

4

AZIONE ASSIALE

A. A. 2024-2025
Corso di **Tecnica delle costruzioni**

Azione assiale

PILASTRI IN C.A. SOGGETTI AD AZIONE ASSIALE di COMPRESSIONE

I **pilastri** sono elementi strutturali **verticali portanti** che trasferiscono i carichi della sovrastruttura alle strutture sottostanti. Sono elementi soggetti prevalentemente ad **azione assiale di compressione** normalmente accompagnata da sollecitazioni di flessione e taglio.

Gli aspetti legati alla presenza combinata di altre caratteristiche della sollecitazione (**momento flettente e taglio**), se queste sono di entità rilevante, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

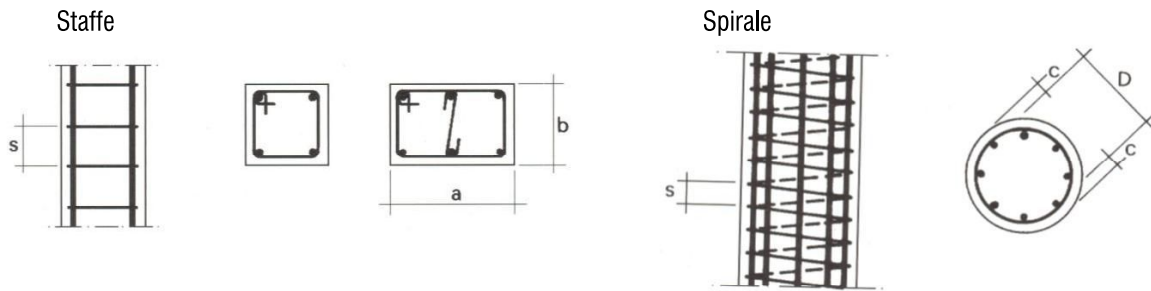
Anche gli effetti del **second'ordine**, che si sviluppano in elementi snelli, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

I pilastri degli edifici, comunque, sono frequentemente progettati facendo **riferimento alla sola azione assiale DI COMPRESSIONE**, quando le altre componenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di entità molto modesta.

Essi sono provvisti di **due ordini di armature**:

- Longitudinali
- Trasversali (staffe o spirali)



**Armatura longitudinale (A_s) minima**

$$A_s \geq 0.1 N_{Ed} / f_{yd}$$

$$A_s \geq 0.003 A_c \quad (\text{A}_c \text{ è l'area della sezione})$$

NTC18 – §4.1

4.1.6.1.2 Armatura dei pilastri

Nel caso di elementi sottoposti a prevalente sforzo normale, le barre parallele all'asse devono avere diametro maggiore od uguale a 12 mm e non potranno avere interassi maggiori di 300 mm. Inoltre la loro area non deve essere inferiore a

$$A_{s,min} = (0.10 N_{Ed} / f_{yd}) \text{ e comunque non minore di } 0.003 A_c \quad [4.1.46]$$

dove:

f_{yd} è la resistenza di progetto dell'armatura (riferita allo snervamento)

N_{Ed} è la forza di compressione assiale di progetto

A_c è l'area di calcestruzzo.

Al di fuori delle zone di sovrapposizione, l'area di armatura non deve superare $A_{s,max} = 0.04 A_c$ essendo A_c l'area della sezione trasversale di calcestruzzo.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

3

Esercitazione 01 – Analisi dei carichi e calcolo dei pilastri**Armatura trasversale (A_{st}) minima**

E' fondamentale garantire un'adeguata spaziatura tra le armature trasversali, in quanto contrastano l'instabilizzazione delle barre longitudinali indotta dalla compressione.

$$s_{st} \leq 12 \phi_s$$

$$\phi_{st} \geq \frac{\phi_s}{4}$$

$$s_{st} \leq 250 \text{ mm}$$

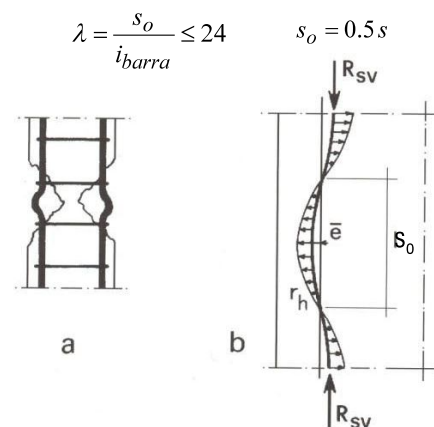
$$\phi_{st} \geq 6 \text{ mm}$$

ϕ_s diametro delle barre longitudinali

ϕ_{st} diametro delle barre trasversali (staffe)

Tipicamente $\phi_{st} = 8 \text{ mm}$

(o, al più, 10 mm in fondazione)



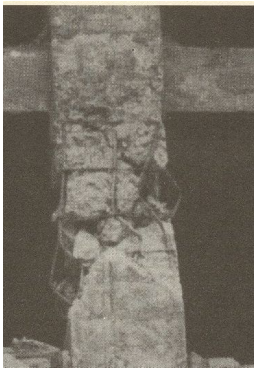
NTC18 – §4.1

Le armature trasversali devono essere poste ad interasse non maggiore di 12 volte il diametro minimo delle barre impiegate per l'armatