  e  $v_{eff} < c$ . Queste relazioni ci fanno vedere che lo spazio, per effetto della gravitazione, si comporta come un mezzo rifrattivo: questa è la base di quei fenomeni noti come **lenti gravitazionali**.

localize the source by a factor of  $1/\text{SNR}$  better than this.

For long-lived sources, however, a single antenna synthesizes many antennas by observing the source at different points along its orbit around the sun. The baseline for such observations is 2 AU, so that, for a source emitting radiation at 1 kHz, the resolution is as good as  $\Delta\theta = 10^{-6}$  rad, which is smaller than an arcsecond.

For space-based detectors orbiting the sun, like LISA, the baseline is again 2 AU, but the observing frequency is some five or six orders of magnitude lower, so the basic resolution is only of order 1 radian. However, as we shall see later, some of the sources that a space-based detector will observe have huge amplitude SNRs in the range of  $\text{SNR} \sim 10^3 - 10^4$ , which improves the resolution to arcminute accuracies in the best cases.

## 2.4 Amplitude of gravitational waves – the quadrupole approximation

The Einstein equations are too difficult to solve analytically in the generic case of a strongly gravitating source to compute the luminosity and amplitude of gravitational waves from an astronomical source. We will discuss numerical solutions later; the most powerful available analytic approach is called the *post-Newtonian* approximation scheme. This approximation is suited to gravitationally-bound systems, which constitute the majority of expected sources. In this scheme [79, 169], solutions are expanded in the small parameter  $(v/c)^2$ , where  $v$  is the typical dynamical speed inside the system. Because of the virial theorem, the dimensionless Newtonian gravitational potential  $\phi/c^2$  is of the same order, so that the expansion scheme links orders in the expanded metric with those in the expanded source terms. The lowest-order post-Newtonian approximation for the emitted radiation is the quadrupole formula, and it depends only on the density ( $\rho$ ) and velocity fields of the Newtonian system. If we define the spatial tensor  $Q_{jk}$ , the second moment of the mass distribution, by the equation

$$Q_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x, \quad (1)$$

then the amplitude of the emitted gravitational wave is, at lowest order, the three-tensor

$$h_{jk} = \frac{2}{r} \frac{d^2 Q_{jk}}{dt^2} \cdot \frac{G}{c^4} \quad (2)$$

This is to be interpreted as a linearized gravitational wave in the distant almost-flat geometry far from the source, in a coordinate system (gauge) called the Lorentz gauge.

### 2.4.1 Wave amplitudes and polarization in TT-gauge

A useful specialization of the Lorentz gauge is the TT-gauge, which is a comoving coordinate system: free particles remain at constant coordinate locations, even as their proper separations change. To get the TT-amplitude of a wave traveling outwards from its source, project the tensor in Equation (2) perpendicular to its direction of travel and remove the trace of the projected tensor. The result of doing this to a symmetric tensor is to produce, in the transverse plane, a two-dimensional matrix with only two independent elements:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}. \quad (3)$$

This is the definition of the wave amplitudes  $h_+$  and  $h_\times$  that are illustrated in Figure 1. These amplitudes are referred to as the coordinates chosen for that plane. If the coordinate unit basis vectors in this plane are  $\hat{e}_x$  and  $\hat{e}_y$ , then we can define the basis tensors

$$\mathbf{e}_+ = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_x - \hat{e}_y \otimes \hat{e}_y, \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_\times = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_y + \hat{e}_y \otimes \hat{e}_x. \quad (5)$$

In terms of these, the TT-gravitational wave tensor can be written as

$$\mathbf{h} = h_+ \mathbf{e}_+ + h_\times \mathbf{e}_\times. \tag{6}$$

If the coordinates in the transverse plane are rotated by an angle  $\psi$ , then one obtains new amplitudes  $h'_+$  and  $h'_\times$  given by

$$h'_+ = \cos 2\psi h_+ + \sin 2\psi h_\times, \tag{7}$$

$$h'_\times = -\sin 2\psi h_+ + \cos 2\psi h_\times. \tag{8}$$

This shows the quadrupolar nature of the polarizations, and is consistent with our remark in association with Figure 1 that a rotation of  $\pi/4$  changes one polarization into the other.

It should be clear from the TT projection operation that the emitted radiation is not isotropic: it will be stronger in some directions than in others<sup>1</sup>. It should also be clear from this that spherically-symmetric motions do not emit any gravitational radiation: when the trace is removed, nothing remains.

### 2.4.2 Simple estimates

A typical component of  $d^2Q_{jk}/dt^2$  will (from Equation (1)) have magnitude  $(Mv^2)_{\text{nonsph}}$ , where  $(Mv^2)_{\text{nonsph}}$  is twice the nonspherical part of the kinetic energy inside the source. So a bound on any component of Equation (2) is

$$h \lesssim \frac{2(Mv^2)_{\text{nonsph}}}{r} \frac{G}{c^4} \lesssim 2 \frac{GM}{rc^2} \frac{v^2}{c^2} \tag{9}$$

It is interesting to observe that the ratio  $\epsilon$  of the wave amplitude to the Newtonian potential  $\phi_{\text{ext}}$  of its source at the observer's distance  $r$  is simply bounded by

$$h/\phi_{\text{ext}} < 2v_{\text{nonsph}}^2, \quad h/\phi_{\text{ext}}/c^2 \lesssim 2 \frac{v^2}{c^2}$$

and this bound is attained if the entire mass of the source is involved in the nonspherical motions, so that  $(Mv^2)_{\text{nonsph}} \sim Mv_{\text{nonsph}}^2$ . By the virial theorem for self-gravitating bodies

$$v_{\text{nonsph}}^2 \leq \phi_{\text{int}}, \quad \frac{v^2}{c^2} \lesssim \frac{GM}{Rc^2} = \frac{\phi_{\text{int}}}{c^2} \tag{10}$$

where  $\phi_{\text{int}}$  is the maximum value of the Newtonian gravitational potential inside the system. This provides a convenient bound in practice [328]:

$$h \lesssim 2\phi_{\text{int}}\phi_{\text{ext}}. \quad h \lesssim 2 \frac{\phi_{\text{int}}}{c^2} \cdot \frac{\phi_{\text{ext}}}{c^2} \tag{11}$$

The bound is attained if the system is highly nonspherical. An equal-mass star binary system is a good example of a system that attains this bound.

For a neutron star source, one has  $\phi_{\text{int}} \sim 0.2$ . If the star is in the Virgo cluster ( $r \sim 18$  Mpc) and has a mass of  $1.4 M_\odot$ , and if it is formed in a highly-nonspherical gravitational collapse, then the upper limit on the amplitude of the radiation from such an event is  $1.5 \times 10^{-21}$ . This is a simple way to get the number that has been the goal of detector development for decades, to make detectors that can observe waves at or below an amplitude of about  $10^{-21}$ .

<sup>1</sup>In the case of an inspiraling binary, the root mean square of the two polarization amplitudes in a direction orthogonal to the orbital plane will be a factor  $2\sqrt{2}$  larger than in the plane.

$\phi_{\text{int}}/c^2$   
 $\frac{GM}{R} \sim 0.2$   
 $10 \text{ km } c^2$

$\frac{GM}{R} \sim v^2$

$\frac{\phi_{\text{ext}}}{c^2} \sim \frac{GM_\odot}{18 \text{ Mpc } c^2}$   
 $\approx 3 \times 10^{-21}$   
 $h \lesssim 2 \cdot 0.2 \cdot 3 \times 10^{-21}$   
 $\sim 10^{-21}$

$$n = 1 - \frac{2\phi}{c^2} \geq 1$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{c}{n} \leq c$$

LG 1

• Shapiro delay

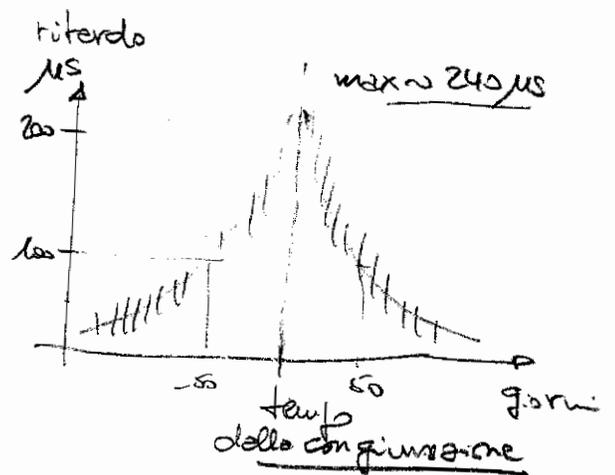
Poiché  $v_{\text{eff}} < c$ , esiste un ritardo di propagazione rispetto ad uno spazio vuoto:

$$d(\Delta t) = \frac{dx}{v_{\text{eff}}} - \frac{dx}{c} = \frac{dx}{c} (n-1) = -\frac{2\phi}{c^2} \frac{dx}{c}$$

da cui, integrando lungo la linea di vista:

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \phi dx$$

Misurato con l'eco radar di Venere



• Principio di Fermat = tempo di volo è un estremo

$$d\tau = \frac{m dl}{c} \rightarrow \tau = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{m(\bar{x}) dl}{c}$$

↳ parte "spaziale"

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \left( g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) d\lambda^2$$

allora

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(x^i) \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda$$

$$L(x^i, \dot{x}^i, \lambda)$$

con  $\lambda$  parametro che "scorre" lungo la traiettoria

(non posso prendere ds perché per i fotoni ds=0)

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

Eq. Eulero-Lagrange

NB: ci muoviamo praticamente in linea retta, per cui  $g_{ij} \sim -\eta_{ij} = \delta_{ij}$  ( $=1$   $i=j$ ,  $=0$   $i \neq j$ )

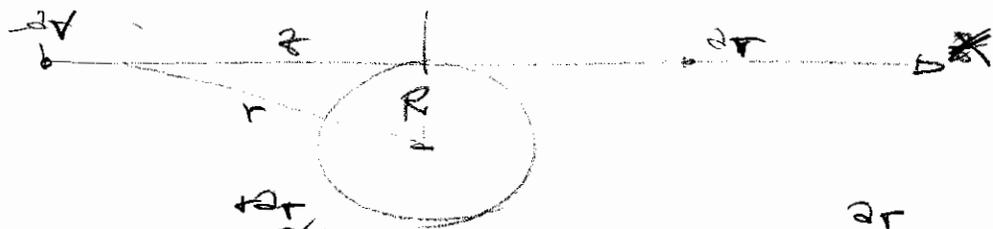
$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial m}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \left[ m \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = g_{ij} \cdot \left( \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k} \dot{x}^j + \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x^k} \right) = g_{ij} (\dot{x}^j \delta_k^i + \dot{x}^i \delta_k^j) = g_{kj} \dot{x}^j + g_{ik} \dot{x}^i = 2g_{ki} \dot{x}^i$$

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \phi dx$$

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

2G1 bis



$$a_V \sim 108,2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$a_T \sim 149,6 \text{ u}$$

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int_{-a_V}^{+a_T} -\frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2}} dx = \frac{2GM}{c^3} \int_{-a_V}^{+a_T} \frac{dx}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^2+x^2}} = \ln \left( x + \sqrt{R^2+x^2} \right) \Big|_{-a_V}^{+a_T}$$

$$= \ln \left( a_T + \sqrt{R^2+a_T^2} \right) - \ln \left( -a_V + \sqrt{R^2+a_V^2} \right)$$

$$= \ln \left( \frac{\sqrt{R^2+a_T^2} + a_T}{\sqrt{R^2+a_V^2} - a_V} \right) = \ln \left( \frac{a_T \left[ \left( \frac{R}{a_T} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} + a_T}{a_V \left[ \left( \frac{R}{a_V} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - a_V} \right)$$

$$= \ln \frac{a_T \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{a_T} \right)^2 \right) + a_T}{a_V \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{a_V} \right)^2 \right] - a_V} = \ln \frac{2a_T + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a_T}}{a_V + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a_V} - a_V}$$

$$\approx \ln \frac{2 \cdot 2 a_T a_V}{R^2} \sim \ln \left( \frac{4 a_T a_V}{R^2} \right)$$

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{2GM}{c^3} \ln \left( \frac{4 a_T a_V}{R^2} \right)$$

(A+R)

$$= 2,33 \times 10^{-4} \text{ sec} \sim 230 \text{ } \overset{\text{u}}{\mu\text{sec}}$$

$$R = 0,696 \text{ M km}$$

$$a_V = 108,21 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_T = 149,60$$

$$\mu\text{sec} = 10^{-6}$$

Ma, se  $g_{ij} \sim \delta_{ij} \rightarrow 2g_{ij} \dot{x}^j = 2\delta_{ij} \dot{x}^j = 2\dot{x}^k$

Allora l'eq. di E-L è

$$\sqrt{\frac{\partial m}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left[ m \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^k}} \cdot \dot{x}^k \right]} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^k}}$$

e ricordo che  $\sqrt{\dot{x}^k} = dl$ , per cui

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = \frac{d}{dl} \left[ m \frac{dx^k}{dl} \right]$$

ma  $dt = \frac{dl}{v_{eff}} = \frac{dl}{c} \cdot m \rightarrow dl = \frac{c dt}{m}$

per cui  $\frac{d}{dl} = \frac{m}{c} \frac{d}{dt}$

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = \frac{m}{c} \frac{d}{dt} \left[ m \cdot \frac{m}{c} \frac{dx^k}{dt} \right] \rightarrow m \sim 1 - \frac{2\phi}{c^2}$$

e  $m = m(x)$ , è stazionario

$$\frac{\partial m}{\partial x^k} = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

$$- \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{m^3}{c^2} \frac{d^2 x^k}{dt^2}$$

Cioè

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = - \frac{2}{m^3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \approx m^{-3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)^{-3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \left(1 + \frac{6\phi}{c^2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \sim \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

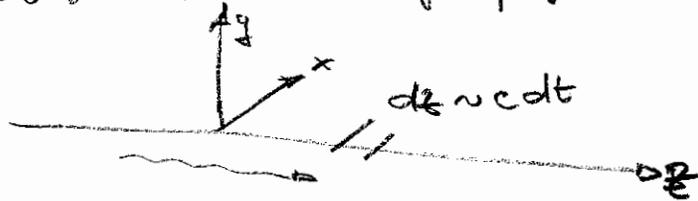
Allora

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} \sim -2 \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

$$\frac{d^2 \bar{x}^k}{dt^2} \sim -2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^k}$$

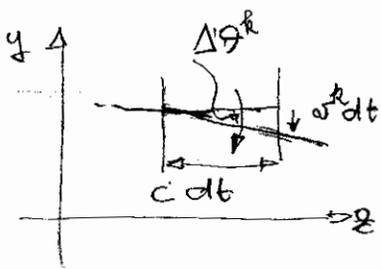
NB il fattore 2 che non ci si aspettarebbe della gravitazione "classica"

Consideriamo che la propagazione avviene lungo l'asse z



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx^k}{dt} \right) = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x^k} / \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{d}{cdt} \left( \frac{dx^k}{cdt} \right) = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} / \cdot c dt = dz \rightarrow d \left( \frac{dx^k}{cdt} \right) = - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot dz$$



$$\Delta \theta^k = - \frac{v^k dt}{c dt} \quad (- \text{for } v^k < 0, \Delta \theta^k > 0 \text{ for costruzione})$$

$$d\left(\frac{v^k}{c}\right) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} dz ; \quad \frac{v^k}{c} = -\Delta \theta^k$$

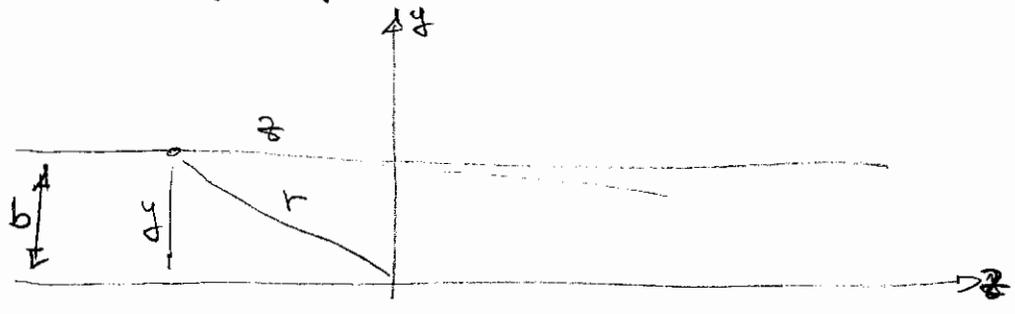
$$+ d(\Delta \theta^k) = + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} dz$$

Nel piano  $x y$  avremo una deflessione vettoriale

$$\bar{\theta} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\nabla}_{\perp} \phi dz$$

dove  $\bar{\nabla}_{\perp} \phi$  indica il gradiente nel piano perpendicolare alla proiezione

Masse puntiforme di massa  $M$



$$\phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{y^2+z^2}} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = +GM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y = \frac{GM y}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\theta = \frac{2}{c^2} GM \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

ma  $y \approx \cos t = b$  parametro d'impatto

$$\theta \approx \frac{2}{c^2} GM b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\theta \approx \frac{2}{c^2} GM b \cdot \frac{2}{b^2} = \frac{4GM}{bc^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a^2} - \left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a^2}$$

al bordo del Sole:

$$\theta_{\odot} = 1.74 \text{ arcsec}$$

## 2 History of Gravitational Lensing

The first written account of the deflection of light by gravity appeared in the “Berliner Astronomisches Jahrbuch auf das Jahr 1804” in an article entitled: “Ueber die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht” (“On the Deflection of a Light Ray from its Straight Motion due to the Attraction of a World Body which it Passes Closely”) [142]. Johann Soldner – a German geodesist, mathematician and astronomer then working at the Berlin Observatory – explored this effect and inferred that a light ray close to the solar limb would be deflected by an angle  $\hat{\alpha} = 0.84$  arcsec. It is very interesting to read how carefully and cautiously he investigated this idea and its consequences on practical astronomy.

In the year 1911 – more than a century later – Albert Einstein [41] directly addressed the influence of gravity on light (“Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes” (“On the Influence of Gravity on the Propagation of Light”). At this time, the General Theory of Relativity was not fully developed. This is the reason why Einstein obtained – unaware of the earlier result – the same value for the deflection angle as Soldner had calculated with Newtonian physics. In this paper, Einstein found  $\hat{\alpha} = 2GM_{\odot}/c^2R_{\odot} = 0.83$  arcsec for the deflection angle of a ray grazing the sun (here  $M_{\odot}$  and  $R_{\odot}$  are the mass and the radius of the sun,  $c$  and  $G$  are the velocity of light and the gravitational constant, respectively). Einstein emphasized his wish that astronomers investigate this question (“Es wäre dringend zu wünschen, daß sich Astronomen der hier aufgerollten Frage annähmen, auch wenn die im vorigen gegebenen Überlegungen ungenügend fundiert oder gar abenteuerlich erscheinen sollten.” (“It would be very desirable that astronomers address the question unrolled here, even if the considerations should seem to be insufficiently founded or entirely speculative.”) Recently it was discovered that Einstein had derived the lens equation, the possibility of a double image and the magnifications of the images in a notebook in the year 1912 [120]. In 1913 Einstein even contacted the director of the Mt. Wilson Observatory, George Ellery Hale, and asked him whether it would be possible to measure positions of stars near the sun during the day in order to establish the deflection effect of the sun.

See [9] to view a facsimile of a letter Einstein wrote to G.E. Hale on October 14, 1913. In the letter, Einstein asked Hale whether it would be possible to determine the light deflection at the solar limb during the day. However, there was a “wrong” value of the deflection angle in a sketch Einstein included in the letter.

There actually were plans to test Einstein’s wrong prediction of the deflection angle during a solar eclipse in 1914 on the Russian Crimea peninsula. However, when the observers were already in Russia, World War I broke out and they were captured by Russian soldiers [27]. So, fortunately for Einstein, the measurement of the deflection angle at the solar limb had to be postponed for a few years.

With the completion of the General Theory of Relativity, Einstein was the first to derive the correct deflection angle  $\hat{\alpha}$  of a light ray passing at a distance

$r$  from an object of mass  $M$  as

$$\left( \tilde{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{r}, \right) \quad (1)$$

where  $G$  is the constant of gravity and  $c$  is the velocity of light. The additional factor of two (compared to the "Newtonian" value) reflects the spatial curvature (which is missed if photons are just treated as particles). With the solar values for radius and mass Einstein obtained [42, 43]:

$$\left( \tilde{\alpha}_{\odot} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2} \frac{1}{R_{\odot}} = 1.74 \text{ arcsec}. \right) \quad (2)$$

It is common wisdom now that the determination of this value to within 20% during the solar eclipse in 1919 by Arthur Eddington and his group was the second observational confirmation of General Relativity [38] and the basis of Einstein's huge popularity starting in the 1920s. (The first one had been the explanation of Mercury's perihelion shift.) Recently, the value predicted by Einstein was confirmed to an accuracy better than 0.02% [80].

In the following decades, light deflection or gravitational lensing was only very rarely the topic of a research paper: In 1924, Chwolson [31] mentioned the idea of a "fictitious double star" and the mirror-reversed nature of the secondary image. He also mentioned the symmetric case of star exactly behind star, resulting in a circular image. Einstein also reported in 1936 about the appearance of a "luminous circle" for perfect alignment between source and lens [44], and of two magnified images for slightly displaced positions<sup>1</sup>. Today such a lens configuration is called "Einstein-ring", although more correctly it should be called "Chwolson-ring". Influenced by Einstein, Fritz Zwicky [174, 175] pointed out in 1937 that galaxies ("extragalactic nebulae") are much more likely to be gravitationally lensed than stars and that one can use the gravitational lens effect as a "natural telescope".

In the 1960s, a few partly independent theoretical studies showed the usefulness of lensing for astronomy [73, 84, 85, 93, 113, 114]. In particular, Sjur Refsdal derived the basic equations of gravitational lens theory and subsequently showed how the gravitational lens effect can be used to determine Hubble's constant by measuring the time delay between two lensed images. He followed up this work with interesting applications of lensing [116, 115, 117]. The mathematical foundation of how a light bundle is distorted on its passage through the universe had been derived in the context of gravitational radiation even before [124].

Originally, gravitational lensing was discussed for stars or for galaxies. When quasars were discovered in the 1960s, Barnothy [15] was the first to connect them with the gravitational lens effect. In the late 60s/early 70s, a few groups and individuals explored various aspects of lensing further, for example, statistical effects of local inhomogeneities on the propagation of light [57, 58, ?]; lensing

<sup>1</sup>As stated above. Only very recently it was shown that Einstein had derived these equations as early as 1912, but did not bother to publish them [120].

applied to quasars and clusters of galaxies [34, 100, 125]; development of a formalism for transparent lenses [?, 32]; and the effect of an inhomogeneous universe on the distance-redshift relations [37].

But only in 1979 did the whole field receive a real boost when the first double quasar was discovered and confirmed to be a real gravitational lens by Walsh, Carswell & Weymann [160]. This discovery, and the development of lensing since then, will be described in Section 4.

- **Going further.** There are a few historic accounts of lensing which are more detailed than the one presented here. Some examples can be found in [122], in [135], and in [161]. The complete history of gravitational lensing has yet to be written.

(for  $\theta, \beta, \tilde{\alpha} \ll 1$ ; this condition is fulfilled in practically all astrophysically relevant situations). With the definition of the reduced deflection angle as  $\alpha(\theta) = (D_{LS}/D_S)\tilde{\alpha}(\theta)$ , this can be expressed as:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta). \tag{6}$$

This relation between the positions of images and source can easily be derived for a non-symmetric mass distribution as well. In that case, all angles are vector-valued. The two-dimensional lens equation then reads:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \tilde{\alpha}(\vec{\theta}). \tag{7}$$

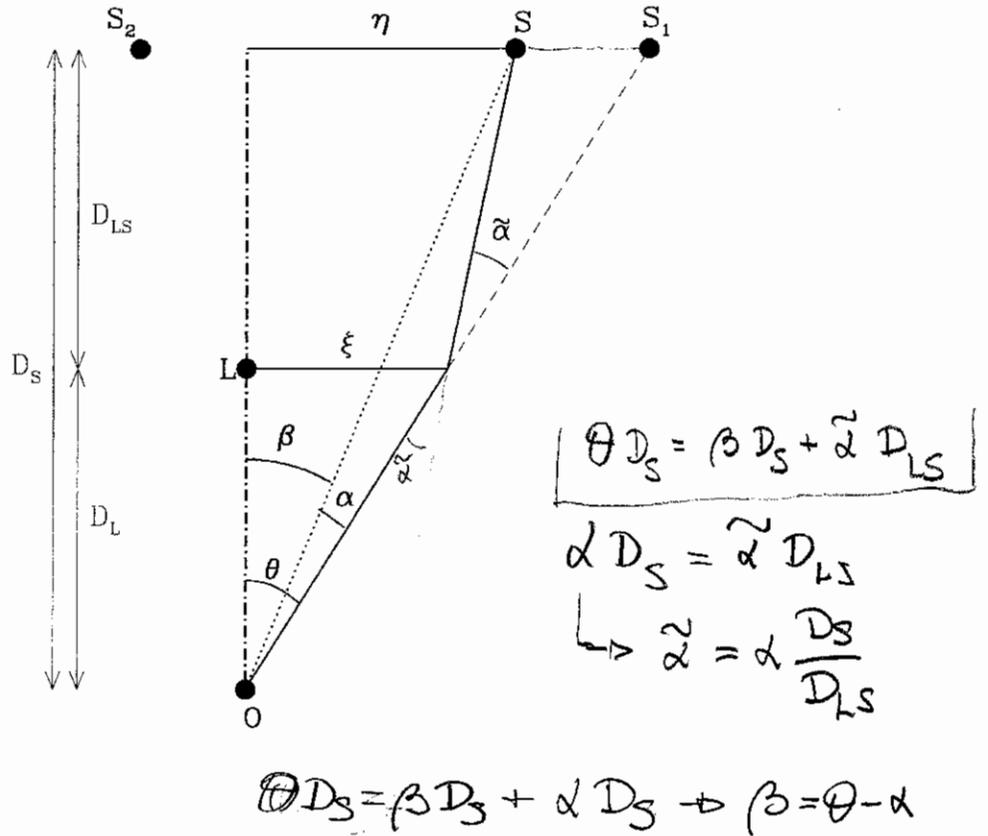


Figure 3: The relation between the various angles and distances involved in the lensing setup can be derived for the case  $\tilde{\alpha} \ll 1$  and formulated in the lens equation (6).

$\uparrow$   
 $D_S \ll D_L \ll D_S$

Living Reviews in Relativity (1998-12)  
<http://www.livingreviews.org>

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{1}{\theta D_L}$$

$\beta = 0$       $\alpha = 0$

$$\theta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}}$$

Einstein Ring

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_S} \cdot \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{1}{\theta D_L}$$

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \cdot \frac{1}{\theta}$$

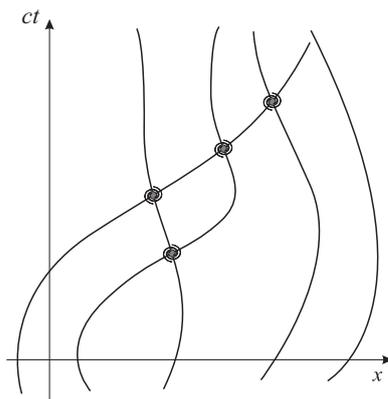
$$\frac{\alpha}{D_L} = \theta \rightarrow \alpha = \theta \cdot D_L$$

## 4 La metrica di Robertson-Walker

### 4.1 Il principio cosmologico

Se vogliamo applicare la Relatività Generale (intesa come la miglior teoria disponibile per descrivere il moto dei corpi per effetto della distribuzione di materia) allo studio del cosmo, dovremo aspettarci che, in generale, la geometria dello spazio tempo non sia statica, ma dipenda dal tempo. Questo è anche suggerito dall'evidenza osservativa di un moto generale di allontanamento delle galassie da noi (legge di Hubble).

Se però le linee di universo (traiettorie nello spazio-tempo) delle galassie, pensate come “mattoni” dell'universo e “traccianti” della sua evoluzione, fossero come in figura, le cose sarebbero estremamente complicate: non ci sarebbe nessun ordine nell'evoluzione e, dove le linee si incrociano, avremmo delle collisioni.



Fortunatamente le osservazioni astronomiche ci confortano. L'espansione dell'universo appare abbastanza regolare. Vi sono, a causa della presenza di disomogeneità (come gruppi, ammassi di galassie), delle perturbazioni nei moti delle galassie indotti dall'azione gravitazionale di queste disomogeneità. Ma questi moti sono relativamente “piccoli”, con velocità dell'ordine di  $100 \div 1000 \text{ km/s}$ , rispetto alle velocità di allontanamento (*recessione*)<sup>10</sup> da noi delle galassie che, nelle survey ottiche, arrivano anche a frazioni significative della velocità della luce. Questi moti, inoltre, appaiono generalmente non sistematici.

Si sta inoltre delineando sempre meglio l'evidenza che, su scale dell'ordine dei  $100 h^{-1} \text{ Mpc}$ , l'universo sia in media simile a se stesso. L'elevatissimo grado di isotropia della radiazione di fondo a microonde, che è dell'ordine di  $10^{-5}$ , e la posizione per nulla particolare occupata dalla Galassia nella struttura a grande scala, rendono ragionevole supporre che questa isotropia non sia caratteristica della nostra collocazione, ma sia tipica di ogni punto dello spazio. È questa un'ulteriore applicazione del punto di vista “Copernicano”, secondo il quale l'uomo non occupa più il centro geometrico dell'universo. Ma *l'isotropia attorno ad ogni punto dello spazio implica l'omogeneità di questo*<sup>11</sup> (in uno spazio disomogeneo sarebbe impossibile avere ovunque isotropia). Osserviamo incidentalmente che non è necessariamente vero il contrario: posso avere uno spazio omogeneo ma non isotropo (immaginiamo come esempio un universo omogeneo, ma in rotazione attorno ad un certo asse spaziale).

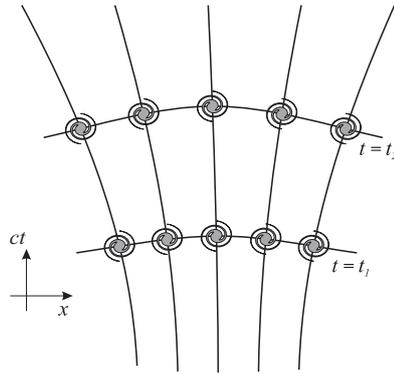
Sulla base di quanto detto sopra arriviamo ad enunciare il **Principio Cosmologico**: “Ad ogni epoca fissata l'universo appare lo stesso in ogni punto, a parte le irregolarità locali”.<sup>12</sup>

L'enunciazione di questo principio permette di semplificare enormemente lo studio della cosmologia. Possiamo pensare di smussare tutte le irregolarità e moti locali, su scale dell'ordine dei  $100 h^{-1} \text{ Mpc}$ , ottenendo un *substrato* che evolve in modo uniforme ovunque, ad un certo istante. Posso dire “ad un certo istante”, lasciando presupporre l'esistenza di un tempo definibile in modo inequivocabile, proprio perché l'universo è omogeneo: in ogni punto la situazione evolve allo stesso modo (posso pensare di legare lo scorrere del tempo, in ogni punto, alla densità locale di materia; a densità uguali corrispondono tempi uguali).

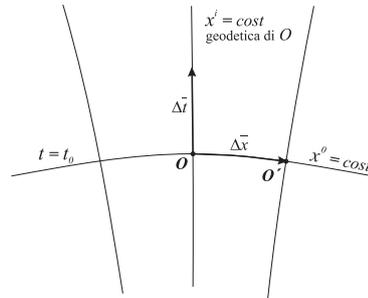
<sup>10</sup>Più che di una vera velocità, si tratta del rate di variazione della distanza propria, come vedremo; ma, seppur impropriamente (e pericolosamente), si usa abitualmente questo termine, come in questa pagina

<sup>11</sup>Almeno nel caso che la distribuzione di materia non sia un frattale.

<sup>12</sup>Esiste anche un *Principio Cosmologico Perfetto*, secondo il quale *l'universo appare lo stesso in ogni luogo ed in ogni tempo*, nel quale quindi la densità ed i vari parametri cosmologici non mutano nel tempo. Questo Principio è stato implementato nel modello di universo detto *Stato Stazionario (Steady State)* di Hoyle, Bondi e Gold.



Immaginiamo di riempire fittamente questo spazio “smussato” e omogeneo di osservatori, ognuno con orologio e regoli, ognuno in quiete rispetto al moto medio della materia circostante. Le linee di universo (cioè le geodetiche) di questi osservatori non si intersecano, eccetto possibilmente in un punto singolare nel passato e, forse, nel futuro. C’è una sola geodetica che passa per un punto dello spazio-tempo, e quindi la materia possiede, in ogni punto, una ben definita velocità. Questo substrato “smussato” si comporta come un fluido perfetto. La regolarità del moto degli osservatori (*postulato di Weyl*) permette di definire, per ogni valore del tempo cosmico, una **sezione spaziale**  $t = cost$  dello spazio-tempo. Queste sezioni spaziali sono perpendicolari alle geodetiche descritte dagli osservatori (vedi più avanti).



Se consideriamo infatti uno di questi osservatori  $O$  in quiete rispetto al moto medio locale della materia, la sua geodetica sarà per lui definita dalle condizioni  $x^i = cost$  ( $i = 1, 2, 3$ ); se consideriamo un osservatore vicino, che si trovi sulla stessa superficie  $t = t_0 = cost$ , cioè  $x^0 = cost$ , di  $O$ , il vettore  $\Delta \bar{x}$  che unisce l’evento  $O$  all’evento  $O'$  sarà perpendicolare al vettore  $\Delta \bar{t}$  parallelo alla geodetica per  $O$  ed alla quadrivelocità di componenti  $(1, 0, 0, 0)$ . Se fosse  $\Delta \bar{t} \cdot \Delta \bar{x} \neq 0$  gli eventi  $O$  ed  $O'$  non sarebbero più contemporanei, perchè  $\Delta \bar{x}$  avrebbe una componente non nulla lungo l’asse dei tempi di  $O$ .

Questo ci permette di semplificare la scelta della metrica per l’osservatore  $O$ , che sarà in generale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Poichè però vettori del tipo  $(1, 0, 0, 0)$  (tipo  $\Delta \bar{t}$ ) e vettori del tipo  $(0, 1, 0, 0)$  del tipo  $\Delta \bar{x}$  sono perpendicolari, il loro prodotto scalare si scriverà:

$$\Delta \bar{t} \cdot \Delta \bar{x} = 0 = g_{0i} \Delta t^0 \Delta x^i \quad \forall \Delta t^0, \forall \Delta x^i \Rightarrow g_{0i} = 0$$

e la metrica sarà del tipo

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Ricordiamo che, per il tipo di osservatori scelto, in quiete rispetto al moto medio locale dell’universo, le componenti spaziali  $dx^i$  sono nulle, cioè  $x^i = cost$ : i valori delle coordinate spaziali assegnate all’osservatore restano costanti nel tempo. Queste coordinate costanti sono dette *co-moventi* (*co-moving*). Il fatto che le coordinate degli osservatori siano costanti non implica che mutue distanze siano costanti, perchè i  $g_{\alpha\beta}$  dipenderanno, in generale, anche dal tempo.

Consideriamo un osservatore co-movente  $O$ . Le sue coordinate spaziali saranno  $x^i = cost$ , per cui  $dx^i = 0$ ; l’intervallo  $ds^2$  tra due eventi successivi lungo la linea d’universo di  $O$  sarà quindi  $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$ , ma questo è anche uguale, per definizione, a  $c^2 d\tau^2$  con  $\tau$  tempo proprio associato ad  $O$ :

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

Lo spazio è omogeneo, e questa relazione deve valere per qualunque osservatore, quali che siano le sue coordinate  $x^i$ , per cui  $g_{00}$  deve dipendere solo da  $x^0$ . Posso quindi definire una nuova scala di tempo cosmico tale che

$$cdt = \sqrt{g_{00}}dx^0$$

che coinciderà con il tempo proprio degli osservatori co-moventi e scriverò, usando  $t$  per indicare il tempo proprio,

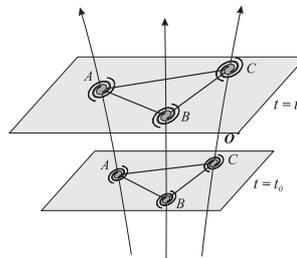
$$ds^2 = c^2dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

Un sistema di riferimento in cui sia  $g_{00} \equiv 1$  e  $g_{0i} \equiv 0$  è detto *sincrono*. In questo caso le linee d'universo  $x^i = cost.$  sono linee geodetiche. Infatti il quadrivettore tangente alla linea d'universo  $u^\alpha \equiv dx^\alpha/ds$  ha le componenti uguali a  $(1, 0, 0, 0)$  e soddisfa automaticamente l'equazione delle geodetiche perché

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \simeq \Gamma_{00}^\alpha$$

ma, essendo  $g_{00} = 1 = cost.$  e  $g_{0i} = 0$ ,

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) = 0$$



Consideriamo ora un triangolo formato da tre particelle sia al tempo  $t = t_0$  che al tempo successivo  $t = t_1$ . I due triangoli non saranno in generale uguali, ma saranno necessariamente simili, perché se così non fosse ci sarebbe disomogeneità e/o anisotropia nell'universo, in contrasto con il Principio Cosmologico. Da questo deriva che la dipendenza dei  $g_{ij}$  dal tempo deve essere simile, e non dipendere dalle coordinate spaziali. Perciò sarà:

$$ds^2 = c^2dt^2 + a(t)^2 g_{ij} dx^i dx^j$$

dove la dipendenza dal tempo è tutta nella funzione  $a(t)$  detta **fattore di scala**, ed i  $g_{ij}$  non dipendono dal tempo. Il rapporto  $a(t_1)/a(t_0)$  rappresenta l'ingrandimento al tempo  $t_1$ , rispetto al tempo  $t_0$ , di una lunghezza misurata lungo le due superfici  $t = t_1$  e  $t = t_0$ .

Osserviamo che, per eventi che giacciono su una superficie  $t = cost$  ( $dt = 0$ ), e che sono quindi tra loro contemporanei, il  $ds^2$  sarà del tipo "spazio" e quindi  $< 0$ , cioè  $a^2(t)g_{ij}dx^i dx^j < 0$ ; se poniamo  $\tilde{g}_{ij} = -g_{ij}$  sarà quindi  $a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j > 0$  e scriveremo

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j$$

che è del tipo  $ds^2 = c^2dt^2 - (d\bar{l})^2$  (come siamo abituati a scrivere nella Relatività Ristretta), dove  $d\bar{l}^2$  è l'intervallo in uno spazio 3-D caratterizzato da  $t = cost = t_0$

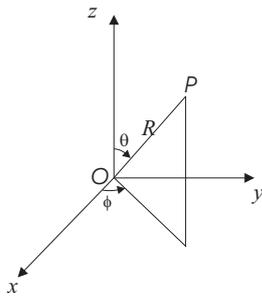
$$d\bar{l}^2 = a^2(t_0)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j \quad i = 1, 2, 3$$

Dobbiamo ora definire  $\tilde{g}_{ij}$  per uno spazio a 3 dimensioni che sia isotropo e omogeneo.

## 4.2 La metrica di Robertson e Walker

Usiamo anzitutto il fatto di avere una simmetria sferica dovuta all'isotropia scegliendo un sistema di coordinate sferico, che riflette questa simmetria. Restiamo, per ora, nello spazio euclideo e definiamo:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$



Definita in questo modo la superficie sferica è immediato ricavare il tensore metrico:

$$\begin{aligned}\bar{x}_R &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \bar{x}_\theta &= (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta) \\ \bar{x}_\phi &= (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0)\end{aligned}$$

$${}^3g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$dl^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = dR^2 + R^2d\Omega^2$$

Per  $R = cost$  sarà  $dl^2 = R^2d\Omega^2$  con  ${}^2g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ . Ricordiamo che l'area della superficie si può ottenere dalla relazione

$$dA = \sqrt{{}^2g} d\theta d\phi = R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

da cui l'area della sfera è pari a

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

Questa relazione si può generalizzare alle tre dimensioni ottenendo in questo caso un volume:

$$dV = \sqrt{{}^3g} dR d\theta d\phi = R^2\sin\theta dR d\theta d\phi$$

da cui otteniamo

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

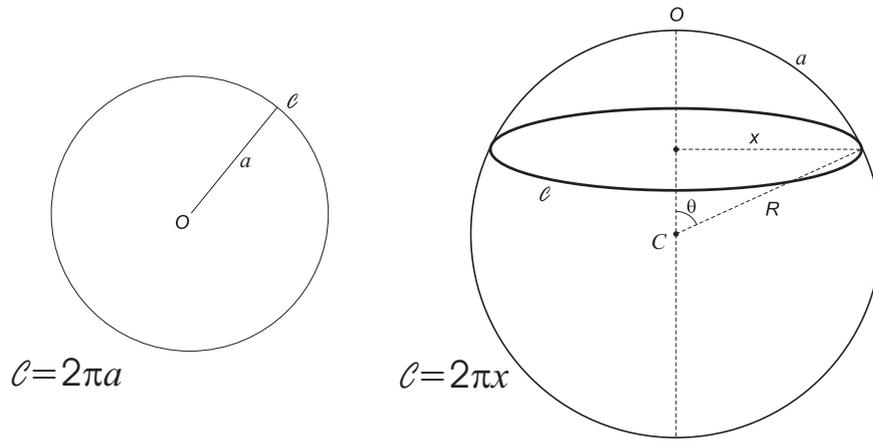
Tutto questo vale nella spazio euclideo, in cui l'area della sfera è  $4\pi \times$  (il coefficiente di  $d\Omega^2$ ). In uno spazio generico, non euclideo, ma a simmetria sferica, lo scostamento dallo spazio euclideo si farà sentire (a causa dell'isotropia) solo in direzione radiale. Ogni punto si troverà su una superficie sferica bidimensionale, il cui elemento di linea sarà

$$dl^2 = g(r')(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = g(r')d\Omega^2$$

dove  $g(r')$  è una funzione della terza coordinata (quella radiale) che abbiamo chiamato  $r'$ . Sulla sfera  $g(r') = cost$ , e l'area della sfera sarà  $4\pi \times g(r')$ .

Poichè ho la massima libertà nel definire il sistema di coordinate, posso ridefinire la coordinata radiale  $r$  in modo che  $r^2 \equiv g(r')$ , con una trasformazione  $r' \rightarrow r$ . Allora, nuovamente, una superficie con  $r = cost$  ha area  $4\pi r^2$ , ma ora  $r$  non corrisponde più alla distanza propria radiale (misurata idealmente con regoli a  $t = cost$ ., immaginando cioè di congelare l'espansione) dal centro alla superficie sferica, anche se ovviamente ci sarà un legame tra le due grandezze.

Posso vedere la cosa in modo intuitivo riducendo di uno la dimensione dello spazio e parlando di circonferenza anzichè di area. Nel piano euclideo abbiamo  $C = 2\pi a$ ; ma su una sfera sarà  $C = 2\pi f(a) = 2\pi x$  con  $x = f(a) = R\sin\theta = R\sin(a/R)$ . Ora  $x$  non rappresenta la distanza propria della circonferenza dal centro, che è  $a$ , ma è una coordinata come le altre, e la posso usare se mi torna utile.



Torniamo alla sfera nello spazio 3-D, con  $r$  come coordinata radiale (legata alla distanza propria ma diversa da questa). L'elemento di linea nello spazio sarà

$$dl^2 = g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

I termini del tipo  $g_{r\theta}$  o  $g_{r\phi}$  saranno nulli poichè la coordinata radiale  $r$  sarà, per la simmetria sferica che impongo, perpendicolare alle superfici  $r = cost$ .

Tornando allo spazio-tempo avremo quindi un

$$ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2[f(r)dr^2 + r^2d\Omega^2]$$

con  $f(r)$  da determinare. Fissiamo la coordinata temporale:  $t = t_0$ , così che  $a(t) = a(t_0) = a_0 = cost$ ; il tensor metrico della parte spaziale sarà (in coordinate  $r, \theta, \phi$ ):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 f(r) & 0 & 0 \\ 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad g = a^6 f(r) r^4 \sin^2\theta$$

Voglio imporre la condizione che lo spazio sia omogeneo; questo significa che anche la curvatura dello spazio sarà costante ovunque. Ho una sola funzione da definire,  $f(r)$ , per cui mi basta una sola condizione, cioè che lo scalare di Ricci della sezione spaziale a tempo cosmico costante,  ${}^3R$ , sia costante.

Ricordiamo che  ${}^3R = g^{\alpha\beta} {}^3R_{\alpha\beta}$  e  ${}^3R_{\alpha\beta} = {}^3R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$  (abbiamo messo l'apice  ${}^3$  davanti a  $R$  per indicare che ci riferiamo alla parte spaziale, non allo spazio-tempo completo).

Il calcolo è lungo, noioso, e banale. Riportiamo solo alcuni passaggi. Si inizia come sempre dalle connessioni affini; ce ne sono 18 indipendenti; di queste solo 7 sono diverse da zero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{f} \frac{df}{dr} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{f} \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2\theta}{f} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Poichè  ${}^3R = g^{\beta\delta} {}^3R_{\beta\delta} = g^{11} {}^3R_{11} + g^{22} {}^3R_{22} + g^{33} {}^3R_{33}$  risulta che:

$${}^3R_{11} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{f} \frac{df}{dr} \quad {}^3R_{22} = 1 - \frac{1}{f} + \frac{1}{2} \frac{r}{f^2} \frac{df}{dr} \quad {}^3R_{33} = \sin^2\theta \cdot {}^3R_{22}$$

da cui, imponendo che  ${}^3R = costante = K$

$${}^3R = K = \frac{2}{a^2 r^2} \left[ 1 - \frac{1}{f} + \frac{r}{f^2} \frac{df}{dr} \right] = \frac{2}{a^2 r^2} \left[ 1 - \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{f} \right) \right] = \frac{2}{a^2 r^2} \frac{d}{dr} \left[ r \left( 1 - \frac{1}{f} \right) \right]$$

da cui

$$d \left[ r \left( 1 - \frac{1}{f} \right) \right] = \frac{K a^2 r^2}{2} dr$$

cioè

$$r \left( 1 - \frac{1}{f} \right) = \frac{K a^2 r^3}{6} + A \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{1}{1 + \frac{K a^2 r^2}{6} - \frac{A}{r}}$$

Ma, se  $r \rightarrow 0$ , la metrica sarà quella euclidea per cui  $f(r) \equiv 1$ ; ne segue che  $A = 0$  e

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \frac{K a^2(t) r^2}{6}} + r^2 d\Omega \right]$$

Osserviamo però che, come avevamo detto, la dipendenza dal tempo della parte spaziale si esplica attraverso la  $a^2(t)$  davanti alla parentesi quadra, ed il termine all'interno di questa non dipende dal tempo. Questo significa che  $K a^2(t)$  non dipende dal tempo, e questo si vede anche dalla relazione che definisce  $K$ , nella quale si vede che  $K a^2$  è funzione di  $r$ . Sarà allora  $K = K(t)$ .

Definiamo un cambiamento di scala in  $r$  tale che  $\frac{K a^2 r^2}{6} \equiv k \tilde{r}^2$ , dove  $k = 0$  se  $K = 0$ , altrimenti  $k$  ha lo stesso segno di  $K$ , ma modulo 1. Abbiamo quindi

$$r^2 = \frac{6k}{K a^2} \tilde{r}^2 \quad \rightarrow \quad r = \tilde{r} \sqrt{\frac{6k}{K a^2}} \quad dr = \sqrt{\frac{6k}{K a^2}} d\tilde{r}$$

e quindi

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{6k}{K(t) a^2(t)} \cdot \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \frac{6k}{K(t) a^2(t)} \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right] = \frac{6k}{K(t)} \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

Se vogliamo che  $dl^2 = \tilde{a}^2(t)[\dots]$ , definiamo  $\frac{6k}{K(t)} \equiv \tilde{a}^2(t)$  e avremo:

$$dl^2 = \tilde{a}^2(t) \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

in cui  $K(t) = {}^3 R(t) \equiv \frac{6k}{\tilde{a}^2(t)}$ .

Se finalmente lascio cadere la tilde inessenziale avremo che la metrica del nostro universo si potrà scrivere

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

che è la *metrica* (l'elemento di linea) di *Robertson-Walker*, in cui lo scalare di Ricci che esprime la curvatura della parte spaziale è  $K = 6k/a^2(t)$ , dove  $t$  è il tempo cosmico, tempo proprio degli osservatori co-moventi,  $\theta$  e  $\phi$  sono coordinate angolari e  $r$  è legata alla distanza radiale.

### 4.3 Topologia dell'Universo

Vediamo ora in dettaglio le proprietà topologiche dei modelli cosmologici corrispondenti ai tre casi  $k = 0, +1, -1$ .

#### 4.3.1 Caso $k = 0$

Se  $k = 0$  la sezione spaziale a tempo cosmico costante è uno spazio euclideo (piatto)  $\mathbf{E}^3$ ,  $0 < r < \infty$ , lo spazio è infinito. Superfici e volumi si esprimono nel modo abituale.

#### 4.3.2 Caso $k = +1$

Per  $d\theta = d\phi = 0$  abbiamo  $dl = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$  per cui vedo che  $|r| < 1$  e la metrica diverge se  $r \rightarrow 1$ . Posso eliminare questa divergenza scegliendo una nuova coordinata  $\chi$  al posto di  $r$ , tale che  $r = \sin \chi$  così che

$$dr = \cos \chi d\chi = \sqrt{1 - \sin^2 \chi} d\chi = \sqrt{1 - r^2} d\chi$$

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{(1 - r^2) d\chi^2}{1 - r^2} + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right] = a^2(t) \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right]$$

con  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

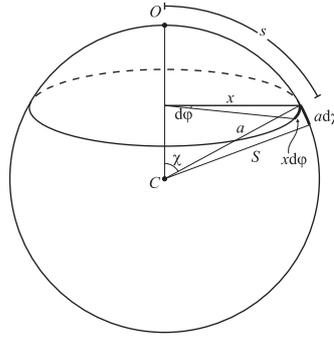
Per visualizzare meglio la metrica facciamo un passo indietro, alla sfera in 2-D in  $\mathbf{E}^3$ . Sarà  $\chi = s/a$ ;  $s = a\chi$ ,  $a\sin\chi = x$

$$dl^2 = a^2 d\chi^2 + x^2 d\phi^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\phi^2)$$

Inoltre, detto  $u \equiv x/a$ ,  $u = \sin\chi$ ,  $du = \cos\chi d\chi = \sqrt{1 - \sin^2\chi} d\chi = \sqrt{1 - u^2} d\chi$  e la metrica diviene:

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{du^2}{1 - u^2} + u^2 d\phi^2 \right]$$

Vedo che la coordinata  $r$  in Robertson-Walker con  $k = +1$  corrisponde a  $x/a$  nel caso 2-D della sfera;  $\chi$  varia tra 0 e  $\pi$ .



Consideriamo una ipersfera<sup>13</sup>: una sfera 3-D in  $\mathbf{E}^4$ . L'equazione della sfera, estendendo il teorema di Pitagora e ricordando che la quarta dimensione sarà in qualche modo perpendicolare alle altre tre, sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \quad a = cost = \text{raggio della sfera}$$

Sia  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (sfera 2-D per  $u = cost$ ) così che  $a^2 = r^2 + u^2 = cost$ . Differenziando ottengo

$$2rdr + 2udu = 0 \quad \rightarrow \quad rdr = -udu$$

$$du^2 = \frac{r^2 dr^2}{u^2} = \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$$

Questo per garantire che lo spostamento  $du$  sia sulla ipersfera in  $\mathbf{E}^4$ . Il  $dl^2$  in  $\mathbf{E}^4$  sarà (ricordiamo che  $\mathbf{E}^4$  è euclideo):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$$

Esprimiamo  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  in coordinate polari come al solito abbiamo:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + du^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} = dr^2 \left[ 1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2} \right] + r^2 d\Omega^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2 d\Omega^2$$

Posto  $\tilde{r} = r/a$  abbiamo che ( $dr = a d\tilde{r}$ ):

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

E questa è la parte spaziale della metrica di Robertson-Walker con  $k = +1$ , che è quindi localmente la stessa di una ipersfera in  $\mathbf{E}^4$ .

Torniamo alla metrica di R&W nella forma  $dl^2 = a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2]$  e, ricordando come si valutano gli elementi di superficie e di volume, calcoliamo appunto superficie e volume.

Per una sfera 2-D, ponendo  $d\chi = 0$ , avremo

$${}^2g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2\chi & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \sqrt{{}^2g} = a^2 \sin^2\chi \sin\theta$$

$$A(\chi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sin^2\chi \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi a^2(t) \sin^2\chi$$

<sup>13</sup>Possiamo pensare alla sfera come ad un disco il cui bordo è tutto identificato in un punto. Con un'analogia, possiamo pensare ad un'ipersfera come ad una sfera (intesa come volume sferico), la cui superficie è tutta identificata in un punto.

Questa è minima sia per  $\chi \rightarrow 0$  che per  $\chi \rightarrow \pi$  e massima all' "equatore"  $\chi = \pi/2$ , ed è sempre, come ci si aspetta per  $K > 0$ ,  $k = +1$ :

$$\frac{\text{Area}}{(\text{raggio})^2} = \frac{4\pi a^2 \sin^2 \chi}{a^2 \chi} < 4\pi$$

Il raggio proprio si ottiene dalle metrica ponendo  $d\theta = d\phi = 0$  e risulta  $r_p = a\chi$ .

Per calcolare il volume dello spazio avremo

$${}^3g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{{}^3g} = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta$$

Il volume entro la coordinata "radiale"  $\chi$  sarà:

$$V(\chi) = \int_{\chi=0}^{\chi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi d\chi = 2\pi a^3 \left( \chi - \frac{\sin 2\chi}{2} \right)$$

che cresce, ed ha un valore massimo finito, per  $\chi = \pi$  pari a  $V = 2\pi^2 a^3$ .

Il volume totale dello spazio è proporzionale a  $a^3$ , per cui si dice che  $a(t)$  è il "raggio dell'universo". Il volume è finito, anche se non ci sono confini fisici e la topologia di questo spazio è indicata con  $\mathbf{S}^3$ .

### 4.3.3 Caso $k = -1$

In questo caso non vi sono discontinuità in  $r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) e

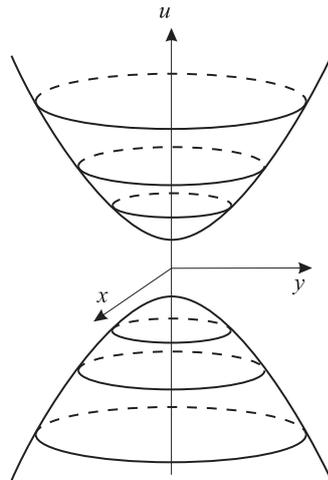
$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Introduciamo anche qui la variabile  $\chi$  e definiamo  $r \equiv \sinh \chi$  da cui (si ricordi che  $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$ )  $dr = \cosh \chi d\chi = \sqrt{1 + \sinh^2 \chi} d\chi = \sqrt{1 + r^2} d\chi$  e

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Possiamo cercare di fare come nel caso di  $k = +1$ : di "immergere" la superficie di cui  $dl^2$  è la metrica, in uno spazio a 4 dimensioni. Definiamo la superficie

$$\begin{aligned} u^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= a^2 = \text{cost} & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ u^2 - r^2 &= a^2 \Rightarrow u du = r dr & du^2 &= \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} \end{aligned}$$



Possiamo vedere la superficie (eliminando, come in figura, la coordinata  $z$ ) come un iperboloido a 2 falde. Ma se tentiamo di fare la stessa cosa fatta per la ipersfera scrivendo  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$  otteniamo

$$dl^2 = \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

che **non** è metrica voluta. Per riuscire nell'intento dobbiamo assumere uno spazio simile a quello di Minkowski

con tensor metrico  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  per cui  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2$  e allora:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \frac{r^2 dr}{a^2 + r^2} = \frac{dr}{1 + r^2/a^2} + r^2 d\Omega^2$$

e posto  $\bar{r} \equiv r/a$  si ha, come voluto:

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\bar{r}}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]$$

Non è possibile contenere lo spazio, indicato con  $\mathbf{H}^3$ , in  $\mathbf{E}^4$ , come si cercava di fare! Ci vorrebbe infatti  $\mathbf{E}^7$  (come per  $\mathbf{H}^2$  ci vorrebbe  $\mathbf{E}^5$ ).

Analogamente a quanto abbiamo fatto per  $k = +1$  possiamo calcolare la superficie della sfera di raggio  $a\chi$  (raggio proprio):

$$A(\chi) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} a^2 \sinh^2 \chi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi$$

e poichè  $\sinh \chi \geq \chi$  si ha che

$$\frac{\text{Area}}{(\text{raggio})^2} = \frac{4\pi a^2 \sinh^2 \chi}{a^2 \chi^2} > 4\pi$$

Il volume, potendo  $\chi \rightarrow \infty$ , è infinito. Il fatto che la superficie della sfera cresca più rapidamente che nello spazio euclideo rende impossibile contenere  $\mathbf{H}^3$  in  $\mathbf{E}^4$ , cosa invece possibile per  $\mathbf{S}^3$ , in cui l'area cresce meno rapidamente che in  $\mathbf{E}^4$ .

Chiudiamo il paragrafo facendo osservare che la metrica di R&W, oltre che nel modo in cui l'abbiamo presentata sopra, cioè

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

si può trovare scritta anche nella forma, peraltro equivalente,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

con  $R(t)$  fattore di scala, e la funzione  $S_k(\chi)$  definita come:

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh(\chi) & (k = -1) \end{cases}$$

Ma, **attenzione**, al posto di  $\chi$  si può trovare scritto  $r$ , per cui bisogna capire dal contesto quale delle due relazioni viene usata! Noi useremo generalmente la prima delle due forme.

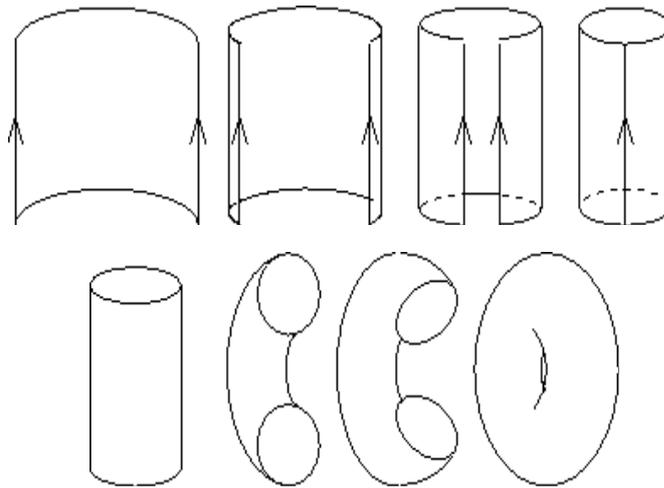
#### 4.3.4 Topologie più complesse

Nei tre casi visti sopra abbiamo analizzato le tre topologie più semplici:  $\mathbf{E}^3$ ,  $\mathbf{S}^3$  ed  $\mathbf{H}^3$ . Ma la Relatività Generale è in realtà una **teoria locale**, e la nostra assunzione di isotropia e omogeneità locali implica che lo spazio è **localmente** quello di  $\mathbf{E}^3$ ,  $\mathbf{S}^3$  ed  $\mathbf{H}^3$ .

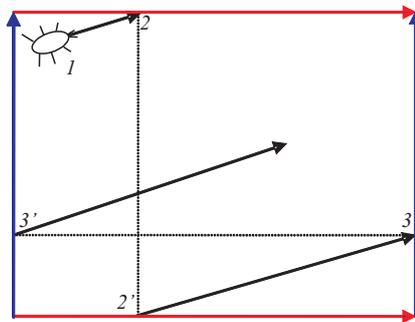
Sono però possibili topologie più complesse<sup>14</sup>. Vediamo alcuni esempi.

Se partiamo inizialmente in 2 dimensioni (per aiutare l'intuizione) possiamo costruire un *Toro* 2D ( $\mathbf{T}^2$ ) partendo da una superficie rettangolare piana (euclidea). Si identificano in modo opportuno punti appartenenti al bordo del rettangolo e questo si può visualizzare immaginando di eseguire piegature ed incollaggi come mostrato qui sotto (ma la curvatura si mantiene nulla, mentre la ciambella qui sotto non ha curvatura nulla in  $\mathbf{E}^3$ ):

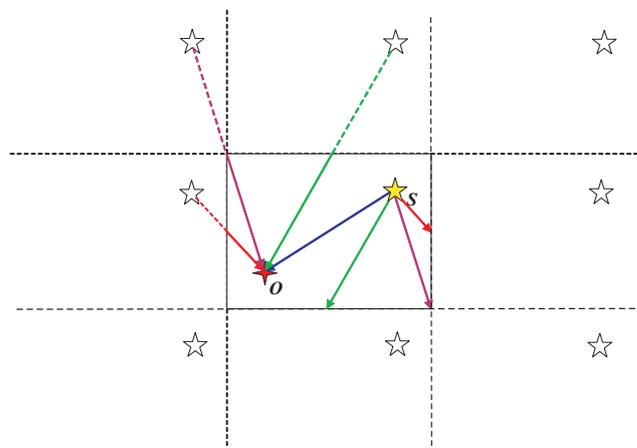
<sup>14</sup>Si vedano, ad esempio, gli articoli *The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds* di *W.P. Thurston* e *J.R. Weeks*, Scientific American, July 1984, p. 94 e *La forma dell'universo* di *C. Adams* e *J. Shapiro*, Le Scienze, 414, p. 72. Anche il libro *La segreta geometria del cosmo* di *J.-P. Luminet*, 2004, Raffaello Cortina Editore, ed il sito di *Jeffrey Weeks* [www.geometrygames.org](http://www.geometrygames.org)



Immaginiamo ora un insetto che cammina sulla superficie del toro. L'insetto attraversa il confine superiore in 2 e rientra dal basso in 2', esce in 3 a destra e rientra in 3' a sinistra. Il toro è equivalente ad un rettangolo i cui bordi sono identificati a due a due. Pur essendo finita, la superficie non ha confini.



Un altro effetto tipico di questo tipo di topologia compatta è la presenza di fantasmi (*ghosts*), cioè di immagini multiple dello stesso oggetto  $S$ , che arrivano in  $O$  da varie direzioni. Poiché i cammini, e quindi i tempi di percorrenza, sono diversi, le varie immagini dello stesso oggetto ce lo mostrano in diversi momenti della sua evoluzione (quindi non è banale riconoscerlo!).

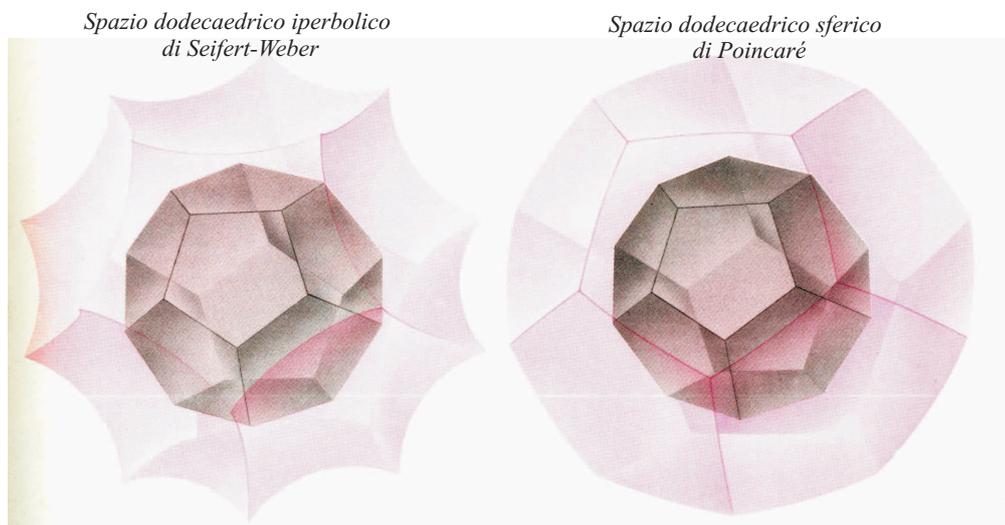


L'analogo di  $\mathbf{T}^2$  in 3D è il toro 3D,  $\mathbf{T}^3$ . Un osservatore posto al suo interno ha l'impressione di trovarsi in una stanza con pareti, soffitto e pavimento ricoperti di specchi che però non rovesciano l'immagine. Anche qui osserveremo, per ogni oggetto reale, i suoi fantasmi in tutte le direzioni.



Quanto detto vale per uno spazio Euclideo (2D o 3D), che può essere rappresentato, oltre che con una celletta a forma di parallelepipedo, anche con una a forma di prisma a base esagonale. Nel caso di uno spazio 3D euclideo ci sono 10 varietà euclidee compatte candidate a rappresentare il nostro universo, che apparentemente non presentano confini, come il toro 2D o 3D.

Esistono varietà compatte anche negli spazi non euclidei, con curvatura positiva e negativa. Tra queste ricordiamo lo spazio dodecaedrico iperbolico di *Seifert-Weber*, variante compatta (cioè con volume finito) di  $\mathbf{H}^3$ , ottenuto incollando ogni faccia del dodecaedro a quella opposta dopo una rotazione di  $108^\circ$  (tre decimi di angolo giro). Una variante compatta dell'ipersfera  $\mathbf{S}^3$  è invece rappresentata dallo spazio dodecaedrico sferico di *Poincaré*, ottenuto incollando ogni faccia del dodecaedro a quella opposta dopo una rotazione di  $36^\circ$  (un decimo di angolo giro).



Già nel 1924 *Friedmann* e nel 1927 *Lemaître* si erano resi conto che le equazioni di Einstein non permettevano, da sole, di decidere se l'universo fosse finito o infinito. Friedmann mostrò come lo spazio possa diventare finito se si identificano i punti tra loro, intuì che questo consentiva l'esistenza di fantasmi e osservò che uno spazio a curvatura positiva è sempre finito. Lemaître fece notare che gli spazi con curvatura negativa ammettono topologie con volume finito.

*J.-P. Luminet*<sup>15</sup> ha interpretato la mancanza di fluttuazioni del fondo cosmico a microonde (*CMB*) su scale angolari maggiori di  $60^\circ$  come dovute al volume finito del nostro universo. La cella che meglio si accorda con i dati sperimentali (quelli del satellite *WMAP*) sarebbe quella di uno spazio dodecaedrico sferico di Poincaré.

In base a quanto detto sopra l'affermazione che se l'universo è finito la sua geometria deve essere localmente sferica, e che se la geometria è localmente iperbolica o euclidea l'universo deve essere infinito, è sbagliata. Ma tutti gli spazi di curvatura costante e localmente sferici ( $k = +1$ ) sono compatti.

<sup>15</sup>J.-P. Luminet et al., 2003, *Nature* **425**, 593

Poichè spesso si trova, nella letteratura, confusione tra curvatura, topologia ed evoluzione temporale di  $a(t)$ , vediamo le possibilità corrispondenti a questi tre parametri (l'evoluzione in dettaglio di  $a(t)$  la vedremo meglio più avanti):

- Sulla base della **curvatura** (della sezione spaziale di  $a = \text{costante}$ ) possiamo avere:
  - un universo *sferico* (ellittico) se  $k = +1$
  - un universo *euclideo* (piatto) se  $k = 0$
  - un universo *iperbolico* se  $k = -1$
- In base alla **topologia** possiamo avere:
  - un universo *finito* (per quanto riguarda il volume parte spaziale)
  - un universo *infinito* (per quanto riguarda il volume parte spaziale)
- Per quanto riguarda l'**evoluzione temporale** e “destino” futuro possiamo avere:
  - un universo *chiuso*  $\rightarrow$  termina con un ricollasso
  - universo *critico*  $\rightarrow$  diventa asintoticamente statico
  - universo *aperto*  $\rightarrow$  l'espansione continua all'infinito

curvatura	topologia (volume spaziale)
sferico $k = +1$	finito
euclideo $k = 0$	finito o infinito
iperbolico $k = -1$	finito o infinito

#### 4.4 Legge di Hubble

Consideriamo un osservatore co-movente preso come origine, un punto caratterizzato dalle coordinate co-moventi  $(r, \theta, \phi)$  ed un raggio luminoso (il metodo più efficiente per scambiare informazioni) che li congiunge radialmente ( $d\theta = d\phi = 0$ ). Sappiamo che per i fotoni  $ds^2 = 0$ .

Dalla metrica di R&W avremo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \equiv 0$$

Un segnale luminoso emesso dal punto  $(r, \theta, \phi)$  a  $t = 0$  (nell'ipotesi che esista un istante iniziale dell'universo, come nel modello del *Big Bang*) giungerà a  $r = 0$  (l'osservatore) all'istante  $t$  tale che (ricordiamo che, se  $dt$  è positivo,  $dr$  è negativo, cioè al trascorrere del tempo il raggio luminoso passa per punti via via a noi più vicini):

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Vediamo il significato del termine a destra. Immaginiamo di misurare, ad un istante  $t$  fissato, con una serie di regoli (immaginando di congelare l'espansione durante la misura) la distanza radiale tra l'origine e il punto di coordinate  $(r, \theta, \phi)$ ; dalla parte spaziale ( $dt \equiv 0$ ) di R&W avremo che questa distanza, detta **distanza propria**  $d_{pr}$ , sarà espressa da:

$$d_{pr}(t) = \int_0^r \frac{a(t) \cdot dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a(t) \cdot f_k(r)$$

dove, per quanto abbiamo già visto quando avevamo fatto le sostituzioni  $r = \sin \chi$ ,  $r = \chi$ ,  $r = \sinh \chi$ :

$$f_k(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \arcsin r \simeq r + r^3/6 + \dots & (k = +1) \\ r & (k = 0) \\ \operatorname{arcsinh} r \simeq r - r^3/6 + \dots & (k = -1) \end{array} \right\} \simeq r + k r^3/6 + \dots$$

In realtà la  $d_{pr}(t)$  non è direttamente misurabile. Il suo legame con  $d_{pr}(t_0)$  ( $t = t_0$  corrisponde all'epoca attuale) viene dal fatto che

$$\frac{d_{pr}(t)}{a(t)} = \frac{d_{pr}(t_0)}{a(t_0)} = f_k(r) \quad \text{essendo } r = \text{cost nel tempo}$$

$$d_{pr}(t) = \frac{a(t)}{a_0} d_{pr}(t_0) \quad (a_0 = a(t_0))$$

$d_{pr}(t)$  è quindi funzione del tempo tramite  $a(t)$ . La quantità  $f_k(r)$ , o anche  $a_0 f_k(r)$ , invariante nel tempo, viene chiamata anche *distanza co-movente*.

Se deriviamo rispetto al tempo la relazione  $d_{pr}(t) = a(t) \cdot f_k(r)$  otteniamo il tasso di variazione di  $d_{pr}$  nel tempo, che dimensionalmente è una velocità, e che viene chiamata **velocità di recessione**  $v_r$ :

$$\frac{dd_{pr}(t)}{dt} \equiv v_r(t) = \dot{a}(t) f_k(r) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d_{pr}(t) \equiv H(t) d_{pr}(t)$$

$$v_r(t) = H(t) d_{pr}(t)$$

Questa relazione esprime la **legge di Hubble** e la quantità  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  è detta **parametro di Hubble**. Se scriviamo questa relazione per il tempo attuale  $t_0$  avremo  $v_r(t_0) = H_0 d_{pr}(t_0)$ , dove  $H_0 \equiv H(t_0)$  è la cosiddetta **costante di Hubble**. Si usa parametrizzare l'incertezza sul suo valore sperimentale scrivendo  $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , con  $0.5 \leq h \leq 1.0$ .  $H_0$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, ed è approssimativamente  $1/H_0 \simeq 3 \cdot 10^{17} h^{-1} \text{ s}$ . Dopo decenni di dispute, il valore di  $H_0$  sembra finalmente abbastanza definito; il valore fornito di recente dal *Key Program* a questo dedicato dallo *Hubble Space Telescope* è  $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , mentre dal fondo a microonde e dalla struttura a grande scala dell'universo si ha, in ottimo accordo,  $H_0 = 71 (+0.04, -0.03) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Sulla legge di Hubble va fatto un commento importante. Fissato  $H_0$ , se  $d_{pr}$  cresce a sufficienza,  $v_r$  può diventare maggiore della velocità della luce. La distanza propria alla quale  $v_r = c$  viene detta **raggio di Hubble**,  $R_H$ , che viene quindi definito come

$$R_H(t) \equiv \frac{c}{H(t)}$$

e dipende dal tempo, così come  $H$ . Il fatto che, per  $d_{pr} > R_H$ , risulti  $v_r > c$  può creare qualche sconcerto, ma questo non è in contrasto con la Relatività Ristretta perchè, rispetto agli osservatori co-moventi, la velocità di qualunque oggetto è, *localmente*, sempre minore di  $c$ . Nessuna informazione viaggia con  $v > c$ . È la distanza tra osservatori, lo spazio tra loro interposto, che cresce più rapidamente di  $c$ , ma questo non corrisponde ad una trasmissione di informazione. Inoltre, per misurare una velocità relativa ad un osservatore, devo poter spostare i due vettori velocità (dell'oggetto e dell'osservatore) nello stesso punto e fare la differenza; in uno spazio euclideo questo implica un trasporto parallelo il cui risultato, però, in uno spazio curvo, dipende dal percorso. In uno spazio curvo non ha quindi senso parlare di velocità relativa di oggetti che non si trovino nello stesso punto.

Oltre alla costante (parametro) di Hubble è stato definito un altro parametro: il cosiddetto **parametro di decelerazione**  $q$ , così detto in quanto legato a  $\ddot{a}$  che, in un universo senza costante cosmologica, è sempre negativo. Per definizione

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t)^2}$$

con il corrispondente valore  $q_0$  relativo al tempo  $t_0$ . I due parametri  $H_0$  e  $q_0$  tornano utili nello **sviluppo in serie** di  $a(t)$  in un intorno di  $t = t_0$ . Avremo

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots = a(t_0)[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots]$$

che ci sarà utile in seguito.

## 4.5 Tempo conforme - Redshift

Abbiamo scritto la metrica di R&W nella forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2] \quad \text{con} \quad S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh\chi & k = -1 \end{cases}$$

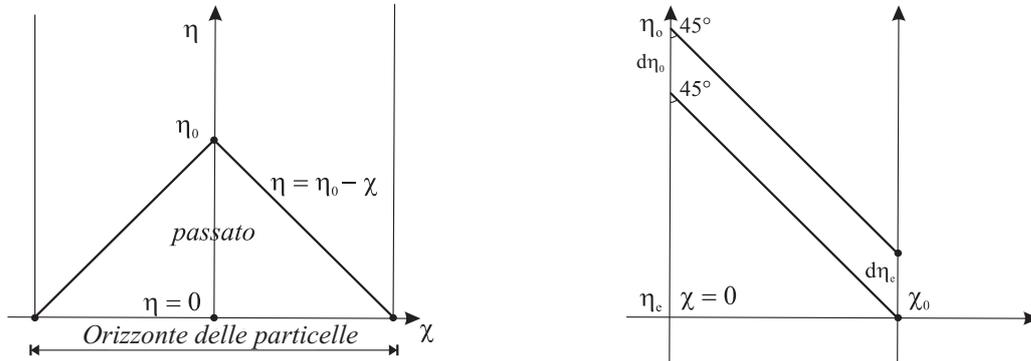
In questo caso si dice che si usa il *gauge sincrono*. È utile talvolta separare completamente il fattore di scala dal resto. Per fare questo si definisce il *tempo conforme*  $\eta$  in modo che  $d\eta = c dt/a(t)$ , e la metrica si può scrivere (*gauge conforme*):

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - (d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2)]$$

Se consideriamo il moto di un fotone che ci arriva con  $\theta = \phi = \text{cost}$  e per cui  $ds^2 = 0$ , sarà

$$a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2] = 0$$

cioè  $d\eta = \pm d\chi$  che rappresenta il cono luce, con i raggi inclinati a  $45^\circ$ . Se  $\eta = 0$  rappresenta l'inizio dell'universo, vedo che ci sono valori di  $\chi$  tali che da essi non è arrivata ancora l'informazione: c'è un orizzonte delle particelle. Per un fotone che si muove verso l'osservatore ( $\chi = 0$ ) sarà  $\eta = \eta_0 - \chi$  con  $\eta_0 = "$   $\eta$  attuale".



Due segnali, emessi ai tempi  $\eta_e$  e  $\eta_e + d\eta_e$  da una sorgente co-movente a  $\chi = \chi_e$ , saranno ricevuti in  $\chi = 0$  ai tempi  $\eta_0$  ed  $\eta_0 + d\eta_0$ .

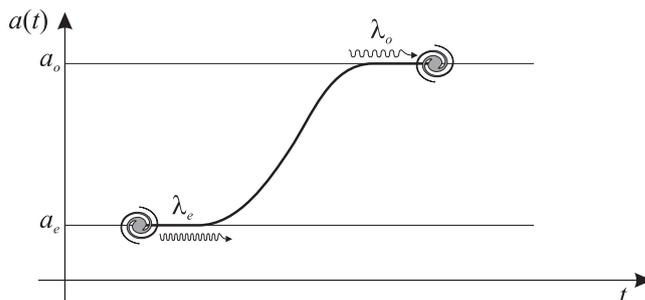
Poichè nel gauge conforme il moto dei fotoni è sempre inclinato di  $45^\circ$ , sarà  $d\eta_e \equiv d\eta_0$  e quindi

$$\frac{cdt_e}{a(t_e)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)}$$

Se  $dt_e$  è il periodo di un'onda elettromagnetica di frequenza  $\nu_e = 1/dt_e$ , la frequenza osservata  $\nu_0 = 1/dt_0$  sarà data da  $\nu_e a(t_e) = \nu_0 a(t_0) = \nu_0 a_0$  cioè:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a(t_e)} \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a(t_e)}{a_0}$$

La lunghezza d'onda subisce una "dilatazione" pari a quella del fattore di scala. E' la variazione del fattore di scala dovuta all'espansione, e non la velocità relativa tra sorgente e ricevitore, che produce questo effetto, che quindi è improprio definire effetto Doppler. Per illustrare questo fatto supponiamo che in un ideale modello cosmologico un fotone venga emesso quando  $a(t)$  è costante; poi subentra una fase di espansione da  $a_e$  ad  $a_0$ , seguita da una nuova fase di  $a = cost = a_0$ , durante la quale il fotone viene ricevuto da un osservatore. Sorgente e osservatore sono in quiete relativa quando il fotone viene emesso e ricevuto, quindi non c'è effetto Doppler, ma il redshift cosmologico è presente e  $\lambda_0/\lambda_e = a_0/a_e$ !



Se definiamo il **redshift**  $z$  come

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0}{a(t_e)} - 1$$

otteniamo

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{a_0}{a(t_e)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{a_0}{1 - z}$$

Questa relazione è anche utile per legare il redshift al fattore di scala.

Anche se il redshift cosmologico non è dovuto all'effetto Doppler, *localmente*, al prim'ordine in  $v/c$ , il fenomeno può essere visto in questi termini. Infatti, dalla formula dell'effetto Doppler, si ha:

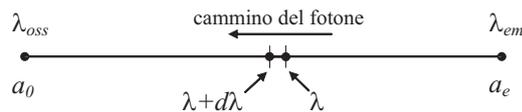
$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0 - a(t_e)}{a(t_e)}$$

ma  $a(t_e) \simeq a_0 + H_0 a_0 (t_e - t_0) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$  per cui

$$v \simeq c \frac{-H_0 a_0 (t_e - t_0)}{a_0 + H_0 a_0 (t_e - t_0)} \simeq c H_0 (t_0 - t_e) [1 + H_0 (t_0 - t_e)] \simeq c H_0 (t_0 - t_e) \simeq c H_0 \Delta t$$

Ma, se  $ds^2 = 0$  e  $d\theta = d\phi = 0$ ,  $c^2 dt^2 = a^2 d\chi^2$  e  $c\Delta t = a_0 \Delta\chi = d_{pr}$  e quindi  $v = H_0 d_{pr}$  cioè proprio la legge di Hubble. Quindi, procedendo a ritroso a partire da questa, mi ritrovo la formula dell'effetto Doppler. *Localmente*, quindi, il redshift cosmologico si può interpretare come un effetto Doppler dovuto al moto differenziale tra due osservatori co-moventi vicini.

Ma possiamo anche interpretarlo *su grande scala* come un effetto Doppler *integrato*, somma dei tanti effetti differenziali lungo il cammino del fotone dalla sorgente fino a noi.



Consideriamo gli osservatori co-moventi posti lungo il cammino che il fotone compie dalla sua emissione ( $a = a_e$ ) al suo arrivo a noi ( $a = a_0$ ). Se consideriamo due osservatori vicini, separati da una distanza propria  $dl$  che il fotone percorre in un tempo  $dt$  ( $dl = cdt$ ), che si muovono con velocità relativa  $dv$  a causa dell'espansione ( $dv = Hdl$ ), e che osservano il fotone, emesso con  $\lambda = \lambda_{em}$ , rispettivamente con lunghezze d'onda  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ , avremo (ricordiamo che  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ ) per effetto Doppler *locale* :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = dz = \frac{dv}{c} = \frac{Hdl}{c} = \frac{Hcdt}{c} = \frac{da}{a} \frac{1}{dt} dt = \frac{da}{a}$$

Da questa deriva, integrando, che

$$\int_{a_e}^{a_0} d \ln \lambda = \int_{a_e}^{a_0} d \ln a \quad \rightarrow \quad \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \ln \frac{a_0}{a_e} \quad \rightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_e \frac{a_0}{a_e} = \lambda_e (1 + z)$$

Vedo quindi che posso interpretare il redshift cosmologico semplicemente come un effetto globale dovuto alle differenti velocità relative degli osservatori che immagino posti lungo il cammino del fotone che arriva a noi. Non occorre pensare ad un "stiramento" della lunghezza d'onda del fotone per effetto dell'espansione dello spazio!

## 4.6 Orizzonti

La difficoltà nel definire la topologia globale dell'universo risiede anche in un limite osservativo, non di tipo semplicemente strumentale, ma di natura fisica. Una domanda che ci si potrebbe porre è: *Qual è la frazione dell'universo dai cui punti mi è arrivata finora informazione?* Come abbiamo già più volte sottolineato, l'evidenza osservativa ci suggerisce che l'universo abbia avuto un'origine nel tempo (e gran parte dei modelli teorici supportano questa evidenza).

Abbiamo visto che un segnale luminoso, emesso alla coordinata co-movente  $r = r_H$  a  $t = 0$  arriva all'osservatore ( $r = 0$ ) al tempo  $t$  secondo la relazione

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

In base alla definizione di distanza propria avremo che

$$\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r_H) \equiv \frac{d_{pr}(t, r_H)}{a(t)}$$

La quantità

$$d_H(t) \equiv d_{pr}(t, r_H) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

rappresenta la *distanza propria massima* dalla quale, al tempo  $t$ , abbiamo ricevuto segnali luminosi. Se  $d_H(t)$  è *finito*, esiste una parte dell'universo dalla quale non ci sono ancora giunti segnali luminosi ed esiste quello che si

chiama un **orizzonte delle particelle** (*PH*). Il fatto che  $d_H(t)$  sia finito dipende dal comportamento di  $a(t)$ . Per modelli ragionevoli vedremo che  $d_H \propto t$  ed è quindi finito. Per modelli cosmologici senza singolarità iniziale (come il modello dello *Stato Stazionario*) il limite inferiore di integrazione va posto non a 0 ma a  $-\infty$ .

Se guardiamo invece avanti, possiamo chiederci: *Da quale distanza potremmo in futuro ricevere segnali che partono oggi?* La risposta si ottiene integrando tra  $t$  e  $\infty$  (o  $t = t_{max}$  se c'è ricollasso) anzichè tra 0 e  $t$ .

$$d_E(t) \equiv a(t) \int_t^\infty \frac{cdt'}{a(t')}$$

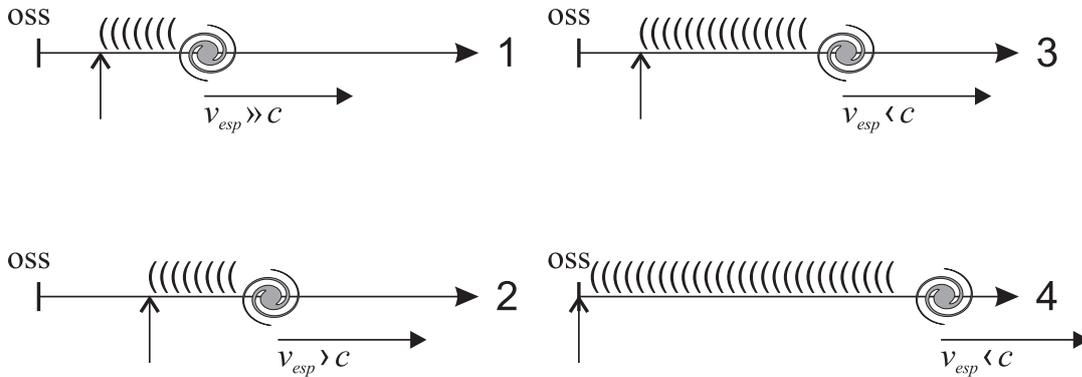
Se l'integrale diverge basta avere pazienza per vedere un qualunque evento; altrimenti ci sono distanze dalle quali non riceveremo mai informazione. In questo caso si ha un **orizzonte degli eventi** (*EH*). Poichè questo accada occorre che  $a(t)$  cresca più rapidamente di  $t$ . Ad esempio se  $a(t) \propto e^{Ht}$ , con  $H = cost$ , avremo:

$$d_E(t) = e^{Ht} \cdot \int_t^\infty \frac{cdt'}{e^{Ht'}} = c e^{Ht} \left[ -\frac{1}{H} e^{-Ht'} \right]_t^\infty = c e^{Ht} \cdot \frac{e^{-Ht}}{H} = \frac{c}{H} = cost$$

come nei modelli dominati da costante cosmologica ed in quello dello *Stato Stazionario*. Ma, mentre  $d_E = cost$ , le distanze proprie delle galassie crescono come  $a(t) \propto e^{Ht}$  e quindi, col passare del tempo, le galassie "escono" da  $d_E$ : ci attende un destino solitario in questo modello cosmologico! Ma le galassie che escono da *EH* sono comunque sempre visibili, ma con una storia, vista da noi, rallentata, e con i fotoni sempre più arrossati. Infatti, dalle galassie sul bordo ci arrivano fotoni a  $t = \infty$  quando  $a(t) \rightarrow \infty$  e quindi con un redshift  $z \rightarrow \infty$  ( $\lambda_{oss} \rightarrow \infty$ ).

Può apparire a prima vista strano che in un universo in espansione, e quindi inizialmente molto "piccolo" rispetto ad oggi, esista un orizzonte delle particelle. La causa di questo risiede nel fatto che il tasso di espansione definito dalla velocità di recessione  $v_r(t)$  può essere, ed in certi casi è, molto maggiore di  $c$  (vedi quanto detto sopra). Questo non viola la Relatività Ristretta perchè la velocità di recessione non corrisponde ad una trasmissione di informazione, ma misura solo come lo spazio tra gli osservatori co-moventi aumenta.

A causa di questa espansione, che nelle prime fasi del *Big Bang* avviene con  $v_r \gg c$ , un fotone, emesso verso di noi nelle prime fasi di vita dell'universo, finisce con l'allontanarsi inizialmente da noi perchè la strada da percorrere aumenta più rapidamente della sua velocità, per poi avvicinarsi quando la velocità di espansione diviene minore di  $c$ .



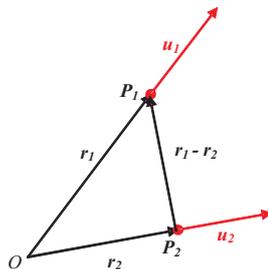
Torniamo brevemente sulla crescita delle mutue distanze tra gli osservatori co-moventi. Si usa esprimere comunemente questo fatto dicendo che lo spazio "si espande"; ma non si deve pensare che sia lo spazio in espansione a trascinare con sè le galassie, come la pasta di un panettone che, lievitando, allontana i canditi uno dall'altro. Subito dopo il *Big Bang*, le particelle elementari che componevano l'universo primordiale (e dalle quali si sono poi formate le galassie), si sono trovate in uno stato di mutuo allontanamento (per il momento dobbiamo prenderla come una condizione iniziale del moto, ma il meccanismo potrebbe essere simile a quello che produce l'inflazione); l'evoluzione di questo mutuo allontanamento, descritto dal fattore di scala  $a(t)$ , deriva dall'applicazione delle equazioni di Einstein ed è legato alla quantità di massa-energia, più la costante cosmologica, presenti nell'universo. Di questa espansione, di questo moto di mutuo allontanamento degli oggetti, possiamo anche dare una descrizione in termini di espansione del *substrato* cosmico; ma il modo più corretto e sicuro è quello di pensare che gli oggetti, date le condizioni iniziali, si muovono sotto l'effetto dell'interazione gravitazionale (includiamo in questa anche la costante cosmologica) con tutte le sorgenti di massa-energia dell'universo, e non perchè trascinati o "allungati" e "stirati" da un misterioso spazio in espansione (cosa che, tra l'altro, richiederebbe di introdurre un nuovo tipo di interazione in grado di produrre questo "stiramento").

A conclusione di queste osservazioni sulla geometria del cosmo, arriviamo a concludere che limiti fisici ci impediscono di accedere a tutto l'universo: ne conosciamo solo una parte, ed estrapoliamo la nostra conoscenza "locale" al tutto. Ricordiamo inoltre che l'universo, per definizione, è l'insieme di tutti gli oggetti e concetti fisici (come stelle, galassie, atomi, spazio e tempo). Non esiste uno spazio fisico al di fuori di un universo finito. In questo senso certe rappresentazioni "naif" dell'universo come un palloncino (2D) che si gonfia nello spazio (3D) possono generare confusione. Inoltre, se l'universo è infinito spazialmente, esso era tale anche nel passato, quando  $a(t) \rightarrow 0$ . Infine, non c'è un punto privilegiato da cui si possa dire che tutto si sia espanso. Ogni punto è equivalente, ed in ogni punto c'è stato il big bang: se, in un punto qualsiasi, risaliamo indietro nel tempo, la densità e la temperatura locali aumentano e tendono all'infinito quando  $t \rightarrow 0$ .

## 4.7 Il modello di Milne

Il fatto di aver definito un "tempo cosmico" in un modo che appare abbastanza naturale, non deve ingannare sulle conseguenze di questa assunzione. Vediamo di illustrare le conseguenze dell'esistenza del tempo cosmico descrivendo il modello cosmologico di Milne (1932), molto semplice, che non usa la Relatività Generale, ma soddisfa il Principio Cosmologico. Si usa invece la Relatività Ristretta. Inoltre questo modello, per certi versi, come vedremo, non soddisfacente, ci aiuta a comprendere alcuni elementi fondamentali dell'espansione cosmica.

Consideriamo uno spazio di Minkowski e supponiamo che ad un certo istante  $t = 0$ , dall'origine  $O$  venga emessa in tutte le direzioni, con tutte le velocità  $u < c$ , una nube di particelle di massa nulla. Tutte queste particelle, essendo nulle le interazioni gravitazionali, si muovono di moto rettilineo uniforme. Secondo l'osservatore  $S$ , solidale con  $O$ , l'universo sarà un insieme di "granelli di polvere" che si espandono con tutte le velocità  $u < c$ ; il "confine" del suo universo, sul quale nessuna particella si trova, si muove alla velocità  $c$ . A prima vista sembra che questo non soddisfi il Principio Cosmologico, perchè  $O$  è un punto privilegiato. Ma il "confine" dell'universo si comporta, cinematicamente, come un fronte sferico di luce emesso in  $O$  al tempo  $t = 0$  (evento creazione,  $C$ ). Ma ogni particella, essendo stata presente in  $C$ , considererà se stessa al centro del fronte d'onda.



Il moto è radiale da  $O$ , con  $r = u \cdot t$  per ogni particella, per cui  $u = r/t = H \cdot r$  cioè  $H = 1/t$  e vale la legge di Hubble. Non solo: essa vale per ogni "granello" mobile: infatti per la particella 2 sarà  $(\bar{r}_1 = \bar{u}_1 t, \bar{r}_2 = \bar{u}_2 t)$   $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)t \Rightarrow d = v \cdot t$  come se ci riferissimo all'origine  $O$ .

Resta da vedere se possiamo avere una distribuzione isotropa di densità attorno ad ogni punto. Per studiare questa possibilità, definiamo  $\tau$  il tempo proprio trascorso per ogni particella dalla creazione. Allora  $n_0$ , la densità propria di particelle attorno ad una generica particella  $P$ , sarà della forma

$$n_0 = \frac{N}{\tau^3} \quad (N = cost) \quad (*)$$

perchè una piccola sfera attorno a  $P$ , contenente un numero fisso di particelle, si espande con la velocità relativa costante  $\delta u$  della particella più lontana da  $P$ , quindi ha un raggio  $\delta u \cdot \tau$  e volume  $\frac{4}{3}\pi \delta u^3 \tau^3$ . Evidentemente, per avere la massima simmetria, assumiamo che  $N$  sia uguale per tutte le particelle. Se la particella  $P$  è alla distanza  $r$  dall'origine, per  $S$  in  $O$  sarà:

$$\tau = \frac{t}{\gamma(u)} \quad u = \frac{r}{t} \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

e la densità di particelle in  $P$ , relativa all'origine  $O$ , sarà (ricordando che i volumi sono contratti di un fattore  $1/\gamma$  nella direzione del moto)

$$n = \frac{\gamma(u) \cdot N}{\tau^3} = \frac{\gamma^4 N}{t^3} = \frac{Nt}{(t^2 - r^2/c^2)^2} \quad (**)$$

Evidentemente, una densità definita dalla (\*\*) relativa all'origine  $O$  si riduce alla forma (\*) per ogni particella in moto e quindi alla (\*\*) prendendo come origine una qualunque delle particelle. Quindi la (\*\*) è la distribuzione che deve valere attorno ad una qualunque delle particelle.

Vediamo quindi che il modello di Milne è isotropo ed omogeneo, e che  $\tau$  definisce il tempo cosmico (dato, per esempio, da un orologio ideale che misura la densità media dell'universo). Notiamo anche che, dalla (\*\*), la densità  $n$  tende all'infinito avvicinandosi al confine  $r = ct$ . Non ci sono galassie al confine, e per ogni galassia ce ne sono infinite da lei al confine, in tutte le direzioni (ovviamente devo assumere un numero infinito di granelli di polvere prodotti alla creazione).

Anche se il modello di Milne soddisfa il principio cosmologico, non è soddisfacente poichè ammette che ci sia un "fuori" dell'universo delle galassie (oltre il bordo  $r = ct$ ) che può tuttavia interagire con queste (ad esempio mandando segnali luminosi che possono essere visti). L'espansione dei granelli di polvere avviene *nello* spazio, mentre in un modello cosmologico soddisfacente, senza un "fuori", si ha l'espansione *dello* spazio tra le galassie.

Consideriamo ora il modello di Milne sotto un altro punto di vista. Prendiamo il tempo cosmico come coordinata temporale e consideriamo delle coordinate co-moventi (ad esempio  $u, \theta, \phi$ ) rispetto al sistema inerziale  $S$ . La metrica in coordinate polari sferiche sarà, relativamente ad  $S$ ,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

e supponiamo che  $r = t = 0$  coincida con la "creazione". Passiamo ora al tempo cosmico  $\tau$  già definito:  $\tau = t \cdot (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  e definiamo una nuova coordinata co-movente  $\tilde{r}$ , più conveniente di  $u$ , come  $c\tilde{r} = u/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . Se ci aiutiamo con la relazione  $\tilde{r} = \sinh\psi$  (ricordiamo che  $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ ) otteniamo:

$$r = ut = \frac{u\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = c\tau\tilde{r} = c\tau\sinh\psi$$

$$\sinh\psi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad \sinh^2\psi = \frac{u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = \cosh^2\psi - 1$$

$$\cosh^2\psi = \frac{1 - u^2/c^2 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \quad \rightarrow \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

che ci permette di scrivere  $t = \tau\cosh\psi$ . Notiamo anche che  $\cosh^2\psi = 1 + \sinh^2\psi = 1 + \tilde{r}^2$ , per cui, dalla relazione  $\tilde{r} = \sinh\psi$ , per differenziazione, si ha  $d\tilde{r} = \cosh\psi d\psi$ , cioè  $d\psi = d\tilde{r}/\sqrt{1 + \tilde{r}^2}$ .

Riprendiamo la metrica  $ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\Omega^2]$  e passiamo da  $r, t$  a  $\tilde{r}, \tau$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 [\tau\sinh\psi d\psi + \cosh\psi d\tau]^2 - [c\tau\cosh\psi d\psi + c\sinh\psi d\tau]^2 - c^2\tau^2\sinh^2\psi d\Omega^2 \\ &= c^2 d\tau^2 - c^2\tau^2 [d\psi^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2] \\ &= c^2 d\tau^2 + c^2\tau^2 \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1 + \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right] \end{aligned}$$

che corrisponde ad una metrica di RW con  $k = -1$  e con  $a(\tau) = c\tau$  (ricordiamo che il tempo indicato con  $t$  nella metrica R&W è in realtà il tempo proprio che qui abbiamo indicato con  $\tau$ )

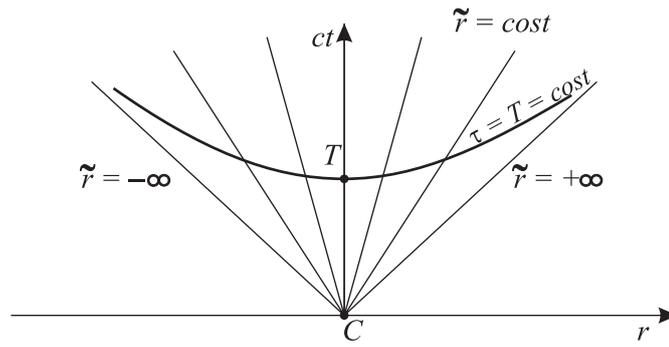
Se sopprimiamo due dimensioni spaziali (ad esempio  $\theta$  e  $\psi$ ) possiamo visualizzare il legame tra le vecchie coordinate  $r, t$  e le nuove  $\tilde{r}, \tau$ . Sarà:

$$\tilde{r} = \sinh\psi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{c} = \text{cost.}$$

e quindi  $r = ut = \frac{u}{c}ct$ : le linee  $\tilde{r} = \text{cost}$  sono rette per l'origine; se  $u \rightarrow \pm c$ ,  $r \sim \pm ct$ ,  $\tilde{r} \rightarrow \pm\infty$ .

Per quanto riguarda le linee  $\tau = \text{cost} = T$ , dalla  $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$  segue

$$t^2 = \frac{T^2}{1 - u^2/c^2} = \frac{T^2}{1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}} = \frac{T^2 c^2 t^2}{c^2 t^2 - r^2}$$



da cui risulta  $c^2t^2 - r^2 = c^2T^2$  che è un'iperbole, con  $r = \pm ct$  come asintoti. Questa rappresenta una sezione a tempo cosmico costante dello spazio-tempo.

Al di là del fatto che il modello di Milne può non essere soddisfacente per molti aspetti, esso mostra come l'introduzione di un principio cosmologico e di un tempo cosmico portano automaticamente ad introdurre uno spazio con curvatura negativa, anche a partire da uno spazio di Minkowski che è per sua natura piatto. Non occorre la Relatività Generale per avere uno spazio curvo! Inoltre, *in questo modello* basato unicamente sulla Relatività Ristretta, è lecito applicare la formula relativistica dell'effetto Doppler per legare redshift e velocità:

$$1 + z = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}}$$

## 5 Modelli cosmologici

### 5.1 Le equazioni di Friedmann

Possiamo, a questo punto, ricavare le equazioni che regolano il comportamento del fattore di scala  $a(t)$  in un universo con la metrica di Robertson-Walker e con un tensore energia-impulso proprio di un fluido perfetto.

Partiamo con lo scrivere il tensor metrico; le coordinate sono  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad {}^4g = -\frac{a^6r^4\sin^2\theta}{1-kr^2} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Passiamo poi a calcolare le *connessioni affini*. Molte di queste sono nulle; quelle diverse da zero sono le

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \frac{\delta_j^i}{c}$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ , mentre i termini del tipo  $\Gamma_{jk}^i$  sono gli stessi già calcolati per definire la metrica di R&W (i fattori  $-1$  presenti in  $g_{ij}$  e  $g^{ij}$  si elidono): basta sostituire, al posto della funzione  $f(r)$  incognita, l'espressione  $\frac{1}{1-kr^2}$ ; ad esempio:  $\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}$ .

Occorre poi passare dalle  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  al tensore di Ricci  $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma$ ; con un po' di pazienza risulta che le componenti diverse da zero sono:

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = -\frac{g_{ij}}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2kc^2}{a^2} \right] \quad (3 \text{ componenti } \neq 0 : R_{11}, R_{22}, R_{33})$$

e lo scalare di Ricci è:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = -\frac{6}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right]$$

Vediamo quanto valgono le componenti del tensore energia impulso  $T_{\alpha\beta} = (p + \rho c^2)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}$

Nel sistema co-movente  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ ; si verifica facilmente che  $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = g_{\alpha 0}u^0 = g_{\alpha 0} = (1, 0, 0, 0)$ . Sarà quindi

$$T_{00} = (p + \rho c^2) - p = \rho c^2 \quad \text{e} \quad T_{ij} = -pg_{ij}$$

Possiamo quindi finalmente scrivere

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

Per la componente 00 abbiamo facilmente

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}a^2c^2\Lambda \quad (F1)$$

Da una qualunque delle tre componenti (11, 22, 33) otteniamo:

$$\ddot{a} + \frac{1}{2a}(\dot{a}^2 + kc^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}pa + \frac{1}{2}\Lambda c^2a$$

e sostituendo in questa la (F1) abbiamo:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a + \frac{1}{3}\Lambda c^2a \quad (F2)$$

La (F1) e la (F2) non sono in realtà indipendenti: se infatti esplicitiamo  $\rho$  dalla (F1) e deriviamo rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\rho} = \frac{3\dot{a}}{4\pi G a^2} \left[ \ddot{a} - \frac{1}{a}(\dot{a}^2 + kc^2) \right]$$

Usando (F2) per  $\ddot{a}$  e riusando (F1) per il termine in parentesi tonde, si ottiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (F3)$$

Ma una relazione di questo tipo (con lo spigolo  $L$  di uno spazio cubico al posto del fattore di scala  $a$ ) l'avevamo già vista derivare dalla conservazione dell'entropia e dal 1° Principio della Termodinamica, parlando del tensore energia-impulso di un gas ideale, ed è quindi legata alla quadridivergenza di  $T^{\alpha\beta}$  uguale a zero:  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  (il termine con la costante cosmologica soddisfa automaticamente questa relazione, essendo  $g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$  e non altera quindi con la sua presenza il risultato). La si può considerare come un'equazione di continuità.

La (F3) si può porre in forme analoghe del tipo  $dQ = dU + dL = 0$ , infatti:

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3) \quad \rightarrow \quad d(\rho c^2 a^3) + p d(a^3) = 0$$

## 5.2 La densità dell'universo

Come si vede esaminando le equazioni di Friedmann, uno dei parametri fondamentali è la densità dell'Universo, per cui cercheremo di valutarne il valore. È utile definire anzitutto il parametro, detto **densità critica**  $\rho_{cr}$ , come:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

che, dipendendo da  $H$ , dipende da  $t$ . Il valore attuale, usando  $H_0 = h \cdot 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = h \cdot 3.241 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = (h/3.086 \cdot 10^{17}) \text{ s}^{-1}$  fornisce una  $\rho_{cr} \simeq 1.879 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$ .

Si usa esprimere la densità  $\rho$  in funzione di  $\rho_{cr}$  usando il **parametro di densità**  $\Omega$ :

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{cr}}$$

Poiché vi sono, come vedremo subito, vari contributi alla densità dell'Universo, avremo un valore particolare di  $\Omega$  per ognuno di questi. Vediamo quindi il contributo alla densità totale delle varie componenti dell'universo.

### 5.2.1 Materia luminosa

La densità  $\rho_{lum}$  della materia luminosa, essenzialmente *stelle*, si può ottenere dalla densità di luminosità  $\rho_L$  dell'universo ( $\rho_L \sim 2 \cdot 10^8 h \text{ L}_\odot \text{ Mpc}^{-3}$ ), e assumendo un rapporto massa-luminosità  $\langle M/L \rangle \sim 1 \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$ . Si ottiene  $\Omega_{lum} \equiv \rho_{lum} / \rho_{cr}$ :

$$\Omega_{lum} h \simeq 0.002 - 0.006$$

### 5.2.2 Galassie

La presenza di aloni massicci attorno alla parte luminosa delle galassie, evidenziata dalle curve di rotazione "piatte", suggerisce che per queste  $\langle M/L \rangle \sim 30 h \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$ <sup>16</sup>. Questo porta ad una stima di  $\Omega_{gal}$  un ordine di grandezza superiore a quella di  $\Omega_{lum}$ :

$$\Omega_{gal} \geq 0.03 - 0.05$$

### 5.2.3 Ammassi di galassie

Dal teorema del viriale applicato a gruppi e ammassi di galassie (Zwicky, 1933), come dalle stime di massa tramite le lenti gravitazionali o l'emissione X del mezzo *intra-ammasso*, si ottiene che  $\langle M/L \rangle \sim 100 - 400 h \text{ M}_\odot / \text{L}_\odot$  cioè 10 volte maggiore che per le singole galassie. Usando questo valore si ha

$$\Omega_{cl} \sim 0.1 - 0.3$$

<sup>16</sup>Ricordiamo che, per una galassia o un ammasso di galassie di massa  $M$ ,  $M \sim V^2 R \sim V^2 \theta D$ , con  $V$  dispersione di velocità,  $D$  distanza,  $\theta$  angolo sotteso ed  $R$  scala del sistema. D'altra parte, la velocità media di recessione del sistema  $\langle v \rangle$  è, per la legge di Hubble,  $\langle v \rangle = H_0 D \propto h D$ , cioè  $D \propto h^{-1}$ . Quindi la massa scala come  $M \propto h^{-1}$ . Il flusso misurato è  $F \simeq L/D^2$  e quindi  $L \propto D^2 \propto h^{-2}$ . Allora  $M/L \propto h^{-1}/h^{-2} \propto h$ . La densità di luminosità scalerà allora come  $L/\text{Volume} \propto L/\text{lunghezza}^3 \propto h^{-2}/h^{-3} \propto h$ .

### 5.2.4 Nucleosintesi primordiale

Il modello dello *Hot Big Bang* prevede la sintesi (detta *nucleosintesi primordiale*) di  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  $D$ ,  ${}^7\text{Li}$  quando l'universo aveva un'età di circa tre minuti. Come vedremo, dai calcoli teorici, confrontati con le osservazioni, si ha che la densità dei *barioni* (intesi, in astrofisica, come protoni, neutroni, nuclei di elio, ecc.) dà un contributo

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.005 - 0.024$$

con una preferenza per i valori alti di questo intervallo (come suggerito dal fondo a microonde).

### 5.2.5 Catastrofe barionica

Il plasma diffuso e caldo, che emette raggi X nello spazio tra le galassie degli ammassi, rappresenta circa il  $6 h^{-3/2}\%$  della massa totale dell'ammasso, mentre le stelle (delle galassie) forniscono un ulteriore 2%. Se, come sembra dalle simulazioni numeriche, il rapporto tra massa in barioni  $M_b$  e massa totale  $M_{tot}$  di un ammasso è rappresentativo del rapporto su scala cosmica tra densità dei barioni e densità totale, o tra i corrispondenti parametri di densità  $\Omega_b$  e  $\Omega_M$ , tenendo anche conto che una parte dei barioni potrebbe essere oscura, si ottiene (assumendo  $\Omega_b h^2 \simeq 0.02$ )

$$\Omega_b/\Omega_M \geq 0.06 h^{-3/2} + 0.02 \rightarrow \Omega_M \leq \frac{0.02 h^{-2}}{0.06 h^{-3/2} + 0.02} \leq 0.33$$

se assumiamo  $h \simeq 0.7$ . Il termine *catastrofe barionica* risale all'inizio degli anni novanta, quando si riteneva che  $\Omega_M \simeq 1$ ; la catastrofe era rappresentata dall'impossibilità di avere un valore di  $\Omega_M$  prossimo all'unità.

### 5.2.6 Radiazione e neutrini (non massicci)

L'universo è anche riempito dalla radiazione cosmica a microonde (*Cosmic Microwave Background, CMB*), scoperta nel 1965; essa ha uno spettro termico di corpo nero con una temperatura odierna  $T_\gamma \simeq 2.73\text{K}$ ; a questo corrisponde una densità di massa-energia odierna

$$\rho_\gamma = \frac{aT_\gamma^4}{c^2} \simeq 4.7 \cdot 10^{-34} \text{g/cm}^3 \quad \Rightarrow \quad \Omega_\gamma \simeq 2.5 \cdot 10^{-5} h^{-2}$$

Vi è anche un contributo da un fondo cosmico di neutrini che, se hanno una massa nulla o trascurabile, si comportano come fotoni, cioè come materia relativistica, fornendo

$$\rho_\nu \sim N_\nu \cdot 10^{-34} \text{g/cm}^3$$

con  $N_\nu$  numero di famiglie di neutrini; se  $N_\nu = 3$  risulta  $\Omega_\nu \simeq 1.7 \cdot 10^{-5}$ . Il contributo totale  $\Omega_R$  sotto forma di materia relativistica, cioè di fotoni e neutrini (non massicci) è quindi

$$\Omega_R h^2 = (\Omega_\gamma + \Omega_\nu) h^2 \simeq 4.2 \cdot 10^{-5}$$

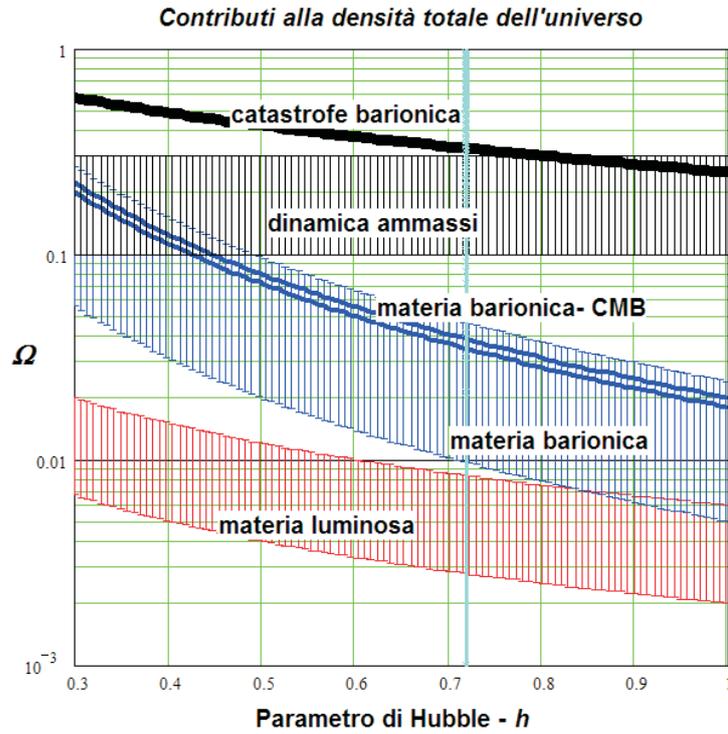
Se i neutrini, come vedremo meglio in seguito, possiedono una massa diversa da zero, il loro contributo può essere maggiore di questo, ma vanno allora annoverati tra la materia non relativistica.

Vediamo che, all'epoca attuale, il contributo dominante alla densità di massa-energia lo fornisce la materia, per cui  $\rho \sim \rho_M$ . Poichè questa materia non possiede moti relativistici, la pressione  $p_0 = p(t_0)$  sarà trascurabile.

### 5.2.7 Materia oscura barionica e non barionica

La figura seguente riassume le condizioni sopra descritte relative alle varie componenti di materia presenti nell'Universo.

Se prendiamo per  $H_0$  un valore attorno ai  $70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$  vediamo che, rispetto alla materia luminosa, la materia barionica totale è maggiore per almeno un ordine di grandezza. Dinamica degli ammassi di galassie e la catastrofe barionica ci portano ancora su di almeno un ordine di grandezza.



Questo ci mostra che nell'Universo esiste materia oscura, cioè non luminosa, e che questa è sia di tipo barionico che, ancor di più, di tipo non-barionico.

### 5.2.8 La costante cosmologica

In questi ultimi anni, da un lato l'osservazione di *SNIa* fino a  $z \sim 1$ , dall'altro la misura da satellite (*COBE*, *WMAP*) e da pallone del *CMB*, hanno suggerito che la geometria della parte spaziale ( $t = \text{cost.}$ ) della metrica è consistente con una metrica Euclidea ( $k = 0$ ). Questo grazie al contributo di una costante cosmologica  $\Lambda$  non nulla.

Risulta utile inglobare la costante cosmologica nel tensore energia-impulso, definendo

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\alpha\beta} = (\tilde{p} + \tilde{\rho}c^2)u_\alpha u_\beta - \tilde{p}g_{\alpha\beta}$$

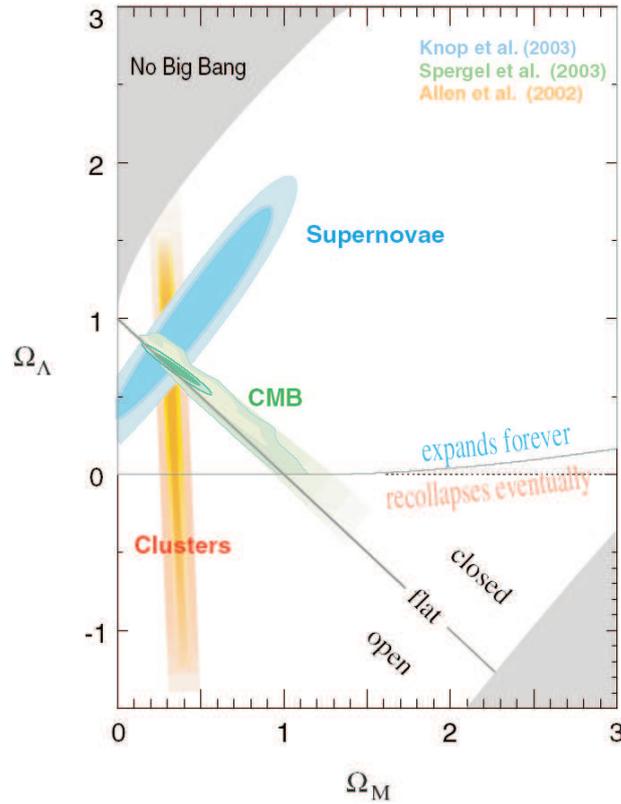
dove pressione efficace  $\tilde{p}$  e densità efficace  $\tilde{\rho}$  sono espresse da

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda$$

Vediamo quindi che a  $\Lambda$  si può associare una densità  $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$  e quindi un parametro di densità

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \cdot \frac{8\pi G}{3H^2} = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

La figura seguente mostra i vincoli osservativi sui valori di  $\Omega_\Lambda$  ed  $\Omega_M$  derivati dalle *SNIa* lontane, dal *CMB* e dagli ammassi di galassie. Il significato delle varie curve sarà chiarito più avanti (Adattato da: *Knop et al.*, 2003, *ApJ* 598, 102).



Come si vede, le regioni di confidenza relative alle *SNIa* ed al *CMB* si incrociano quasi ad angolo retto, permettendo di definire abbastanza bene  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  ed  $\Omega_M \simeq 0.3$ .

### 5.3 Moti peculiari

Prima di proseguire nello studio dei modelli, consideriamo, usando le  $\Gamma$  calcolate, il problema dei cosiddetti *moti peculiari*. Definiamo come *velocità peculiare*  $u^\alpha$  (4-velocità) la velocità di una particella rispetto al sistema co-movente del punto in cui essa si trova. L'equazione del moto secondo la geodetica sarà, come al solito:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 \quad (\text{ricordo che } u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{ds})$$

Per la componente  $\alpha = 0$  avremo

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^0 u^\beta u^\gamma = 0$$

ma per la metrica di RW (vedi sopra) l'unica componente non nulla di  $\Gamma_{\beta\gamma}^0$  è  $\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Ricordiamo inoltre che  $1 = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = (u^0)^2 + g_{ij} u^i u^j = (u^0)^2 - |\bar{u}|^2$ , essendo  $\bar{u}$  la parte spaziale del quadrivettore. Quindi:

$$\frac{du^0}{ds} = +\frac{\dot{a}}{a} \frac{g_{ij}}{c} u^i u^j = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{|\bar{u}|^2}{c}$$

Differenziando  $1 = (u^0)^2 - |\bar{u}|^2$  ottengo  $u^0 du^0 = |\bar{u}| d|\bar{u}|$  ed essendo  $u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds}$  si ottiene:

$$\frac{|\bar{u}|}{u^0} \frac{d|\bar{u}|}{ds} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{|\bar{u}|^2}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{d|\bar{u}|}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} |\bar{u}| \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{|\bar{u}|}}{|\bar{u}|} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

Questo significa che  $|\bar{u}| \propto 1/a$ , ed essendo  $p^\alpha = m_0 u^\alpha$ , anche  $|\bar{p}| \propto 1/a$ .

Vediamo di nuovo che il sistema co-movente è quello più naturale. Infatti in un universo in espansione la velocità peculiare (3-velocità) cala al crescere dell'espansione: le particelle tendono a portarsi in quiete rispetto agli osservatori co-moventi. Posso cercare di vedere la cosa in modo intuitivo pensando che se una particella si allontana da un punto con una certa velocità essa passerà per osservatori in moto rispetto al primo, per i quali la velocità peculiare della particella risulterà minore

$$\begin{aligned} D &= v_p \cdot \Delta t & v'_0 &= H_0 D = H_0 v_p \Delta t & v'_p &= v_p - v'_0 \\ \Rightarrow \Delta v_p &= v'_p - v_p = -v'_0 = -H_0 v_p \Delta t & \Rightarrow & \frac{1}{v_p} \frac{dv_p}{dt} = -H_0 = -\frac{\dot{a}}{a} \end{aligned}$$

Osserviamo che, poichè la temperatura di un gas ideale è proporzionale al modulo quadrato della velocità media delle particelle:  $T_{gas} \propto |\bar{u}|^2 \propto 1/a^2$  ( $T_{rad} \propto 1/a$ ) consistente con l'espansione adiabatica di un gas perfetto:  $pV^\gamma = cost \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cost \quad \gamma = 5/3, \quad V \propto a^3 \Rightarrow Ta^2 = cost$ .

## 5.4 L'equazione di stato

Nelle equazioni di Friedmann, oltre alla densità ed alla costante cosmologica, compare anche la pressione  $p$ . Esprimeremo la pressione per mezzo di un'equazione di stato del tipo  $p = w\rho c^2$  con  $w = cost$ ,  $0 \leq w \leq 1$ .

Come abbiamo già visto, il caso  $w = 0$  è il caso "polvere" in cui, anche se  $p = w(T)\rho c^2$  è diverso da zero, essendo il gas non-relativistico, risulta  $p \ll \rho c^2$  e quindi  $w \simeq 0$ . Per un fluido non degenere ultrarelativistico in equilibrio termico l'equazione di stato è del tipo  $p = \frac{1}{3}\rho c^2$  con  $w = \frac{1}{3}$ , valida anche per un gas di fotoni.

La grandezza  $w$  è anche legata alla velocità del suono adiabatica (a entropia costante):

$$c_s = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} \Rightarrow c_s = c\sqrt{w}$$

Se  $w = 0$ , allora  $c_s = 0$ ; se  $w = 1/3$  allora  $c_s = c/\sqrt{3}$ ; se fosse  $w > 1$  avremmo  $c_s > c$ , mentre se fosse invece  $w < 0$ ,  $c_s$  sarebbe immaginario.

In queste condizioni abbiamo già visto che  $\rho_w V^{1+w} = cost$ , ma  $V \propto a^3 \rightarrow \rho_w a^{3(1+w)} = cost = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)}$  da cui (il suffisso 0 implica  $t = t_0$ ):

$$\rho_w = \rho_{0w} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}$$

- $w = 0 \rightarrow \rho_M a^3 = cost = \rho_{0M} a_0^3; \quad \frac{a_0}{a} = 1 + z \Rightarrow \rho_M = \rho_{0M} (1 + z)^3$
- $w = 1/3 \rightarrow \rho_R a^4 = \rho_{0R} a_0^4 \Rightarrow \rho_R = \rho_{0R} (1 + z)^4$

Per quanto riguarda il comportamento della costante cosmologica, riprendiamo la pressione e la densità efficaci definite poco sopra. Se immaginiamo che pressione e densità di materia e radiazione siano trascurabili, otteniamo

$$\tilde{p} \equiv p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} \equiv \rho_\Lambda = +\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

che ci fornisce

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad \Longrightarrow \quad w_\Lambda = -1$$

Vediamo quindi che la costante cosmologica è caratterizzata da un'equazione di stato con  $w = w_\Lambda = -1$ . Un caso analogo si ha, come vedremo, per la fase di *inflazione* che si verifica nell'Universo primordiale. Se  $w = -1$  l'equazione che esprime  $\rho_w$  (che in questo caso sarà  $\rho_\Lambda$ ) mi mostra che  $\rho_\Lambda = cost$ : la densità di massa-energia non muta con l'espansione.

Alle equazioni di cui sopra si può arrivare anche partendo dalla (F3) nella forma già scritta sopra

$$d(\rho c^2 a^3) + p d(a^3) = 0$$

Infatti, posto  $p = w\rho c^2$ , si ha

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 a^3) + w\rho c^2 d(a^3) &= 0 \\ a^3 d(\rho c^2) + \rho c^2 (1+w) \cdot 3a^2 da &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1+w) \frac{da}{a} \end{aligned}$$

che, integrato con  $w = cost$ , fornisce appunto

$$\int_\rho^{\rho_0} d \ln \rho = -3(1+w) \int_a^{a_0} d \ln a$$

e quindi, nuovamente,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}$$

Nel caso in cui  $w$  non sia costante (come accade in alcune teorie che, al posto della costante cosmologica, considerano un campo scalare variabile nel tempo per spiegare l'origine della cosiddetta *dark energy*) nell'integrale qui sopra il fattore  $1 + w$  non si può portare fuori dall'integrale e la soluzione formale si scrive

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_a^{a_0} [1 + w(a)] d \ln a \right\}$$

Se invece del fattore di scala  $a$  si vuole usare il redshift  $z$  ricordiamo che  $a = a_0/(1+z)$  da cui  $da = -a_0/(1+z)^2 dz$  per cui

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_z^0 [1 + w(z)] \frac{-a_0}{(1+z)^2} \frac{1+z}{a_0} dz \right\}$$

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left\{ 3 \int_0^z \frac{[1 + w(z)]}{1+z} dz \right\}$$

## 5.5 Relazioni tra i parametri cosmologici

Le equazioni (F1) ed (F2) permettono di ricavare utili relazioni tra i parametri cosmologici. Se partiamo dalla (F1) e la dividiamo per  $a^2$  abbiamo

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3} a^2 c^2 \Lambda \quad / \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \frac{H^2}{H^2} + \frac{1}{3} c^2 \Lambda \frac{H^2}{H^2}$$

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = H^2 \cdot \frac{\rho}{\rho_{cr}} + H^2 \cdot \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}$$

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2 \left[ \frac{\rho}{\rho_{cr}} + \frac{c^2 \Lambda}{3H^2} - 1 \right]$$

Ricordiamo che  $\Lambda c^2/3H^2 = \Omega_\Lambda$ ,  $\rho = \rho_M + \rho_R$  e quindi

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2 [\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda - 1]$$

Se chiamo  $\Omega \equiv \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda$ , avremo

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2 [\Omega - 1]$$

Questa relazione vale ad ogni istante; in particolare al tempo attuale  $t = t_0$  avremo

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = H_0^2 [\Omega_0 - 1]$$

Da questa relazione vedo subito che, a seconda del valore attuale del parametro di densità totale  $\Omega_0$  avremo

- $\Omega_0 > 1 \Rightarrow k = +1$
- $\Omega_0 = 1 \Rightarrow k = 0$
- $\Omega_0 < 1 \Rightarrow k = -1$

Quindi il valore di  $\Omega_0$  definisce la curvatura della sezione spaziale a tempo cosmico costante! La relazione scritta sopra permette anche di esprimere (per  $k \neq 0$ ) il valore attuale del fattore di scala:

$$a_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{k}{\Omega_0 - 1}}$$

Una seconda relazione deriva dalla (F2) con *pressione trascurabile* ( $p = 0$ ), cioè con trascurabile contributo di materia relativistica ( $\Omega_R \simeq 0$ ):

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho a + \frac{1}{3}\Lambda c^2 a & / \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 & / \cdot \frac{H^2}{H^2} \\ \frac{1}{3}\Lambda c^2 &= H^2 \frac{2 \cdot 4\pi G}{3H^2} \cdot \frac{1}{2}\rho + \frac{\ddot{a}}{a} \cdot \frac{H^2 a^2}{\dot{a}^2}\end{aligned}$$

Ricordando che il parametro di decelerazione  $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$  e  $\rho = \rho_M$  si può scrivere

$$\frac{1}{3}\Lambda c^2 = H^2 \left[ \frac{\Omega_M}{2} - q \right]$$

che vale a qualunque epoca. Questa relazione, all'epoca attuale e se  $\Lambda = \Omega_\Lambda = 0$ , fornisce un legame tra  $q_0$  ed  $\Omega_0$ :  $q_0 = \Omega_0/2$ . Altrimenti otteniamo più in generale

$$\begin{aligned}\Omega_\Lambda = \frac{\Omega_M}{2} - q &\quad \Rightarrow \quad q = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_\Lambda}{2} - \frac{\Omega_\Lambda}{2} \\ q &= \frac{\Omega}{2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda\end{aligned}$$

che *vale*, come già detto sopra, *quando la pressione è trascurabile*, cioè quando è trascurabile  $\Omega_R$ . Vedremo poi una relazione che non risente di questa limitazione.

## 5.6 Il parametro di Hubble

Consideriamo nuovamente la (F1) e dividiamola per  $a_0^2$ , ricordando anche che  $kc^2/a_0^2 = H_0^2 [\Omega_0 - 1]$ ,  $\Omega_0 = \sum_w \Omega_{0w}$ ; inglobiamo anche la costante cosmologica nella densità  $\rho$  tramite la  $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ :

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 + kc^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 & / \cdot \frac{1}{a_0^2} \\ \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G}{3H_0^2} H_0^2 \rho \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 &= -\frac{kc^2}{a_0^2}\end{aligned}$$

dove  $\rho \equiv \sum_w \rho_w = \sum_w \rho_{0w} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} = \rho_{0cr} \sum_w \Omega_{0w} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}$ . Allora

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - H_0^2 \sum_w \Omega_{0w} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 &= -H_0^2 \left[ \sum_w \Omega_{0w} - 1 \right] \\ \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} &= H_0^2 \left[ \sum_w \Omega_{0w} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + \left( 1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]\end{aligned}$$

che si può scrivere, ricordando che  $H(t) \equiv \dot{a}/a$ , e moltiplicando per  $(a_0/a)^2$ :

$$H^2(t) = H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \left[ \sum_w \Omega_{0w} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + \left( 1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]$$

Ricordando che  $a_0/a = 1 + z$  possiamo ricavare  $H(z)$

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[ \sum_w \Omega_{0w} (1+z)^{1+3w} + \left( 1 - \sum_w \Omega_{0w} \right) \right]$$

che, esplicitando le varie componenti, fornisce

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[ \Omega_R (1+z)^2 + \Omega_M (1+z) + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2} + 1 - (\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda) \right]$$

## 5.7 Le tre epoche dell'Universo

Nell'equazione appena scritta, che descrive l'evoluzione di  $H(z)$ , e quindi anche del fattore di scala, vediamo che ci sono tre contributi, legati ad  $\Omega_R$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , che variano in modo diverso con il redshift.

A  $z$  elevato il termine in  $\Omega_\Lambda$  conta poco, come pure il termine  $1 - (\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda)$  che è dell'ordine dell'unità, mentre gli altri due crescono; ma quello in  $\Omega_R$  cresce più rapidamente e, anche se oggi  $\Omega_R \ll \Omega_M$ , la materia relativistica domina prima dell'epoca cosiddetta dell' *equivalenza*, corrispondente a

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_M}{\Omega_R} \simeq 23800 \Omega_M h^2$$

che, per  $\Omega_M \simeq 0.3$  e  $h \simeq 0.7$ , fornisce  $z_{eq} \simeq 3700$ . Quindi prima dell'equivalenza la dinamica dell'Universo è dominata dalla materia relativistica, poi dalla materia non relativistica, fino a quando non entra in gioco la costante cosmologica, cioè quando

$$\Omega_M(1 + z_\Lambda) = \Omega_\Lambda(1 + z_\Lambda)^{-2}$$

cioè ad un redshift  $z_\Lambda$  tale che

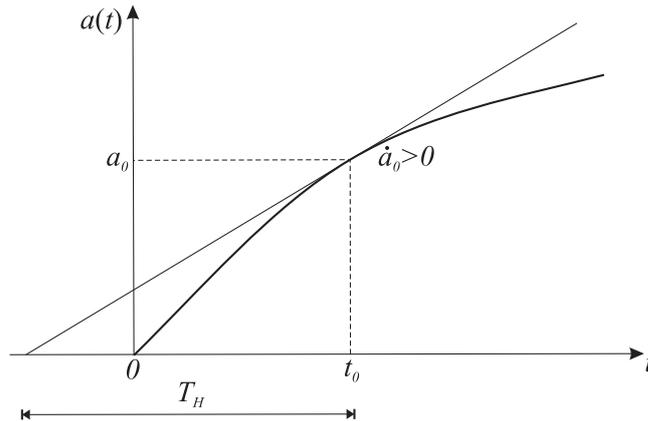
$$1 + z_\Lambda = \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{\frac{1}{3}}$$

che, se  $\Omega_\Lambda = 0.7$  ed  $\Omega_M = 0.3$  corrisponde a  $z_\Lambda = 0.33$ .

Abbiamo quindi le *tre fasi* di evoluzione dell'Universo: una prima fase dominata dinamicamente dalla materia relativistica (radiazione) (*RD*), una seconda dominata dalla materia (*MD*), una terza, quella attuale, dominata dal "vuoto" (*VD*), intendendo dominata dalla costante cosmologica (o da una forma di dark energy).

## 5.8 Il tempo di Hubble

Supponendo che ad un certo istante (ad esempio  $t = t_0$ ) sia  $\dot{a} > 0$  (espansione), dalla (F2) si vede che, se  $(\rho + 3p/c^2) > 0$  (cioè se  $(1 + 3w)\rho > 0$ ,  $w > -1/3$ ), allora  $\ddot{a}$  è sempre  $< 0$  e il grafico di  $a(t)$  ha la concavità rivolta verso il basso, quindi  $a(t)$  deve essere nulla ad un certo istante, che possiamo prendere come  $t = 0$ . A  $t = 0$   $\rho$  ed  $H$  divergono, e abbiamo una singolarità, il cosiddetto *Big Bang*.



Vediamo anche che  $a_0/T_H = \dot{a}_0 \Rightarrow 1/T_H = H_0$  e  $T_H > t_0$  cioè  $H_0 t_0 \leq 1$ : l'inverso di  $H_0$  dà un limite superiore all'età dell'Universo ( $T_H$  è il cosiddetto *tempo di Hubble*  $= 1/H_0$ ).

Il Big Bang è inevitabile se valgono le ipotesi che abbiamo introdotto: il principio cosmologico, la legge di gravitazione di Einstein,  $p = w\rho c^2$  con  $w > -1/3$ . Potrebbe entrare in gioco qualcosa che agisce come una costante cosmologica, e/o fattori che coinvolgono la meccanica quantistica (quantum gravity). Notiamo anche che, se in qualche istante risulta  $\dot{a} < 0$ , la concavità di  $a(t)$  implica che nel futuro ci sia un collasso inarrestabile: il *Big Crunch*. Notiamo che l'effetto di espansione *non* è dovuto in alcun modo alla pressione, che agisce sempre nel senso di decelerare l'espansione, se  $w > -1/3$ .

## 5.9 L'evoluzione del parametro di densità $\Omega$

Se dividiamo membro a membro la relazione, relativa ad un istante generico,

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1)$$

con la relazione analoga che vale a  $t = t_0$  si ha

$$\frac{a_0^2}{a^2} = \frac{H^2}{H_0^2} \frac{\Omega - 1}{\Omega_0 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{H_0^2 a_0^2}{H^2 a^2}$$

e dall'evoluzione di  $H$  si ha:

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{1 - \Omega_0 + \sum_w \Omega_{0w} (1+z)^{1+3w}}$$

Esplicitando le 3 componenti  $R$ ,  $M$ ,  $\Lambda$ :

$$\Omega - 1 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_R(1+z)^2 + \Omega_M(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_0}$$

che mi fornisce l'evoluzione di  $\Omega(z)$ . Vedo anzitutto che, essendo il denominatore della parte destra della relazione sempre positivo (si veda la relazione che esprime  $H(z)$ ), il segno di  $\Omega(z) - 1$  non cambia durante l'evoluzione. Quindi se  $\Omega_0 > 1$ ,  $\Omega(z)$  rimane sempre maggiore di uno attraverso la storia cosmica. Analogamente se  $\Omega_0 < 1$ ; se  $\Omega_0 = 1$  così rimane in tutti i tempi.

Andando indietro nel tempo, per  $z \rightarrow \infty$ , vedo che  $\Omega - 1 \rightarrow 0$ , cioè  $\Omega \rightarrow 1$ : risalendo nel passato l'Universo somiglia sempre più a quello con  $k = 0$  e gli effetti della curvatura sono trascurabili nelle prime fasi dell'evoluzione cosmica.

Il fatto che  $\Omega$  tenda a divergere da 1 al passare del tempo, mentre in realtà oggi sembra essere molto prossimo ad 1, richiede che nel lontano passato  $\Omega$  sia stato in realtà estremamente prossimo ad 1, con notevole "fine tuning" tra densità e tasso di espansione. Questo è il cosiddetto *problema della piattezza*, che viene risolto dal paradigma dell'inflazione. L'esistenza di una fase di inflazione, dominata cioè dalla densità di energia di un falso vuoto che mima gli effetti di una costante cosmologica, fornisce il meccanismo attraverso il quale  $\Omega$  viene talmente forzato verso l'unità, da rimanere fino ad oggi non molto diverso da 1.

## 5.10 Evoluzione del parametro di decelerazione $q(z)$

Vedi pagine scannerizzate.

## 5.11 Modelli cosmologici

Esaminando le equazioni di Friedmann (F1) e (F2)

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{1}{3} a^2 c^2 \Lambda \quad (F1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) a + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a \quad (F2)$$

possiamo schematizzare qualitativamente l'evoluzione dei vari modelli con  $\Lambda \neq 0$  (o, in generale, con  $\Lambda$  qualsiasi).

Se  $\Lambda < 0$ , dalla (F1) vedo che ( $\rho_M \propto a^{-3}$ ,  $\rho_R \propto a^{-4}$ ) il termine in  $\rho a^2$  (positivo) decresce nel tempo, mentre quello in  $\Lambda a^2$  (negativo) cresce (in valore assoluto),  $kc^2$  è una costante e perciò, ad un certo punto, al crescere del fattore di scala  $a$ , risulterà  $\dot{a}^2 = 0$ ; se  $a$  crescesse ancora,  $\dot{a}^2$  diverrebbe immaginario. Esiste quindi un valore massimo di  $a$  e, poiché  $\ddot{a}$  è sempre negativo, e la curva  $a(t)$  ha la concavità rivolta verso il basso, si ha un ricollasso. Questo per qualunque valore di  $k$  se  $\Lambda < 0$ .

Se  $\Lambda > 0$  occorre separare i due casi  $k = -1$  o  $k = 0$  dal caso  $k = +1$ . Se  $k = -1$  o  $k = 0$ ,  $\dot{a}^2 > 0$  sempre e anche  $\ddot{a}$  diventa prima o poi positivo: l'universo si espande sempre, inizialmente tende a decelerare ed alla fine accelera.

$$dn = \frac{cdt}{a(t)} \rightarrow \frac{cdte}{a(t_0)} = \frac{cdt_0}{a(t_0)} \rightarrow \text{lungo moto fotone} \frac{dt}{a} = \text{cost}$$

radiazione da una sorgente che arriva ai tempi  $t_0$  e  $t_0 + \Delta t_0$ , lasciando la sorgente ai tempi  $t$  e  $t + \Delta t$

I redshift osservati in  $r=0$  saranno:

$$1+z = \frac{a_0}{a(t)} \rightarrow z = \frac{a(t)}{a_0} - 1$$

$$z + \Delta z = \frac{a(t_0 + \Delta t_0)}{a(t + \Delta t)} - 1$$

CODEX  
EE-ELT

[ESPRESSO e ILL]

$$\Delta z = \frac{a(t_0) + \dot{a}(t_0) \cdot \Delta t_0}{a(t) + \dot{a}(t) \cdot \Delta t} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = z$$

~~$$\frac{a(t_0) + \dot{a}(t_0) \cdot \Delta t_0}{a(t) + \dot{a}(t) \cdot \Delta t} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = z$$~~

$$= \frac{a(t_0) \left[ 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot \Delta t_0 \right]}{a(t) \left[ 1 + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \Delta t \right]} - \frac{a(t_0)}{a(t)} = z$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t)} \left[ \frac{1 + H_0 \cdot \Delta t_0}{1 + H(t) \cdot \Delta t} - 1 \right] =$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t)} \frac{1 + H_0 \Delta t_0 - 1 - H(t) \Delta t}{1 + H(t) \cdot \Delta t} =$$

$$= (1+z) \frac{H_0 \Delta t_0 - H(t) \cdot \Delta t \frac{a(t)}{a(t_0)}}{1 + H(t) \cdot \frac{a(t)}{a(t_0)} \cdot \Delta t_0} \cdot \frac{1}{\Delta t_0}$$

$$\frac{\Delta t}{a(t)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}$$

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t_0} = (1+z) \frac{H_0 - \frac{H(t)}{1+z}}{1 + \frac{H(t)}{1+z} \cdot \Delta t_0}$$

e  $\Delta t_0 \rightarrow 0$

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)_{r=0} = (1+z) H_0 - H(z)$$

[MeVetkie, 1962]

$$q \equiv - \frac{\ddot{a}}{a^3}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2$$

(2)

$$\Rightarrow q \equiv - \frac{\ddot{a}}{a} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = - \frac{\ddot{a}}{a H^2}$$

dalle (F1)

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[ \sum_i \Omega_i \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3w_i} + (1 - \sum_i \Omega_i) \right] \left( \frac{da}{dt} \right)$$

$$2 \dot{a} \ddot{a} = H_0^2 a_0^2 \left[ \sum_i \Omega_i (1+3w_i) \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \cdot \frac{-\dot{a}}{a^2} \right]$$

$$\ddot{a} = - \frac{H_0^2 a_0^3}{2 a^2} \left[ \sum_i \Omega_i (1+3w_i) \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \right]$$

$$\sum_i \Omega_i \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} + 3 \sum_i w_i \Omega_i \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i}$$

$$q = - \frac{\ddot{a}}{a H^2} = \frac{H_0^2 a_0^3}{2 a^3 H^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3w_i} \right]$$

$$q_0: a \equiv a_0 \rightarrow q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i$$

MA: l'epoca  $t_0$  di riferimento, che sopra ha assunto essere l'epoca attuale, può essere in realtà qualunque fase dell'evoluzione dell'universo, purché gli  $\Omega_i$  siano non gli attuali, ma quelli di quell'epoca. Allora la relazione

$$|q(z) = \frac{1}{2} \Omega_{tot}(z) + \frac{3}{2} \sum_i w_i \Omega_i(z)|$$

continua a valere.

Se, ad esempio, considero un universo piatto (6)  
 $(k=0, \Omega_{tot} \equiv 1)$  formato solo da materia e  $\Lambda$   
 $\Omega_m(z) + \Omega_\Lambda(z) \equiv 1$ ,  $\Omega_k \equiv 0$  dunque:

$$q(z) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \left[ -1 \cdot \Omega_\Lambda(z) + 0 \cdot \Omega_m(z) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Omega_\Lambda(z)$$

come calcolo  $\Omega_\Lambda(z)$ ?

Ricordiamo che, in questo caso, ( $\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda \equiv 1$  sempre)

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[ \Omega_m(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} \right]$$

$$= H_0^2 (1+z)^3 \left[ \Omega_m + \frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^3} \right]$$

$$\Omega_\Lambda(z) = 1 - \Omega_m(z)$$

$$\Omega_m(z) = \frac{\rho_m(z)}{\rho_{tot}(z)} = \frac{\rho_{0m}(1+z)^3}{\rho_{0cr} \cdot H^2/H_0^2}$$

$$= \Omega_m (1+z)^3$$

$$\frac{\Omega_m (1+z)^3}{(1+z)^3 \left[ \Omega_m + \frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^3} \right]}$$

$$\Omega_\Lambda(z) = 1 - \frac{\Omega_m}{\Omega_m + \Omega_\Lambda / (1+z)^3} = 1 - \frac{\Omega_m (1+z)^3}{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda} =$$

$$= \frac{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda - \Omega_m (1+z)^3}{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda} = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda + (1-\Omega_\Lambda)(1+z)^3}$$

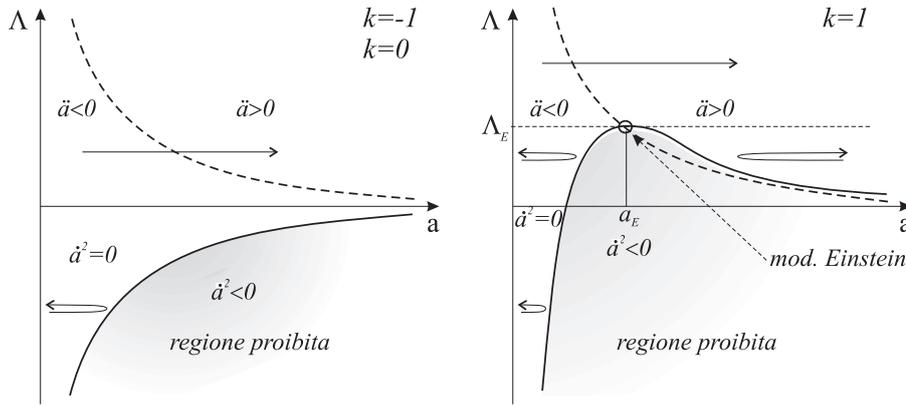
$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \cdot \frac{H^2}{H_0^2}$$

$$q(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda + (1-\Omega_\Lambda)(1+z)^3} \right]$$

$$q(\tilde{z}) = 0$$

$$\tilde{z} = \left( \frac{2\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} - 1$$

$$\Omega_\Lambda = 0.7 \rightarrow \tilde{z} = 0.67$$



Se  $k = +1$ , con  $\Lambda = 0$ , per un certo valore di  $a$  risulta  $\dot{a}^2 = 0$ , e si ha ricollasso; lo stesso accade se  $\Lambda$  è positivo ma non molto grande. La regione proibita ha l'andamento riprodotto in figura. Come si vede è possibile avere contemporaneamente sia  $\dot{a} = 0$  che  $\ddot{a} = 0$ , che corrispondono al modello statico di **Einstein**. Per valori di  $\Lambda > \Lambda_E$ , cioè del massimo della regione proibita, nuovamente abbiamo decelerazione iniziale seguita da accelerazione ed espansione fino all'infinito. Tra i casi con  $\Lambda > \Lambda_E$  abbiamo il cosiddetto modello di **Lemaitre**, in cui, se  $\Lambda = \Lambda_E(1 + \epsilon)$  con  $\epsilon \ll 1$  possiamo avere un'epoca quasi stazionaria arbitrariamente lunga. Tale modello fu invocato nel 1967 per spiegare un eccesso di quasar a  $z \sim 2$  (l'evoluzione dei quasar oggi viene interpretata in modo diverso). In questo modello viene anche a cadere il limite  $T_H \equiv 1/H > t_0$ . Se  $0 < \Lambda < \Lambda_E$ , a seconda della condizione iniziale, si può avere una fase di contrazione, seguita da una espansione con  $a(t)$  sempre  $> 0$  (*bouncing universe*, universo "rimbalzante"), oppure ancora un modello che ricollassa, come quelli con  $\Lambda < 0$ .

Queste considerazioni si possono esprimere sinteticamente con i due grafici qualitativi sopra riportati, che hanno in ascissa il fattore di scala e in ordinata  $\Lambda$ . Il grafico seguente mostra invece, in modo sintetico, tutta la casistica discussa.

	$\Lambda > 0$	$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$	
$k = -1$				
$k = 0$				
$k = 1$				
	$\Lambda > \Lambda_c$	$\Lambda = \Lambda_c$	$0 < \Lambda < \Lambda_c$	

Inizieremo ora a vedere in dettaglio alcuni modelli che sono interessanti per questioni storiche o perchè possono essere utili approssimazioni in alcune fasi evolutive.

Se includiamo la costante cosmologica entro il tensore energia-impulso, come già fatto più sopra, e la pressione efficace  $\tilde{p}$  e densità efficace  $\tilde{\rho}$  sono espresse da

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = \rho + \rho_\Lambda$$

le (F1) e (F2) diventano;

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} a^2 \quad (F1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \tilde{\rho} + \frac{3\tilde{p}}{c^2} \right) a \quad (F2)$$

Queste ammettono una soluzione statica con  $\ddot{a} = 0$  e  $\dot{a} = 0$  se:

$$\tilde{\rho} = -\frac{3\tilde{p}}{c^2} = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$$

Per un universo come quello attuale con  $p \simeq 0$  abbiamo:

$$\begin{aligned} -\frac{3\tilde{p}}{c^2} &= -\frac{3}{c^2} \left( -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) = \frac{3kc^2}{8\pi G a^2} &\Rightarrow \quad \Lambda &= \frac{k}{a^2} \\ \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} &= \frac{3kc^2}{8\pi G a^2} &\Rightarrow \quad \rho &= \frac{kc^2}{4\pi G a^2} \end{aligned}$$

Poichè  $\rho > 0$  ne segue che  $k = +1$  e  $\Lambda > 0$ . Il valore di  $\Lambda$  che rende l'universo statico è

$$\Lambda_E = \frac{k}{a^2} = \frac{4\pi G \rho}{c^2} \quad \text{e} \quad a = a_E = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho}}$$

Questo è il già menzionato modello di **Einstein**, che però è instabile: vi sono due modelli, detti di **Eddington-Lemaitre** con  $\Lambda = \Lambda_E$  e  $k = +1$ , che hanno come asintoto il modello di Einstein. Uno parte da  $a = 0$  e tende asintoticamente ad  $a_E$ , con  $a < a_E$ . L'altro invece parte da  $a = a_E$  e, dopo un tempo infinitamente lungo, si discosta con lentezza da  $a_E$  e diverge. Questo perchè una leggera espansione è sufficiente a far decrescere l'attrazione gravitazionale e accrescere la repulsione dovuta a  $\Lambda > 0$ . All'opposto, una piccola contrazione da  $a = a_E$  accresce l'autogravitazione e porta al collasso.

Un modello particolare è quello di **De Sitter**: esso è vuoto ( $p = 0$  e  $\rho = 0$ ) e piatto ( $k = 0$ ). Abbiamo in questo caso: che mi dà esattamente

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} c^2 a^2 \quad \Rightarrow \quad a(t) = A e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct} \quad \text{con} \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = \text{cost}$$

Vedremo che in questo modello, in cui l'equazione di stato è del tipo  $\tilde{p} = -\tilde{\rho}c^2$  ci porterà all'universo inflazionario, una fase iniziale dell'evoluzione cosmica. Osserviamo anche che il modello di De Sitter rappresenta il comportamento asintotico dei modelli con  $\Lambda > 0$ , come si può vedere esaminando la (F1) e facendo crescere  $a$ . Perciò questo modello rappresenta anche il comportamento asintotico del modello cosmologico che attualmente ha maggior credito.

## 5.12 Il modello di Einstein-de Sitter

In questo modello (**EdS**) si trascura la costante cosmologica e si assume che la dinamica sia dominata da una componente sola (radiazione o materia) e sia  $\Omega_{0w} \equiv 1$  (questo, come visto sopra, implica che  $\Omega_w(z) \equiv 1$  sempre); cioè  $k = 0$ . Per la precisione, il modello con  $k = 0$  e  $w = 0$  è detto di Einstein-de Sitter, ma chiamiamo in generale con questo nome anche i modelli con  $w \neq 0$ . Sia allora  $\Lambda = 0$ . Avremo, dalla (F1), nella fase dominata dalla componente  $w$ :

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} = H_0^2 (1+z)^{1+3w}$$

cioè

$$a^{\frac{1+3w}{2}} da = C dt \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{3(1+w)}{2}} = C' \cdot t$$

e riferendosi ad  $a_0$  e  $t_0$ :

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

cioè l'universo si espande per sempre. Possiamo anche scrivere l'ultima formula in funzione di  $z$ , come:

$$t = t_0 (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}}$$

Abbiamo anche:

$$\begin{aligned}
 H &\equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)t} \quad \rightarrow \quad Ht = cost \quad \rightarrow \quad H = \frac{H_0 t_0}{t} = H_0(1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}} \\
 q &\equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{2}{3(1+w)} \frac{\dot{a}t - a}{t^2} \frac{a}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = cost = q_0 \\
 t_{0cr,w} &\equiv t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \quad \text{dalla prima} \\
 \rho_w a^{3(1+w)} &= cost \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_w}{\rho_{0w}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \quad \rightarrow \quad \rho_w(t) = \frac{\rho_{0w} t_0^2}{t^2}
 \end{aligned}$$

ma dire che  $\Omega_{0w} = \Omega_w = 1$  significa che  $\rho = \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ , cioè:

$$\rho_w(t) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left(\frac{2}{3(1+w)H_0}\right)^2 \frac{1}{t^2} = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2 t^2}$$

Risulta utile scrivere esplicitamente queste relazioni nei casi:

- $w = 0$  “polvere”, universo dominato dalla materia (=fluido non relativistico)

$$\begin{aligned}
 a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} & t &= t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}} & H &= \frac{2}{3t} = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}} \\
 q_0 &= \frac{1}{2} & t_{0cr,m} &= t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} & \rho_m(t) &= \frac{1}{6\pi G t^2}
 \end{aligned}$$

- $w = 1/3$  materia relativistica, universo dominato da radiazione

$$\begin{aligned}
 a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} & t &= t_0(1+z)^{-2} & H &= \frac{1}{2t} = H_0(1+z)^2 \\
 q_0 &= 1 & t_{0cr,r} &= t_0 = \frac{1}{2H_0} & \rho_r &= \frac{3}{32\pi G t^2}
 \end{aligned}$$

Osserviamo che accrescere la pressione (da  $w = 0$  a  $w = 1/3$ ) fa crescere il parametro di decelerazione  $q_0$ .

Questo modello è però estensibile anche a casi più generali. Infatti, nelle fasi dominate dalla radiazione o dalla materia, quando il contributo di  $\Omega_\Lambda$  è trascurabile, come anche il termine di curvatura, l'evoluzione della  $a(t)$  è data dalla

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \Omega_{0w} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w}$$

analoga alla relazione che definisce il modello *EdS*, ma con una costante di Hubble efficace  $H_{0,eff}$  pari a

$$H_{0,eff} = H_0 \sqrt{\Omega_{0w}}$$

Quindi a  $z$  elevato possiamo usare le stesse relazioni del modello *EdS*, ma con  $H_0 \rightarrow H_{0,eff}$ , ad esempio:

$$\begin{aligned}
 t(z) &= \frac{2}{3(1+w)H_0 \sqrt{\Omega_{0w}}} (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} \\
 H(z) &= H_0 \sqrt{\Omega_{0w}} (1+z)^{\frac{3(1+w)}{2}}
 \end{aligned}$$

Rimangono invariate le relazioni che esprimono  $\rho_w(t)$  (in cui il termine con  $H_0$  e quello con  $\Omega_{0w}$  si semplificano) e  $q$  (che non dipende da  $H_0$ ).

Queste relazioni sono utili per avere delle *stime approssimate* dei valori corretti. Vedo quindi che, a  $z$  elevato, il modello di *EdS* rappresenta un'ottima approssimazione del modello reale di Universo, quale che sia la sua curvatura.

### 5.13 Modelli con radiazione e materia

Se curvatura e costante cosmologica sono trascurabili è possibile trovare una soluzione analitica esatta. L'equazione

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[ \Omega_R \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_M \left( \frac{a_0}{a} \right) \right]$$

può essere integrata. Se ne facciamo la radice quadrata e separiamo le variabili otteniamo

$$H_0 dt = \frac{d(a/a_0)}{\left[ \Omega_R \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_M \left( \frac{a_0}{a} \right) \right]^{1/2}}$$

Posto  $a/a_0 = x$  ed integrando abbiamo

$$\int_0^t H_0 dt' = \int_0^{a/a_0} \frac{dx}{\left[ \frac{\Omega_M}{x} + \frac{\Omega_R}{x^2} \right]^{1/2}} = \int_0^{a/a_0} \frac{dx}{\left[ \frac{\Omega_M x + \Omega_R}{x^2} \right]^{1/2}} = \int_0^{a/a_0} \frac{x dx}{[\Omega_M x + \Omega_R]^{1/2}}$$

Questo integrale fornisce <sup>17</sup> il risultato cercato:

$$H_0 t = \frac{2}{3\Omega_M^2} \left[ \left( \Omega_R + \frac{a}{a_0} \Omega_M \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{a}{a_0} \Omega_M - 2\Omega_R \right) + 2\Omega_R^{\frac{3}{2}} \right]$$

Da questa, ricordando che  $1 + z_{eq} \simeq 2.4 \cdot 10^4 \Omega_M h^2$ , otteniamo l'età dell'Universo all'epoca dell'equivalenza:

$$t_{eq} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3H_0 \sqrt{\Omega_M} (1 + z_{eq})^{\frac{3}{2}}} \simeq 1.032 \cdot 10^3 (\Omega_M h^2)^{-2} \text{ anni}$$

corrispondente, per  $\Omega_M \simeq 0.3$  e  $h \simeq 0.7$ , a  $t_{eq} \simeq 5 \cdot 10^4$  anni ( $t_{eq} = 5.66 \cdot 10^4$  anni se  $\Omega_M h^2 = 0.135$ , come ricavato dai dati di *WMAP* sul *CMB*). Se faccio un confronto con la penultima formula del paragrafo precedente, che è un'approssimazione, vedo che la stima più precisa di  $t_{eq}$  differisce per il semplice fattore  $2 - \sqrt{2} \simeq 0.59$ .

### 5.14 Modelli dominati da materia

Come abbiamo appena visto, l'epoca dell'equivalenza corrisponde ad un'età dell'Universo di soli 50–60000 anni, molto minori dei circa 13.5 miliardi di anni (vedi oltre) di vita del cosmo in cui viviamo. Se trascuro questo “piccolo” lasso di tempo rispetto alla durata totale, e suppongo che la costante cosmologica sia nulla o comunque trascurabile, ottengo i classici modelli cosmologici riportati in tutti i testi, divulgativi e non, di qualche decina di anni fa. Vediamo quindi in dettaglio questi modelli, ricordando che il modello di *EdS* dominato da materia è già uno di questi casi, quello con  $\Omega \equiv \Omega_M = 1$ .

L'equazione (F1) diventa, in questo caso,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 \simeq H_0^2 \left[ \Omega_M \frac{a_0}{a} + 1 - \Omega_M \right]$$

Se prendiamo la radice positiva, corrispondente ad un modello in espansione, avremo:

$$\frac{da}{dt} = a_0 H_0 \left[ \Omega_M \frac{a_0}{a} + 1 - \Omega_M \right]^{1/2} = a_0 H_0 \Omega_M^{1/2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \frac{a}{a_0} \right]^{1/2}$$

da cui:

$$\int_0^{a/a_0} \frac{d\left(\frac{a}{a_0}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \left(\frac{a}{a_0}\right)}} = H_0 \Omega_M^{1/2} \int_0^t dt$$

Vediamo separatamente i due casi  $\Omega_M > 1$  e  $\Omega_M < 1$ :

<sup>17</sup>  $\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^2} \left[ \frac{(a+bx)^{3/2}}{3} - a(a+bx)^{1/2} \right]$

- $\Omega_M > 1$ : Osserviamo subito che, essendo  $1 - \Omega_M < 0$ , mentre  $\Omega_M(a_0/a)$  decresce al crescere di  $a$ , ci sarà un valore del fattore di scala che rende nullo  $\dot{a}$ , e valori maggiori di  $a$  renderebbero immaginario  $\dot{a}$ . Esiste quindi un valore massimo del fattore di scala  $a_m$  al tempo  $t = t_m$ , dato da

$$a(t_m) = a_m = a_0 \frac{\Omega_M}{\Omega_M - 1}$$

Per trovare la soluzione poniamo  $(\frac{a}{a_0}) \cdot \frac{2(\Omega_M - 1)}{\Omega_M} \equiv 1 - \cos \theta$  con  $\theta$  angolo di sviluppo, un parametro ausiliario. Allora

$$\begin{aligned} \Omega_M^{1/2} H_0 t &= \int_0^{a/a_0} \frac{d(\frac{a}{a_0})(\frac{a}{a_0})^{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_M - 1}{\Omega_M}(\frac{a}{a_0})}} & \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{(1 - \cos \theta)\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \\ &= \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \theta)^{1/2} \Omega_M^{1/2} \Omega_M \sin \theta d\theta \cdot \sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2}(\Omega_M - 1)^{1/2} 2(\Omega_M - 1) \sqrt{1 - \frac{1 - \cos \theta}{2}} \sqrt{1 - \cos \theta}} & d\left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\Omega_M^{3/2} \sqrt{2}}{2^{3/2}(\Omega_M - 1)^{3/2}} \int_0^\theta \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \end{aligned}$$

da cui alla fine:

$$H_0 t = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \quad a(t) = a_0 \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} (1 - \cos \theta)$$

Questa è l'equazione parametrica di una cicloide. Il massimo si ha per  $\theta_m = \pi$  per cui, come già visto,:

$$a(t_m) = a_m = a_0 \frac{\Omega_M}{\Omega_M - 1} \quad H_0 t_m = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} (\theta_m - \sin \theta_m) = \frac{\Omega_M \pi}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}}$$

Per  $t = 2t_m$  ( $\theta = 2\pi$ ) abbiamo un Big Crunch. Possiamo anche ottenere un'espressione per  $t_0$  ponendo  $a(t_0) = a_0$ :

$$1 - \cos \theta_0 \equiv \frac{2(\Omega_M - 1)}{\Omega_M} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_0 = \frac{2 - \Omega_M}{\Omega_M} = \left(\frac{2}{\Omega_M} - 1\right)$$

sostituendo nell'altra equazione si ha:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)^{3/2}} \left[ \arccos \left( \frac{2}{\Omega_M} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_M} \sqrt{\Omega_M - 1} \right] < \frac{2}{3}$$

- $\Omega_M < 1$ : poniamo in questo caso  $(\frac{a}{a_0}) \cdot \frac{2(1 - \Omega_M)}{\Omega_M} \equiv \cosh \psi - 1$

$$\begin{aligned} \Omega_M^{1/2} H_0 t &= \int_0^{a/a_0} \frac{d(\frac{a}{a_0})(\frac{a}{a_0})^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M}(\frac{a}{a_0})}} & \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{(\cosh \psi - 1)\Omega_M}{2(\Omega_M - 1)} \\ &= \int_0^\psi \frac{\Omega_M^{1/2} \sqrt{\cosh \psi - 1} \Omega_M \sinh \psi d\psi}{\sqrt{2}(1 - \Omega_M)^{1/2} 2(1 - \Omega_M) \sqrt{1 + \frac{\cosh \psi - 1}{2}}} & d\left(\frac{a}{a_0}\right) &= \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)} \sinh \psi d\psi \end{aligned}$$

da cui, in modo analogo al caso precedente, si ha

$$H_0 t = \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} (\sinh \psi - \psi) \quad a(t) = a_0 \frac{2(1 - \Omega_M)}{\Omega_M} (\cosh \psi - 1)$$

Ancora, in modo analogo al caso  $\Omega_M > 1$ , abbiamo

$$\cosh \psi_0 = 1 + \frac{2(1 - \Omega_M)}{\Omega_M} = \frac{2}{\Omega_M} - 1 \quad \text{e} \quad H_0 t_0 = \frac{\Omega_M}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} \left[ \frac{2}{\Omega_M} \sqrt{1 - \Omega_M} - \arccos \left( \frac{2}{\Omega_M} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3}$$

Usando la relazione  $\arccos(x) = \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}]$  e sviluppando per  $\Omega_M \rightarrow 0$  si ottiene

$$H_0 t_0 \simeq 1 + \frac{\Omega_M \ln \Omega_M}{2} \rightarrow 1 \quad \text{se} \quad \Omega_M \rightarrow 0$$

precisa al 99% per  $\Omega_M < 0.3$ .

Perchè studiare modelli che sono palesemente non rappresentativi del modello cosmologico attualmente accettato? Per quanto riguarda il modello con  $\Omega_M > 1$ , esso può rappresentare l'evoluzione (semplificata) di una fluttuazione di densità in eccesso rispetto alla densità media: se supponiamo che una regione sferica dell'Universo abbia una densità maggiore della densità media e maggiore anche di quella critica, quella regione sferica evolve (il suo raggio evolve) come il fattore di scala di un Universo con  $\Omega_{M,locale} > 1$ , raggiungendo un massimo e poi ricollassando, mentre il resto dell'Universo continua ad espandersi. Il modello con  $\Omega_M < 1$  ci fa vedere come, al tendere della densità a zero per effetto dell'espansione, ci si ritrova con un andamento, e con un  $k$ , che riproducono quelli del modello di Milne, con  $a \propto t$ ,  $H = 1/t$ ,  $k = -1$ .

## 5.15 Modelli con $\Lambda \neq 0$

Abbiamo già visto una classificazione qualitativa di questi modelli. Cerchiamo ora di essere un po' più quantitativi. Abbiamo anche visto che i modelli che iniziano con un Big Bang ricollassano o si espandono all'infinito. Questo ultimo fatto diviene tanto più probabile al calare della densità di materia e di radiazione ed al crescere del contributo dovuto alla costante cosmologica. Ma in altri casi l'universo non ha mai avuto un Big Bang: nel passato l'universo collassava, ma l'effetto repulsivo di una  $\Lambda > 0$  ne ha rallentato il collasso fino a trasformarlo in espansione.

Per vedere in dettaglio i vari casi occorre integrare numericamente le equazioni di Friedmann; nel caso in cui ignoriamo la radiazione, si può procedere anche analiticamente. L'equazione di Friedmann, con  $\Omega_R = 0$ , diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_\Lambda \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-2} + 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda \right]$$

Ponendo  $a/a_0 = R$  e  $\tau = H_0 \cdot t$  si ottiene:

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 1 + \Omega_M \left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_\Lambda (R^2 - 1)$$

L'epoca attuale corrisponde a  $R = 1$  e la pendenza della curva, sempre all'epoca attuale, è uguale a 1.

Vediamo quale futuro (e quale passato) possono avere i modelli cosmologici in funzione degli attuali valori dei parametri di densità.

Abbiamo già visto che se  $\Lambda < 0$  ( $\Omega_\Lambda < 0$ ) l'universo ricollassa in ogni caso.

Abbiamo anche visto che, se  $k \leq 0$  e  $\Lambda > 0$  ( $\Omega_\Lambda > 0$ ), si ha alla fine in ogni caso un'espansione come nel modello de Sitter.

Più vario è il caso in cui  $k = +1$  e  $\Lambda > 0$  ( $\Omega_\Lambda > 0$ ), come abbiamo visto. Un valore  $\Omega_\Lambda > 0$  tende a far espandere l'universo a meno che  $\Omega_M$  non sia così elevato da forzare il ricollasso prima che il termine di costante cosmologica riesca a dominare la dinamica. In questo caso, per un  $R > 1$ , cioè nel futuro,  $R(\tau)$  avrà un massimo con derivata nulla, fornendo un'equazione cubica per  $R$ . Si avrà espansione e non ricollasso se:

$$\Omega_\Lambda > 4\Omega_M \left\{ \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \right\}^3$$

Per valori grandi e positivi di  $\Omega_\Lambda$  l'universo ha invece un punto di inversione nel passato, un rimbalzo, che separa una fase di collasso da quella attuale di espansione (*bouncing model*). Questo accade se

$$\Omega_\Lambda > 4\Omega_M \left\{ \text{coss} \left[ \frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left( \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) \right] \right\}^3 \quad (*)$$

dove

$$\text{coss} = \begin{cases} \cosh & \Omega_M < 1/2 \\ \cos & \Omega_M \geq 1/2 \end{cases}$$

Il "rimbalzo" avviene ad un redshift  $z_B$  e, ricordando che  $a_0/a = 1 + z$ , vediamo che ad un minimo di  $a$  nel passato corrisponde ad un massimo di  $z = z_B$  con

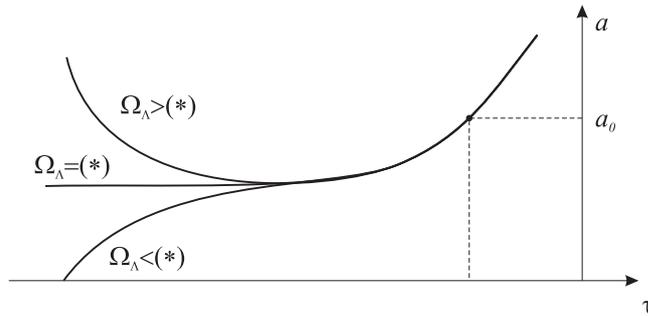
$$z_B = 2 \text{coss} \left[ \frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left( \frac{1 - \Omega_M}{\Omega_M} \right) \right] - 1 \quad (**)$$

La tabella seguente mostra alcuni risultati:

$\Omega_M$	$z_B$
0.01	5
0.1	2
0.01	1.25

Vediamo subito che, per valori di  $\Omega_M$  ragionevoli, ottengo valori implausibili di  $z_B$ . Se  $\Omega_M \sim 0.1$  l'esistenza di QSO a  $z \gtrsim 5$  esclude questi modelli con rimbalzo.

In questi modelli, comunque, non c'è una fase di Big Bang, di elevatissima densità della materia, e sono esclusi anche dall'esistenza del fondo a microonde.

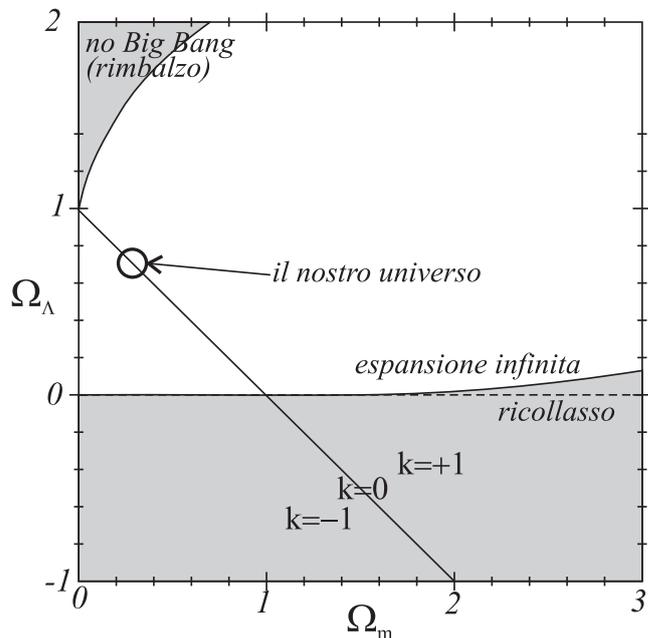


Se l'Universo si trova esattamente sulla linea critica definita dalla (\*), il "rimbalzo" si ha a  $t = -\infty$ . I modelli al di sotto della linea critica, ma molto prossimi ad essa, sono noti come modelli "esitanti" (*loitering models*), poichè hanno una lunga fase quasi-statica, con un fattore di scala quasi costante ( e quindi con un redshift costante  $z = z_L$ ), e corrispondono ai modelli di Lemaitre di cui abbiamo già detto sopra.

La (\*\*\*) dà il valore di  $z_L$  corrispondente a questa fase quasi-statica, che è tanto più lunga quanto più siamo prossimi alla curva (\*). Una durata infinita corrisponde al modello di Eddington-Lemaitre, con  $\Lambda \sim \Lambda_E$  all'epoca della quasi-staticità. Questo modello ha (ricordandoci che  $\Lambda_E = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$  e che  $\rho = \rho_{0M}(1+z)^3$ ,  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda_E c^2}{8\pi G}$ )

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2} \rho_{0M}(1+z_L)^3 \quad \text{e dividendo per } \rho_{0cr} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \Omega_M(1+z_L)^3$$

come risulta anche dalle (\*) e (\*\*). Questa relazione ci fornisce  $z_L$  in funzione dei valori odierni di  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$  se siamo in un modello *loitering* (è anche il valore di  $z$  per cui  $q(z) = 0!$ ). Vediamo che una fase quasi-statica ad alto redshift richiederebbe valori esageratamente bassi di  $\Omega_M$  se  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ . Il grafico sotto mostra una sintesi di quanto detto. Ricordiamo che recenti osservazioni suggeriscono i valori  $\Omega_M \sim 0.3$  e  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ .



## 5.16 Il nostro Universo?

Come abbiamo visto, il nostro universo, dopo l'equivalenza, è stato dominato prima dalla materia e poi dal vuoto. Esiste una soluzione analitica per un universo con *materia* + *costantecosmologica* e piatto ( $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ ).

Dalla (F1) scritta, in questo caso, nella forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_\Lambda \left(\frac{a_0}{a}\right)^{-2} \right]$$

si ha, ponendo  $R \equiv a/a_0$ ,

$$\frac{dR}{dt} = H_0 \left[ \frac{\Omega_M}{R} + \Omega_\Lambda R^2 \right]^{1/2} \rightarrow H_0 dt = \frac{dR}{\sqrt{\Omega_M/R + \Omega_\Lambda R^2}}$$

$$H_0 t = \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{\Omega_M/x + \Omega_\Lambda x^2}} = \int_0^R \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda x^3}}$$

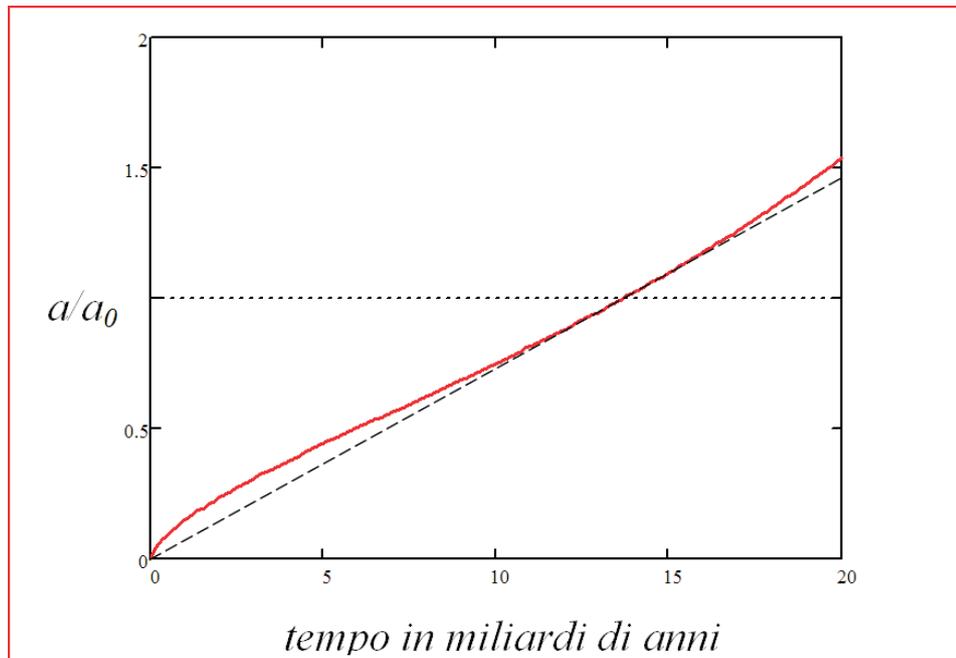
Ponendo  $x^3 \equiv u^2$  si ottiene

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{R^{3/2}} \frac{du}{\sqrt{\Omega_M/\Omega_\Lambda + u^2}}$$

che, risolto<sup>18</sup>, fornisce

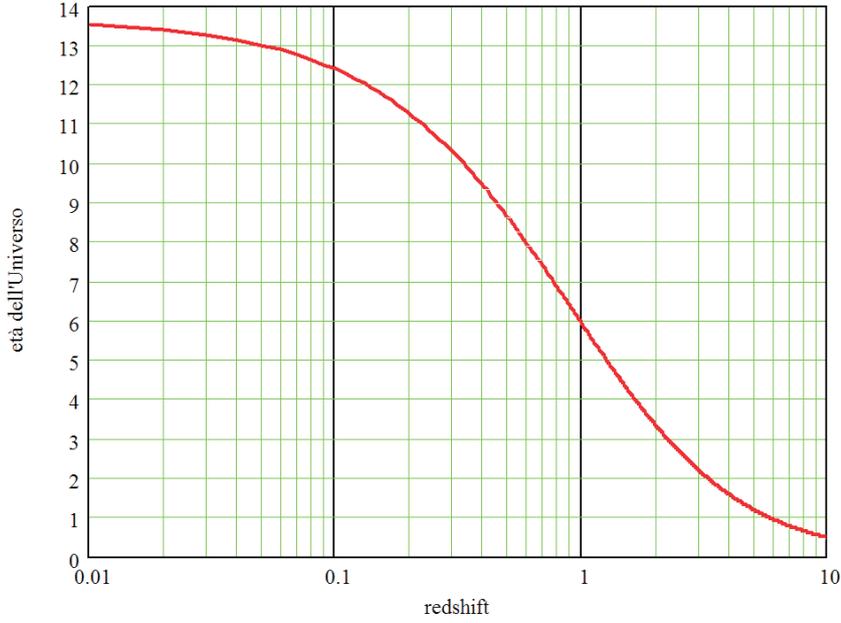
$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left[ \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right]$$

Posto  $a/a_0 = (1+z)^{-1}$ , questa relazione mi fornisce, per questo modello, l'età dell'Universo in funzione del redshift. Nel grafico seguente è riportato l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo per il nostro modello di Universo ( $\Omega_M = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$  e  $h = 0.71$ , come dalle osservazioni di *WMAP*). Si noti come la linea tratteggiata, tangente alla curva al tempo attuale, passi con ottima approssimazione per l'origine: con questi parametri cosmologici il tempo di Hubble coincide praticamente con l'età attuale dell'Universo!



Nel grafico seguente vediamo sempre, con gli stessi parametri cosmologici, il legame tra età dell'Universo (in miliardi di anni) ed il redshift.

<sup>18</sup>Ricordiamo che, posto  $q \equiv \sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + q)$  e  $\ln\left(\frac{x+q}{a}\right) = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$



## 5.17 L'età dell'Universo

Abbiamo finora visto l'età dell'Universo in funzione del redshift per alcuni modelli particolari. Vediamo ora una formulazione generale. Dalla stessa definizione del parametro di Hubble abbiamo:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{da}{a \cdot H} = \frac{d(a/a_0)}{(a/a_0) \cdot H(a)}$$

da cui, posto  $a/a_0 = u$ ,

$$t(a/a_0) = \int_0^{a/a_0} \frac{du}{u \cdot H(u)}$$

integrabile data la dipendenza di  $H$  da  $a/a_0$  e dai parametri cosmologici (vedi paragrafo 5.6). Più pratico è usare il redshift, ricordando che  $a/a_0 = 1/(1+z)$  e che quindi

$$da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz \quad \Longrightarrow \quad dt = -\frac{a_0}{(1+z)^2 a H} dz = -\frac{dz}{(1+z) H(z)}$$

dove si è inserito  $a_0/a = 1+z$ . Si ottiene quindi la formula generale

$$t(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z') H(z')}$$

dove

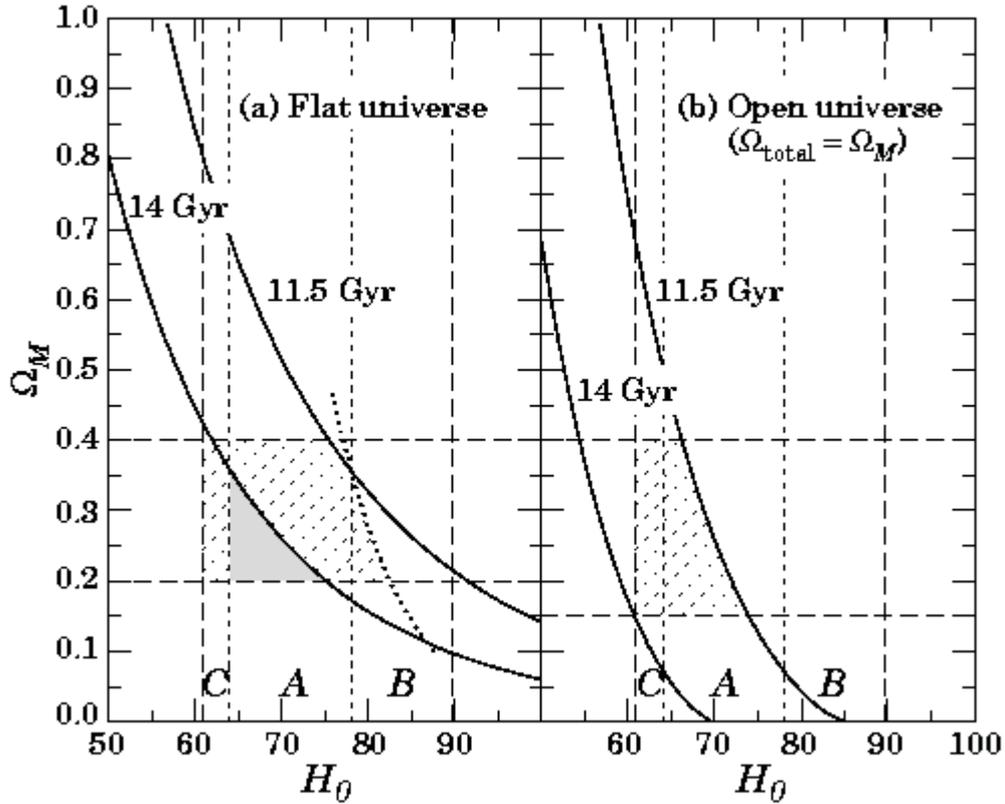
$$H(z) = H_0(1+z) [\Omega_R(1+z)^2 + \Omega_M(1+z) + \Omega_\Lambda(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_0]^{1/2}$$

con  $\Omega_0 \equiv \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda$ . Un'approssimazione utile per l'età attuale  $t_0$  dell'Universo, esatta se  $\Omega_0 = 1$ , è la seguente (valida nel caso *vuoto* più *materia*), buona entro qualche percento se  $0 < \Omega_M \leq 1$ ,  $0 < \Omega_0 \leq 1$ :

$$H_0 t_0 \simeq \frac{2}{3} \frac{\arcsenn \left[ \sqrt{|1 - \Omega_a|/\Omega_a} \right]}{\sqrt{|1 - \Omega_a|}}$$

dove  $\Omega_a \equiv \Omega_M - 0.3\Omega_0 + 0.3$  e "*arcsenn*" è definito come *arcsenh* se  $\Omega_a \leq 1$  (il caso usuale) e *arcsen* se  $\Omega_a > 1$ . Se, ad esempio,  $\Omega_M = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$  e  $h = 0.71$  (come dalle osservazioni di *WMAP*), si ottiene  $t_0 = 13.7 \times 10^9$  anni.

Il grafico seguente illustra l'effetto della costante cosmologica sull'età dell'Universo, confrontando, in funzione di  $\Omega_M$  il caso "piatto" ( $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ ) con il caso "aperto" ( $\Omega_0 = \Omega_M$ ). Si noti come la costante cosmologica allunghi l'età dell'Universo, portandola in accordo con le stime sull'età degli ammassi globulari.



Un parametro cosmologico utilizzato è anche il cosiddetto *loop-back time*,  $t_{lb} = t_0 - t(z)$ , cioè il tempo trascorso tra il redshift  $z$  e oggi. Ad esempio, nel caso di un modello EdS sarà:

$$t_{lb} = t_0 - t_0(1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} = t_0[1 - (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}}]$$

**Esempio:** sia  $w = 0$ , e supponiamo che  $H_0 = 50 \text{ km/s Mpc}$ .

$$H_0 = \frac{1}{6 \cdot 10^{17} \text{ s}} \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 10^{17} \text{ s} = 4 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13.9 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Consideriamo un quasar con  $z = 2$ , quanto tempo fa è stata emessa la luce che osserviamo oggi? Avremo

$$t_{lb} = t_0[1 - (1+z)^{-3/2}] = 0.8075 t_0 = 10.8 \cdot 10^9 \text{ anni fa}$$

## 5.18 Ancora orizzonti

Vediamo di calcolare l'orizzonte delle particelle in un modello di Einstein-de Sitter:

$$\begin{aligned} d_H(t) &= a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = a(t) \int_0^{t/t_0} t_0 \frac{cd(\frac{t'}{t_0})}{a_0(\frac{t'}{t_0})^{\frac{2}{3(1+w)}}} = \frac{a(t)}{a_0} \cdot ct_0 \int_0^{t/t_0} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3(1+w)}}} = \\ &= \frac{a(t)}{a_0} ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} = \frac{3(1+w)}{1+3w} ct \\ &= \frac{3(1+w)}{1+3w} ct_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{2c}{H_0(1+3w)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad \text{dato che } t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \end{aligned}$$

Vedo che  $d_H(t) \propto ct$ ; se  $w = 0$   $d_H(t) = 3ct$ ; se  $w = 1/3$   $d_H(t) = 2ct$ .

Sempre nel medesimo modello consideriamo invece il raggio di Hubble  $R_H$ , definito come la distanza propria alla quale la velocità di recessione è pari alla velocità della luce. Dalla legge di Hubble si ha:

$$c = \dot{a} R_H(t) \Rightarrow R_H(t) \equiv \frac{c}{H(t)} = \frac{c \cdot 3(1+w)t}{2} = \frac{1+3w}{2} d_H(t)$$

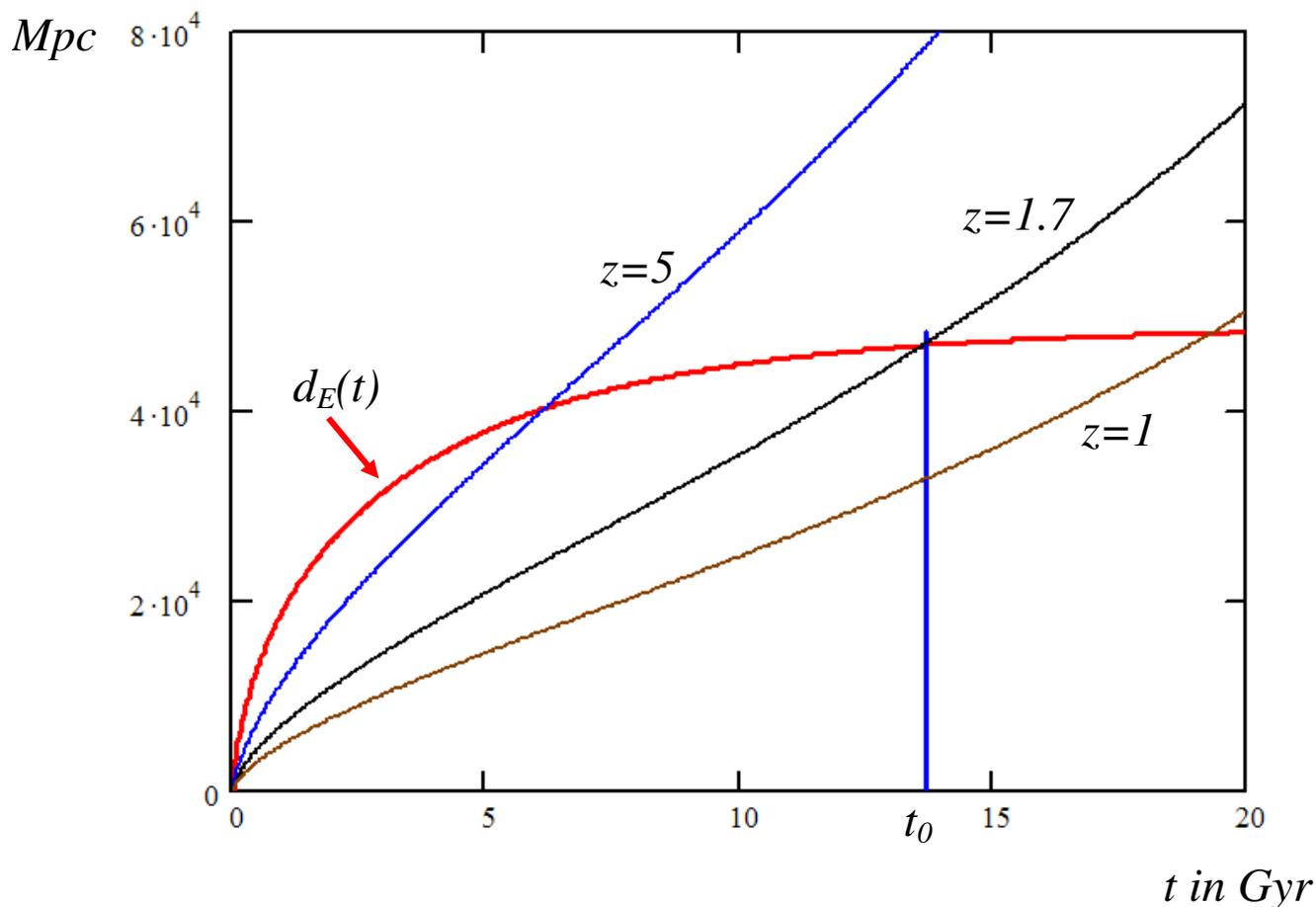
Anche se  $R_H$  e  $d_H$  appaiono, nel modello EdS, confrontabili, in realtà sono di natura due cose molto diverse:  $R_H(t)$  è una quantità istantanea, dipendente dal valore istantaneo di  $H$ , mentre  $d_H(t)$  è una quantità integrale, dipendente da tutta la storia passata dall'universo. Per questo motivo, se un oggetto è entrato nell'orizzonte vi resterà per sempre, mentre può succedere che in fasi successive un oggetto sia, ad esempio, prima dentro, poi fuori, poi nuovamente dentro il raggio di Hubble. Se  $H = cost$  (come nel modello di de Sitter),  $R = cost = c/H$ .

Nei modelli con una fase inflattiva  $d_H$  risulta in realtà molto maggiore di  $R_H$ .

Il modello di Milne, con  $a(t)=ct$ , non ha orizzonte delle particelle ( $d_H \rightarrow \infty$ ).

Abbiamo già visto che il modello in espansione esponenziale (con  $H=cost$ ) di *de Sitter* ha un **orizzonte degli eventi**  $d_E=c/H=R_H=cost$ . Cosa accade nel modello che pare rappresentare il nostro universo ( $\Omega_M + \Omega_A = 1$ )? Se vediamo l'andamento di  $d_E(t)$ , esso tende asintoticamente ad un valore costante (l'universo tende ad un modello di *de Sitter*).

### Orizzonte degli eventi e distanze proprie



Se si traccia poi l'andamento della distanza propria  $d_{pr}(t)$  per oggetti che oggi presentano un redshift  $z$ , trovo che oggetti che oggi hanno  $z \approx 1.7$  stanno uscendo da  $d_E$ , per cui non conosceremo mai che ne sarà di loro! Come detto più sopra, li vedremo sempre, con redshift crescente, ma i fotoni che partono oggi da loro non ci raggiungeranno mai. Oggetti che oggi hanno  $z=5$  sono usciti da  $d_E$  a  $t \approx 6.2 \text{ Gyr}$ ; il *CMB*, oggi a  $z \approx 1100$ , è uscito da  $d_E$  a  $t \approx 0.6 \text{ Gyr}$ . Vediamo quindi che la presenza di una costante cosmologica fa sentire i suoi effetti anche su eventi lontani nel passato, non solo su quelli recenti e futuri.

**Caveat:** Il raggio di Hubble rappresenta la zona di spazio entro la quale è possibile scambiare informazioni; è una scala molto importante per l'evoluzione delle perturbazioni che hanno dato origine alle strutture oggi presenti nell'universo. Poichè gli studi teorici che spiegano queste strutture sono iniziati quando ancora non si parlava dell'inflazione, e nei modelli di *EdS* raggio di Hubble ed orizzonte (delle particelle) in pratica coincidono, è invalso l'uso improprio del termine orizzonte per indicare  $R_H$ . Prima dell'inflazione questo non cambiava molto le cose, ma nei modelli con fase inflattiva la differenza è notevolissima! Ciononostante si tende spesso ad usare ancora il termine *orizzonte* per indicare il raggio di Hubble.

Equazione del moto di un fotone che viaggia verso di noi:

$$a \, dr / \sqrt{1 - kr^2} = -c \, dt = -c \frac{da}{a} = -c \frac{d\tau}{aH}$$

$$\frac{a \, dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = - \frac{c \, da}{aH}$$

$$da = - \frac{a}{(1+z)^2} dz$$

$$a = a_0 / (1+z)$$

$$\frac{a_0}{1+z} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = + \frac{c}{a_0 H} \cdot \left( + \frac{a_0}{(1+z)^2} \right) dz$$

da cui

$$\boxed{\frac{a_0 \, dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c}{H(z)} \, dz}$$

## r(z)

Una grandezza fondamentale, come vedremo, per il confronto tra modelli cosmologici ed osservazioni è la coordinata co-movente radiale  $r$ . In particolare, è essenziale la sua dipendenza dal redshift  $z$ .

Abbiamo visto la relazione

$$\frac{a_0 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c}{H(z)} dz$$

con  $H(z) \equiv H_0 E(z)$ ,

$$E(z) = \left[ \Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_0)(1+z)^2 \right]^{1/2}$$

come anche:

$$f_k(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \begin{cases} \arcsin(r) & (k=+1) \\ r & (k=0) \\ \operatorname{arcsinh}(r) & (k=-1) \end{cases}$$

Se ricordiamo che

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = H_0^2 (\Omega_0 - 1)$$

si ottiene, definendo la funzione  $\operatorname{sinn}(x)$ , la seguente relazione per  $a_0 r(z)$ :

$$a_0 r(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_0 - 1|}} \operatorname{sinn} \left[ \sqrt{|\Omega_0 - 1|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]$$

dove  $\operatorname{sinn}(x) = \sin(x)$  per  $\Omega_0 > 1 (k = +1)$  e  $\operatorname{sinn}(x) = \sinh(x)$  per  $\Omega_0 < 1 (k = -1)$ , mentre, nel caso  $\Omega_0 = 1 (k = 0)$  si ha più semplicemente,

$$a_0 r(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

Per  $z < z_{eq}$  possiamo trascurare il contributo di  $\Omega_R$  e

$$E(z) = \left[ (1+z)^2 (1 + \Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{1/2}$$

mentre se  $\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ ,

$$E(z) = \left[ 1 - \Omega_M + \Omega_M (1+z)^3 \right]^{1/2}$$

Non ci sono espressioni analitiche per  $a_0 r(z)$  nel caso generale. Nei modelli dominati da materia ( $\Omega_\Lambda = 0$ ) si ottiene invece la seguente *formula di Mattig*:

$$a_0 r(z) = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega_M z + (\Omega_M - 2) \left[ (1 + \Omega_M z)^{1/2} - 1 \right]}{\Omega_M^2 (1+z)}$$

che vale sia per  $\Omega_M > 1$  che per  $\Omega_M < 1$ .

Questa relazione, per  $z \rightarrow \infty$ , fornisce ( $\Omega_\Lambda = 0$ ):

$$a_0 r(z) \cong \frac{2c}{H_0 \Omega_M}$$

Nel caso, invece, in cui sia  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  si ha:

$$a_0 r(z) \cong \frac{2c}{H_0 \Omega_M^{0.4}}$$

Per valori piccoli di  $z$  si può usare lo sviluppo in serie

$$a_0 r(z) \approx \frac{c}{H_0} \left( z - \frac{1+q_0}{2} z^2 + \dots \right)$$

## DISTANZA DI LUMINOSITA'

Il **flusso bolometric** (integrale)  $F_{bol}$  che ci arriva da una sorgente di luminosità  $L$ , ad un redshift  $z$ , con coordinata radiale  $r$ ,

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi a_0^2 r^2}$$

dove il termine  $4\pi a_0^2 r^2$  rappresenta l'area della sfera centrata sulla sorgente e sulla quale noi ci troviamo, mentre il fattore  $(1+z)^2$  deriva dal redshift subito dai fotoni e dal loro tasso di arrivo.

Se vogliamo usare una relazione analoga a quella euclidea, definiamo la **distanza di luminosità  $d_L$**

$$d_L \equiv \left( \frac{L}{4\pi F_{bol}} \right)^{1/2} = a_0 r (1+z)$$

## VELOCITA' DI RECESSIONE

$$\beta = v/c$$

$$\beta_{\text{rel}}(z) := \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \quad \leftarrow \text{Effetto Doppler relativistico} \rightarrow \quad 1+z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

### Parametri cosmologici:

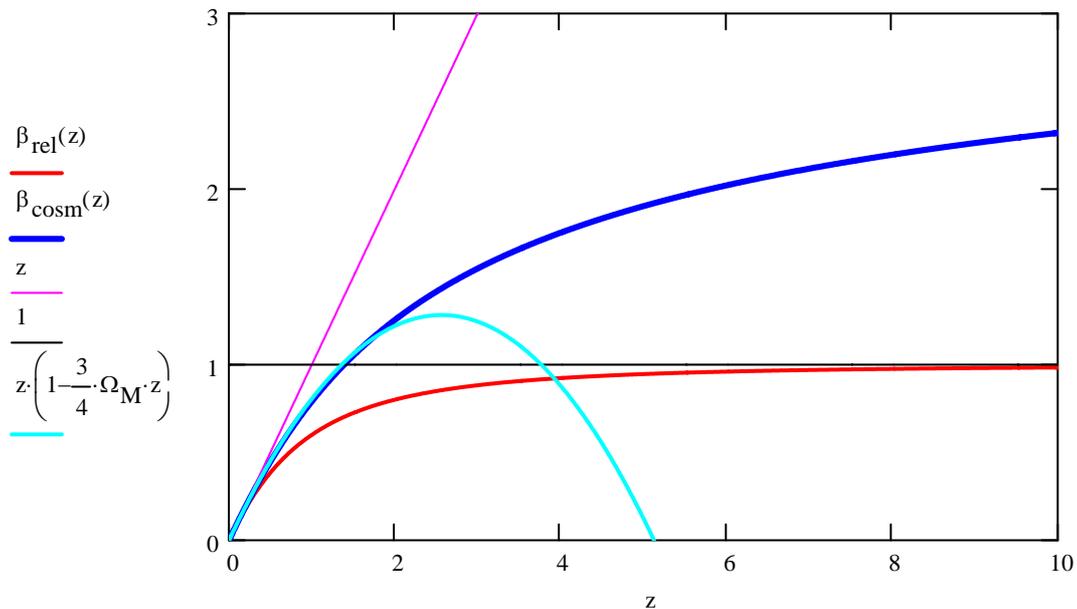
$$\Omega_M := 0.26 \quad \Omega_\Lambda := 0.74 \quad h := 0.7 \quad \Omega_0 := \Omega_M + \Omega_\Lambda \quad \Omega_0 = 1$$

$$v = H_0 d_{\text{pr}} = H_0 a_0 f_k(r) = H_0 \int_0^{r(z)} \frac{a_0}{\sqrt{1 - kr^2}} dr = H_0 \int_0^z \frac{c}{H(z)} dz = c \int_0^z \frac{1}{E(x)} dx$$

$$H(z) = H_0 E(z)$$

$$\beta_{\text{cosm}}(z) := \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M \cdot (1+x)^3 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_0) \cdot (1+x)^2}} dx \quad \beta_{\text{cosm}}(1.39) = 1$$

### Universo piatto



$$\frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_M + \Omega_M \cdot (1+x)^3}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M \cdot x + \left( \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M + \frac{27}{8} \cdot \Omega_M^2 \right) \cdot x^2 + O(x^3)$$

$$\int_0^z 1 + \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M \cdot x + \left( \frac{-3}{2} \cdot \Omega_M + \frac{27}{8} \cdot \Omega_M^2 \right) \cdot x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \beta_{\text{cosm}}(z) \sim z \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \Omega_M \cdot z + \dots \right)$$

Test osservativi dei modelli cosmologici

(0552)

Abbiamo definito  $q_0 \equiv - \frac{\ddot{a}(t_0) a_0}{\dot{a}(t_0)^2}$  e, usando  $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a_0}$

abbiamo visto che  $a(t)$  si può esprimere, per  $t$  vicino a  $t_0$ , come

$$a(t) \approx a_0 \left[ 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]$$

usando il redshift  $z$  vale che  $1+z = \frac{a_0}{a(t)}$  sarà

$$1+z = \left[ 1 + \dots \right]^{-1}$$

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots$$

$$\approx 1 - H_0(t-t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots + \frac{-1(-1-1)}{2} \left[ H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]$$

da cui

$$z \approx H_0(t_0-t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0-t)^2 + \dots$$

$(t_0-t)$  è il look-back time

→ (0552 bis)

questa può essere invertita fornendo

$$t_0-t \approx \frac{z}{H_0} - \frac{\left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2}{H_0^3} z^2 \approx \frac{z}{H_0} \left[ 1 - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z + \dots \right]$$

Per trovare  $r$  in funzione di  $z$ , usiamo la relazione

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \approx r + \frac{k}{6} r^3 + \dots$$

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} \frac{a_0}{a_0} = \frac{c}{a_0} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')/a_0} \approx \frac{c}{a_0} \int_{t_0}^t \left\{ 1 - H_0(t'-t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t'-t_0)^2 + \dots \right\} dt'$$

$$\approx \frac{c}{a_0} \left[ (t_0-t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0-t)^2 + \dots \right]$$

per cui [trascurando i termini  $O(r^3)$ ]

$$r \approx \frac{c}{a_0} \left[ (t_0-t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0-t)^2 + \dots \right]$$

## INVERSIONE DI SERIE

DSS 4 bs

dato:  $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots$

cerco  $x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots + A_m y^m + \dots$

Sostituisco la seconda nella prima:

$$y = a_1 (A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots) + a_2 (A_1^2 y^2 + 2A_1 A_2 y^3 + A_2^2 y^4 + A_3 y^6 + \dots) + a_3 (A_1^3 y^3 + \dots$$

i coefficienti delle varie potenze di  $y$  danno:

$$a_1 A_1 = 1 \rightarrow \boxed{A_1 = 1/a_1}$$

$$a_1 A_2 + a_2 A_1^2 = 0 \rightarrow \boxed{A_2 = -\frac{a_2}{a_1} A_1^2 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{1}{a_1^2} = -\frac{a_2}{a_1^3}}$$

$$a_1 A_3 + 2a_2 A_1 A_2 + a_3 A_1^3 = 0$$

$$\rightarrow A_3 = -\frac{2a_2}{a_1} A_1 A_2 - \frac{a_3}{a_1} A_1^3 = +\frac{2a_2}{a_1} \frac{1}{a_1} \left(-\frac{a_2}{a_1^3}\right) - \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{a_1^3} =$$

$$\boxed{A_3 = \frac{2a_2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4} = \frac{1}{a_1^5} [2a_2 - a_3 a_1]}$$

...

$$\boxed{x(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \frac{1}{a_1^5} [2a_2 - a_3 a_1] y^3 + \dots}$$

Sostituendo l'espressione già trovata per  $t_0 + t$  (ossia  $\cos 2$ ) in funzione di  $r$  si ha

$$r \approx \frac{c}{a_0} \left[ \frac{z}{H_0} - \frac{z^2}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + \dots + \frac{1}{2} \frac{z^2}{H_0^2} \left(1 + \dots\right)^2 \dots \right]$$

ossia

$$\bullet \left| r \approx \frac{c}{a_0 H_0} \left[ \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} \left( \frac{2+q_0-1}{(1+q_0)} \right) + \dots \right] \right| \quad \begin{matrix} -\frac{z^2}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ +1 + \frac{q_0}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{2-1+q_0}{2} \end{matrix}$$

È interessante anche vedere come varia il volume entro una certa distanza propria  $d$ .

Dalla metrica RW, l'elemento di volume  $dV$  risulta essere

$$dV = a^3 \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$$

e quindi

$$V = a^3 \int_0^r \frac{r' dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 4\pi a^3 \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}$$

Se  $r' \ll 1$ ,  $(1-kr'^2)^{-1/2} \sim 1 + \frac{1}{2} kr'^2 + O(r'^4)$

$$V \approx 4\pi a^3 \int_0^r r'^2 \left(1 + \frac{1}{2} kr'^2 + \dots\right) dr' =$$

$$\approx 4\pi a^3 \left[ \frac{r^3}{3} + \frac{1}{2} k \frac{r^5}{5} + O(r^7) \right]$$

ossia

$$\left| V(r) \approx \frac{4\pi}{3} r^3 a^3 \left[ 1 + \frac{3}{10} kr^2 + O(r^4) \right] \right|$$

per passare da  $r$  a  $d$  osservando che  $d = a \cdot f(r)$

$$\frac{d}{a} \approx r + \frac{k}{6} r^3 + \dots \quad \text{invertendo la serie si ha}$$

$$r \approx \frac{d}{a} - \frac{k}{6} \left(\frac{d}{a}\right)^3 + \dots$$

$$r^3 \approx \left(\frac{d}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left[-\frac{k}{6}\left(\frac{d}{2}\right)^3\right] + 3\left(\frac{d}{2}\right) \left[\frac{k^2}{6^2}\left(\frac{d}{2}\right)^6\right] + \dots \quad \text{(OSS 3)}$$

$$r^3 \approx \left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots$$

$$V \approx \frac{4}{3}\pi d^3 \left[ \left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots \right] \left[ 1 + \frac{3}{10}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi d^3 \left[ \left(\frac{d}{2}\right)^3 - \frac{k}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \frac{3}{10}k\left(\frac{d}{2}\right)^5 + \dots \right] = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^4 + \dots$$

$$k \cdot \frac{3-5}{10} = -\frac{1}{5}k$$

Cioè

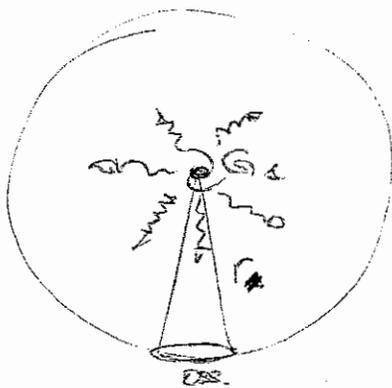
$$V(d) \approx \frac{4}{3}\pi d^3 \left[ 1 - \frac{1}{5}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

- Vedo che, se  $k=+1$  il volume è più piccolo che nel caso euclideo, e il contrario nel caso  $k=-1$ .
- ▣ Abbiamo visto la definizione di distanza propria; questo però non è direttamente misurabile: quello che noi ricaviamo è l'informazione che viaggia lungo il cono luce della sorgente a noi. Si possono però definire altre tipi di distanza che sono, almeno in principio, misurabili direttamente. Vedremo, in particolare, la distanza di luminosità  $d_L$  e la distanza di diametro angolare  $d_A$ .
- Supponiamo che  $L$  sia l'energia totale emessa nell'intervallo di tempo (cioè la luminosità bolometrica) dalla galassia  $G_1$  all'epoca  $t_1$ , quando la luce fu emessa per giungere a noi in  $t_0$ . Per tener conto del fatto che la luce emessa ha una lunghezza d'onda  $\lambda$ , esprimiamo l'energia emessa da  $G_1$  per unità di tempo tra  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$  come
 
$$dL = L \cdot \varphi(\lambda) d\lambda$$

- con  $\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = 1$ . Ricordiamoci che se usiamo l'oss4  
 la frequenza  $\nu$ , essendo  $\lambda \nu = c \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow |d\nu| = \left| \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \right|$   
 dalle  $\varphi(\lambda) d\lambda = \tilde{\varphi}(\nu) d\nu = \tilde{\varphi}(\nu) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$  segue

$$\tilde{\varphi}(\nu) = \frac{\lambda^2}{c} \varphi(\lambda).$$

- Nel caso di emissione isotropa da  $G_1$ , nel tempo che  
 la luce impiega a raggiungere, la radiazione emessa  
 sarà distribuita uniformemente su una sfera con la  
 coordinata radiale  $r$  e centrata su  $G_1$ . L'elemento di  
 superficie di questa sfera, essendo  
 $t = \text{cost}$  e  $r = r_0 = \text{cost}$  (dalla me-  
 trica RW sarà



$$ds^2 = -r_0^2 d\Omega^2 = -r_0^2 (d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

e l'elemento di superficie sarà  
 $r_0^2 d\Omega = r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = dA$

$$dA = r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

e quindi  $A = r_0^2 \int \sin \theta d\theta \int d\varphi = 4\pi r_0^2$

- Vogliamo conoscere quanta energia arriva nell'unità di  
 tempo, perpendicolarmente alle linee di vista, sull'unità di  
 superficie e nella banda  $d\lambda_0 \rightarrow d\lambda_0$ . Questo è  
 il flusso  $F(\lambda_0)$  per l'ampiezza delle bande:  $d\lambda_0$ .

$$F(\lambda_0) = d\lambda_0$$

- A causa del redshift, la luce che arriva nel range  
 $[\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda_0]$  proviene, lasciata da  $G_1$ , dal range

$$\left[ \frac{\lambda_0}{1+z}, \frac{\lambda_0 + d\lambda_0}{1+z} \right]$$

- l'energia emessa da  $G_1$  tra  $t_1$  e  $t_1 + dt_1$  in  
 questo intervallo spettrale è

$$L \varphi\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{d\lambda_0}{1+z} \cdot dt_1$$

- Quanti fotoni possiedono questa energia? Se  $d\lambda_0$  è piccola, possiamo assumere che tutti i fotoni avranno, alla emissione l.o.d'a.  $\lambda_0/(1+z)$ , frequenza  $\frac{c}{\lambda_0(1+z)}$  e quindi una energia  $\frac{hc(1+z)}{\lambda_0}$ ; il n° di fotoni  $dN$  è quindi:

$$\begin{aligned} dN &= L \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{d\lambda_0}{1+z} \cdot dt_1 \cdot \frac{d\lambda_0}{hc(1+z)} = \\ &= \frac{L d\lambda_0}{c h} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot d\lambda_0 \cdot dt_1 \end{aligned}$$

- Alla ricezione ( $t=t_0$ ) questi fotoni sono distribuiti nella area  $4\pi r_1^2 \lambda_0^2$  e sono ricevuti tra  $t_0$  e  $t_0 + dt_0$ ; il n° di fotoni ricevuti per unità di area  $\perp$  alla linea di vista e per unità di tempo sarà quindi:

$$\frac{L d\lambda_0}{c h} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot d\lambda_0 \cdot \frac{dt_1}{dt_0} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2 \lambda_0^2}$$

- All'epoca attuale ogni fotone, della frequenza  $\frac{c}{\lambda_0(1+z)}$  e passato a  $\lambda_0$  e quindi ha energia  $hc/\lambda_0$ . Se moltiplica l'espressione del n° di fotoni per questa energia otteniamo il flusso cercato

$$F(\lambda_0) d\lambda_0 = L \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \cdot \frac{dt_1}{dt_0} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2 \lambda_0^2} \cdot d\lambda_0$$

- Così come le frequenze  $\nu_1$  e  $\nu_0$  risentono dell'espansione, così anche i tempi  $dt_1$  e  $dt_0$ , per cui

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = 1+z = \frac{dt_0}{dt_1}$$

per cui alla fine:

$$F(\lambda_0) = \frac{L \rho\left[\frac{\lambda_0}{1+z}\right]}{(1+z)^3 4\pi r_1^2 \lambda_0^2}$$

- Se vogliamo passare alle frequenze, sarà, arguendo dalla sopra,

$$\tilde{F}(\nu_0) = \frac{d\lambda_0}{c} F(\lambda_0) = (1+z)^2 \frac{1}{c} F(\lambda_0) = \frac{L \cdot \frac{\lambda_0^2}{c} \rho\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)}{(1+z) 4\pi r_1^2 \lambda_0^2} = \rho\left[\frac{\nu_0}{1+z}\right]$$

Se integriamo  $F(z)$  su tutto il perimetro definito (0556)

$$F_{bol} = \int_0^{\infty} F(z_0) dz_0 = \frac{L}{(1+z)^3 4\pi r_0^2} \int_0^{\infty} \underbrace{q\left(\frac{dz_0}{1+z}\right) \frac{dz_0}{(1+z)}}_{\equiv 1 \text{ per definizione}}$$

e quindi

$$F_{bol} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi r_0^2} \quad \text{flusso bolometrico}$$

- Nella sfera euclidea avremmo (d sia la distanza dalla Sorgente)

$$F_{bol} = \frac{L}{4\pi d^2} \rightarrow d = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}$$

Definiamo la distanza di luminosità  $d_L$  allo stesso modo, per preservare la forma di questa relazione:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} = \sqrt{r_0^2 (1+z)^2} = \frac{r_0^2 z^2}{2} = \text{~~AAAAA~~}$$

• ~~Medesima che  $d_L = r_0^2 (1+z)^2$~~

• Dalla relazione tra  $r_0$  e  $z$  abbiamo:

$$d_L = r_0^2 (1+z)^2 \approx \frac{c}{H_0} \left[ z - \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right] (1+z)^2 \approx$$

$$\approx \frac{c}{H_0} \left[ z - \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots + z^2 + \dots \right]$$

$$d_L \approx \frac{c}{H_0} \left[ z + \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right] \neq \frac{cz}{H_0} \left[ 1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right]$$

• Possiamo esprimere il flusso  $F_{bol}$  come

$$F_{bol} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \approx \frac{L H_0^2}{4\pi c^2 z^2} \left[ 1 - (1-q_0) z + \dots \right]$$

• Ricordiamo la formula geometrica che lega la magnitudine apparente  $m$  con quella assoluta  $M$

$m - M = 5 \log d - 5$  ( $m - M =$  modulo di distanza)  
 d espressa in parsec. Se  $l =$  approssimazione alla d  
 o  $l =$  approssimazione

$$m_{bol} - M_{bol} = -5 + 5 \log \left[ \frac{Cz}{H_0} \left( 1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right) \right] pc$$

$$[\ ] = \frac{3 \cdot 10^{10} z \cdot 3 \cdot 10^{17} s}{3 \cdot 10^{18} cm} (1 + \dots) = \frac{3 \cdot 10^9}{h} z [1 + \dots] pc$$

da cui finalmente

$$m_{bol} - M_{bol} = \frac{-5 + 5 \log(3 \cdot 10^9)}{42.39} - 5 \log h + 5 \log z + 5 \log \left[ 1 + \frac{1-q_0}{2} z + \dots \right]$$

da cui:

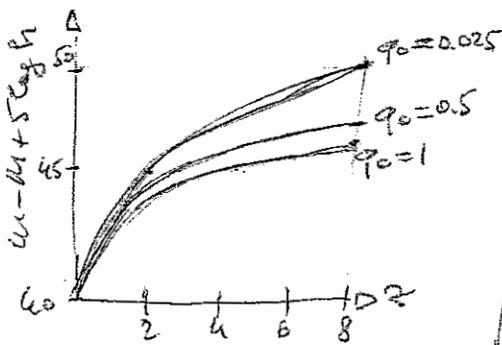
$$\log \left( \frac{1+z}{1} \right) = \log \frac{1+z}{1} = e^{-\ln(1+z)} \approx 1.343 \cdot x \approx 0.4343 \cdot \frac{1-q_0}{2} z$$

$$m_{bol} - M_{bol} = 42.39 - 5 \log h + 5 \log z + 1.086(1-q_0) \cdot z + \dots$$

La formula esatta, per  $1 \geq 0$ , è

$$m_{bol} - M_{bol} + 5 \log h = 42.39 + 5 \log \left\{ \frac{q_0 z + (q_0 - 1) \left[ (1 + 2q_0 z)^{1/2} - 1 \right]}{q_0 z} \right\}$$

l'approssimazione è valida per  $z \ll 1/d_L = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1) \left[ (1 + 2q_0 z)^{1/2} - 1 \right]}{q_0 z}$

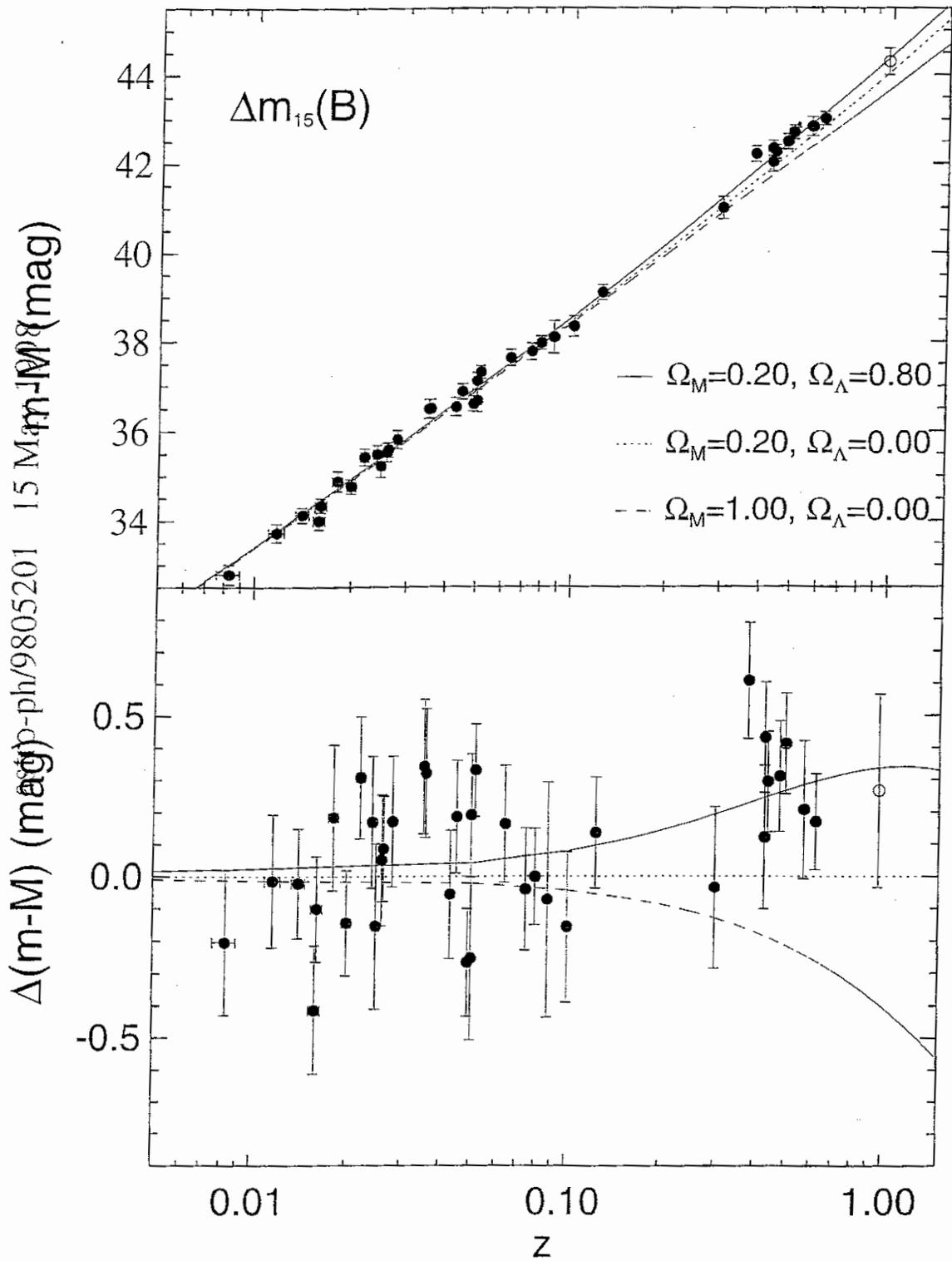


Vediamo che da queste curve sarebbe, in linea di principio, possibile determinare sia  $H_0$  (tramite  $h$ ) che  $q_0$ , leggendo  $z$  (osservato dallo spettro) con  $m$  (misurato), purché si conosca  $M$  per una classe di

oggetti che possano essere considerati come candele standard (ovvero cioè una minima dispersione nel valore di  $M$ ). Ad esempio la luminosità di un ammasso di galassie o della galassia più luminosa di un ammasso. Il diagramma  $m - z$  è il cosiddetto diagramma di Hubble.

SN Ia

diagramma di Hubble



$L(t) \propto t^{-\frac{\alpha-x}{\alpha-1}}$  che, per  $\alpha = 4/5$  fornisce  
 $L(t) \propto t^{-(1.3-0.3x)} \approx t^{-1}$  (se  $x \approx 1$ )

Vedo quindi che, se considero invece  $L(t) = \text{cost.}$ , sotto-  
 stimo la luminosità degli oggetti lontani e l'effetto della  
~~redshift~~ ~~simula~~ un valore di  $q_0$  maggiore del reale.

• Correzione K In generale uno non può misurare  
 le magnitudini bolometriche delle galassie, ma lavora  
 in una ristretta banda spettrale. Allora, poiché il  
 redshift distorce, con il fattore  $(1+z)$ , lo spettro osser-  
 vato di una sorgente, accade che quando io osservo nel  
 visibile, ad esempio, vedo la radiazione emessa nello  
 UV, in una banda spettrale che è  $\frac{1}{1+z}$  di quella che sto  
 usando io. Dovrò allora usare la

$$F(\lambda_0) = \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d^2} = \frac{\phi(\frac{\lambda_0}{1+z})}{(1+z) \cdot \phi(\lambda_0)}$$

dove  $\phi(\lambda)$  è l'energia (frequenza) emessa dalla sorgente  
 alle  $\lambda = \lambda_0$ . (= non a  $\lambda/(1+z)$ ), che posso misurare su  
 oggetti vicini. Allora

Se la  
 luminosità  
 intrinseca  
 non varia  
 col tempo

$$m(\lambda_0) = -2.5 \log \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d^2} = -2.5 \log \left[ \frac{\phi(\frac{\lambda_0}{1+z})}{(1+z) \cdot \phi(\lambda_0)} \right] + \text{cost}$$

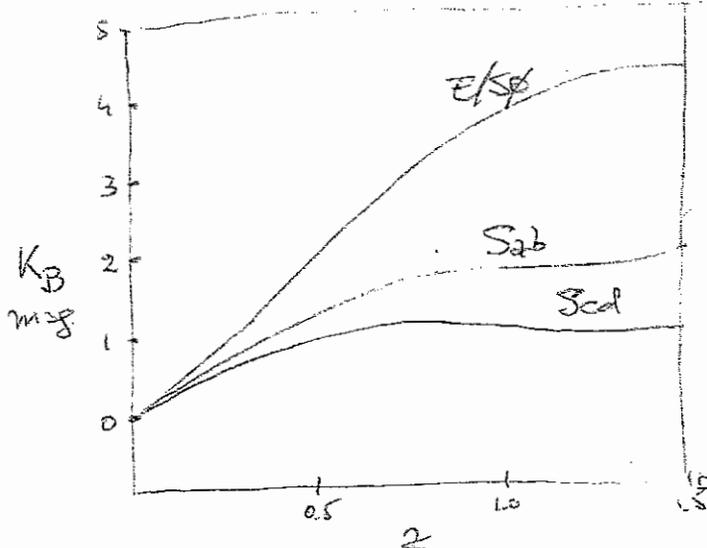
$$M(\lambda_0) = -2.5 \log \frac{L \cdot \phi(\lambda_0)}{4\pi d_L^2} + \text{cost.}$$

per cui  $[M(\lambda_0)$  è la mag. assoluta della sorgente non redshiftata]

$$m(\lambda_0) - M(\lambda_0) = -5 + 5 \log d_L(\text{pc}) + K(\lambda_0)$$

per cui erro

$$m(\lambda_0) - M(\lambda_0) + 5 \log d_L - K(\lambda_0) = 42.39 + 5 \log z + 1.086(1-q_0)z + \dots$$



La correzione nella banda B (A rickes) mostra che questa è forte, per z ~ 1, soprattutto per E/SB, anche in queste (4000 Å → 2200 Å) e l'UV è debole rispetto al B per la mancanza di stelle giovani e calde

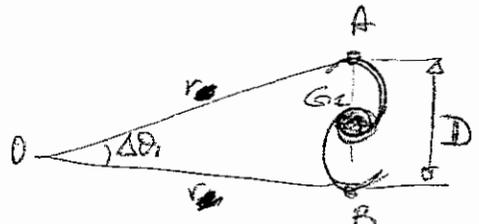
rispetto alle galassie spirali. Nell'IR, dove  $\phi(z) \propto z^{\alpha}$ , la correzione è minore:

$$K_{IR} \approx -2.5 \log \frac{1}{1+z} \approx 2.5 \log(1+z) \approx 1.086 z$$

Inoltre la magnitudine IR è meno sensibile ad ogni tipo di formazione stellare improvvisa (Starburst) che si possono verificare, ad esempio per effetto dell'interazione in un'area tra due galassie.

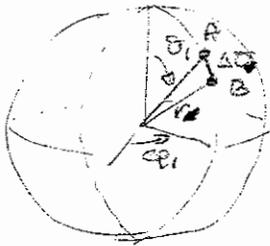
- L'effetto, largamente invariante, dell'erosione in termini di massa rende il test  $(M(z, z_0) \text{ in } \text{mag})$  incoerente. ←

Diametri angolari ( $\alpha_A$ ) [Ma SNIa !!]



Una galassia  $G_1$  ha un diametro  $D$ . Qual è l'angolo  $\alpha_A$  sotteso da questa lunghezza vista dalla Terra?

Consideriamo due geodetiche (cioè percorsi dei raggi di luce) nulle che collegano nei casi due punti estremi di  $D$ , A e B. Possiamo scegliere A con coordinate  $\theta_1$  e  $\varphi_1$ , mentre B ha coordinate  $\theta_1 + \Delta\theta$ ,  $\varphi_1$  (questo per l'isotropia dello spazio, per cui posso scegliere convenientemente l'asse polare  $\theta = 0, \theta = \pi$ ).



Al momento  $t_1$  dell'emissione!  
 Secondo la metrica RW, l'elemento (ossia)  
 di lunghezza propria tra A e B si ottiene  
 ponendo  $t_1 = \text{cost}$ ,  $r_1 = \text{cost}$  e  $q_1 = \text{cost}$ :

$$ds^2 = -r_0^2 \dot{\alpha}(t_1) (d\theta_1)^2 = -D^2 = -dL^2$$

per cui ~~...~~  $d\theta = \frac{D}{r_0 \dot{\alpha}(t_1)} = \frac{D(1+z)}{2or} \equiv \frac{D}{d_A}$

come definizione di distanza di diametro angolare

$d_A = \frac{2or}{1+z}$  essendo  $d_L = r_0 2o(1+z)$   
 ho  $d_A = d_L / (1+z)^2$

Riprendendo lo sviluppo in serie di  $z$  si ha

$$d_A \approx \frac{cz}{H_0} \left[ 1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots \right] \cdot [1+z]^{-1} \approx \frac{cz}{H_0} \left[ 1 - \frac{1+q_0}{2} z + \dots - z + \dots \right]$$

$$d_A \approx \frac{cz}{H_0} \left[ 1 - \frac{3+q_0}{2} z + \dots \right]$$

Troncando all'angolo  $d\theta$ , si ha ( $A \approx 0$ )

$$d\theta = \frac{D(1+z)}{2or} = \frac{DH_0}{c} \cdot \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) [\sqrt{2q_0 z + 1} - 1]}$$

come caso particolare:

$$q_0 \rightarrow 0 \quad d\theta \approx \frac{DH_0}{c} \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) [1 + q_0 z - \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + \dots]}$$

$$\approx \frac{DH_0}{c} \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + q_0 z^2 - q_0 z + \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + O(q_0^3)}$$

$$d\theta \approx \frac{DH_0}{c} \frac{(1+z)}{(z + z^2/2)}$$

mentre per  $q = 1/2$  si ha

$$d\theta = \frac{Dh_0}{c} \frac{\frac{1}{4}(1+z)^2}{\frac{z}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{1+z}-1)} = \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^2}{z+1-\sqrt{1+z}} =$$

$$= \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^2}{\sqrt{1+z}[\sqrt{1+z}-1]} = \frac{Dh_0}{2c} \frac{(1+z)^{3/2}}{\sqrt{1+z}-1}$$

• Per  $z$  piccolo

$$d\theta \approx \frac{D(1+z)h_0}{c z [1 - \frac{1+z_0}{2} z + \dots]} \approx \frac{Dh_0}{c z} (1+z) \left[ 1 + \frac{1+z_0}{2} z + \dots \right]$$

$$d\theta \approx \frac{Dh_0}{c z} \left[ 1 + \frac{3+z_0}{2} z + \dots \right]$$

- Nel caso "nigunus" (pre-relativistico) con  $z \ll 1$  e  $z_0 \ll 1$ , si ha semplicemente  $\frac{h_0 - h_e}{h_e} = z = \frac{v}{c}$  e  $v = H_0 d$  dalla espansione, per cui  $c z = H_0 d$

$$\boxed{d\theta = \frac{D}{d} = \frac{Dh_0}{c z}} \quad d\theta \propto \frac{1}{z}$$

- Vediamo che l'angolo appare maggiore che nel caso "nigunus"
- Accenniamo molto brevemente ad un modello diverso, proposto per spiegare le redshift cosmologici senza avere però un universo in espansione: il cosiddetto modello della incestancia. In esso si assume che l'arricchimento sia da imputare ad un effetto, non ben definito, di assorbimento di energia proporzionale al cammino percorso dal fotone. In questo caso sarà  $h_{\text{oss}} = h_{\text{em}} \cdot e^{-k d} \rightarrow \nu_{\text{oss}} = \nu_{\text{em}} e^{-k d} = \nu_{\text{em}} (1+z)$  da cui  $1+z = e^{k d}$  che, per  $d$  piccolo, sarà  $1+z \approx 1+k d$ ; essendo poi assunto che  $c z = H_0 d$ ,

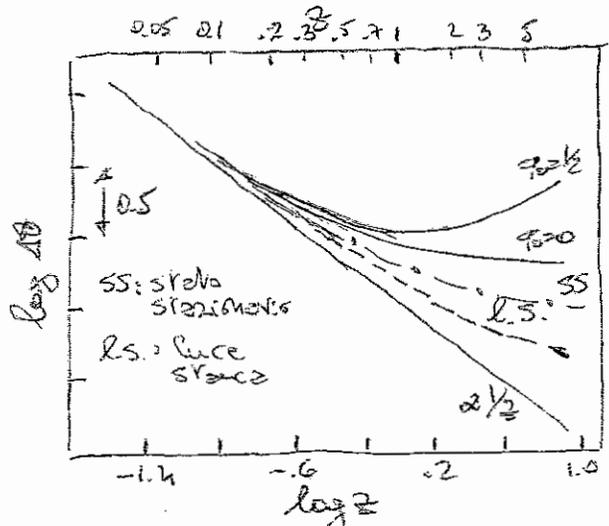
→ ricerca  $k$

Segue che  $z = \frac{H_0 d}{c} = \frac{H_0}{c} d$  per cui si ha

$1+z = e^{\frac{H_0 d}{c}}$  | Nel caso di spazio euclideo (piatto) allora  $d\theta = \frac{D}{d}$

$\frac{H_0 d}{c} = \ln(1+z) \rightarrow d\theta = \frac{DH_0}{c} = \frac{1}{\ln(1+z)} \approx \frac{DH_0}{cz} \quad (z \ll 1)$

- $\Delta\theta$  verso  $z$  presente, per  $q_0 > 0$ , un minimo, che per  $q_0 = 1/2$  cade a  $z = z_m(1/2) \approx 1.25$  ( $\Omega = 0$ )



- Il fatto che  $\Delta\theta$  ~~è~~ <sup>abbia</sup> un minimo e vorrà crescere è dovuto all'espansione dell'universo. Vicini a noi, per  $z \ll 1$ , il ritardo con cui la luce ci arriva è poco importante ed abbiamo che tutti i modelli seguono la legge "ingenua"  $\Delta\theta \sim DH_0/cz$ . Ma per

$z \gg 1$  entra in gioco il ritardo con cui la luce ci giunge dalla sorgente di cui mi surtiamo l'angolo. All'emissione questa era in realtà più vicina e quindi era vista sotto un angolo maggiore di quello sotto cui la vedremo se c fosse infinita. A questo si aggiunge l'effetto della curvatura dell'universo, che fa da luce convergente o divergente, attenuando od esaltando l'effetto.

- Tra i vari modelli riportati vi è anche quello dello stato stazionario (steady-state), proposto da Hoyle, Bond e Gold, che si fonda sul principio cosmologico forte, secondo il quale l'universo appare sempre lo stesso non solo in diversi punti dello spazio, ma anche ad ogni istante. Questo modello è venuto a cadere con la scoperta del fondo a 3K, che implica l'esistenza di un'epoca specifica nel

passato ed è in accordo con le osservazioni del Big Bang. Così  
 Il modello  $\Lambda$  richiede una "nuova fisica". Infatti,  
 è principio cosmol. per fare impiecare che la cost. di Hubble  
 sia davvero tale, e non vari nel tempo. Allora

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H = \text{cost} \Rightarrow a(t) \propto e^{Ht} \quad \text{ciò abbiamo crescita esponenziale. Non$$

esiste un Big-Bang. Ma l'espansione fa allontanare le  
 galassie, quindi la densità media dell'universo tende-  
 rebbe a decrescere; per evitare questo si introduce la  
creazione di materia nello spazio intergalattico, con un  
 tasso tale da lasciare invariato nel tempo la densità  
 media dell'universo. Poiché  $H = \text{cost}$ . allora sarà

$$\boxed{q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{H\dot{a}a}{H^2 a^2} = -1} \quad \begin{array}{l} \dot{a} = Ha \\ \ddot{a} = H\dot{a} \end{array}$$

per il modello  $\Lambda$ .

- Il confronto con le osservazioni mostra che, per  $z \leq 0.3$ ,  
 usando come lunghezza e diametro angolare delle  
 galassie  $\theta$  più brillanti negli ammassi, si ottiene  
 un buon accordo con la relazione  $\theta \propto 1/z$ . Per deter-  
 minare i vari modelli occorre però andare a  $z$  maggiori.  
 Sono stati usati i diametri degli ammassi di galassie  
 (la media \* della separazione angolare tra le 40 galassie  
 più luminose entro 3 Mpc dal centro) e la separazione  
 dei lobi radio delle radio sorgenti. Sorprendente-  
 mente, questi testi sembrano indicare un universo  
 in cui  $\theta \propto 1/z$  fino a  $z \leq 2$ , contro ogni logica. Vi  
 sono probabilmente effetti di selezione (ad esempio le  
 sorgenti radio più luminose potrebbero essere più compatte)  
 o di evoluzione, sia per la dinamica degli ammassi che  
 per la separazione dei radio-lobi. Nel 1993, Kellermann,  
 misurando i diametri angolari (definiti come quel dia-  
 metro al quale la brillantezza è 1/100 di quella centrale) di  
 sorgenti radio compatte, per mezzo di tecniche VLBI, ha

this range, the isophotal diameters (to an isophote of  $\sim 23$  mag arcsec $^{-2}$ ) range from  $\sim 250$  arcsec to  $\sim 2$  arcsec.

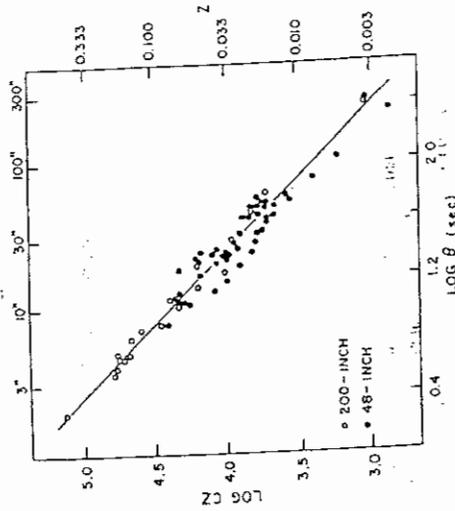


Figure 12 The observed  $\theta(z)$  relation for low-redshift, first-ranked E cluster galaxies obtained by eye estimates from a homogeneous set of photographic plates. The line is the  $\beta \sim z^{-1}$  Euclidean expectation (from Sandage 1972a).

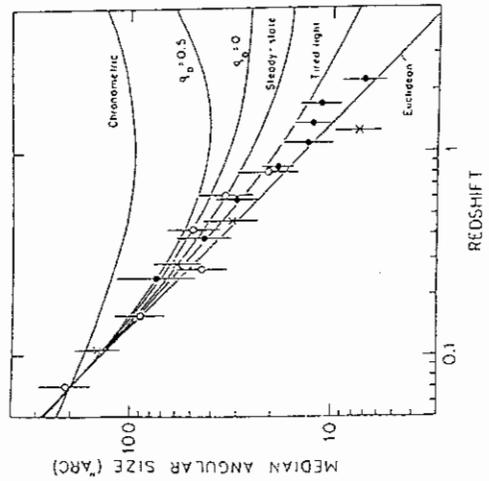


Fig. 4.4. Kapahi's (1987, his Fig. 7) data for the median angular sizes (arcsec) and redshift for his radio-source sample compared with the predictions of the standard model for various  $q_0$  values (without evolution). The Segal "chromometric" model violates the data at all redshifts.

Adams (1979) and of Bruzual & Spirrad (1978) following the brilliant initiative of Hickson (1977a, 1977b) of using the "mean angular separations",

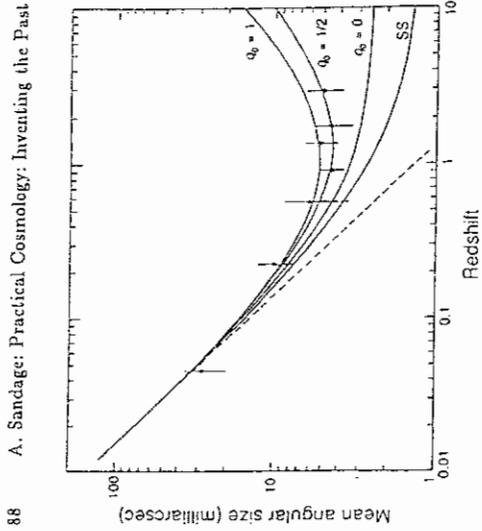


Fig. 4.9 Diagram by Kellermann (1993) of the angular size-redshift relation for compact radio sources.

where the surface brightness is a fixed fraction (1/100) of the central surface brightness. Clearly, this is a metric diameter rather than an isophotal one because of the  $\text{ratio}$  definition; each surface brightness is decreased by the Tolman  $(1+z)^4$ , and the ratio is invariant with  $z$ .

Figure 4.9 is Kellermann's famous diagram. If evolution of the linear size with epoch, and if the dependence of size on radio power, could both be shown to vanish using some presently unknown argument, either from a well founded theory or by experiment, the conclusion concerning the intrinsic geometry of space would be powerful from the diagram<sup>14</sup>. But again evolution and selection effects cloud the conclusion despite the extreme, almost mystical beauty of Fig. 4.9 for cosmologists, hoping for a sign that the standard model of the lens effect of space-time curvature can actually be manifest.

105515 bis

<sup>14</sup>Kellermann argues that the diameter, so defined, is very close to the central engine of the embedded radio source. Its linear diameter, referring to such a compact region of the source, is likely to be impervious to any effect of the intergalactic medium which is expected to be nearly vacuum compared to the matter density in the radio source at the positions measured by Kellermann. (The objection to Daly's method based on possible effects caused by the intergalactic medium would not apply here.) From these precepts Kellermann argues that evolutionary effects on the compact diameters, so close to the center, might be negligible.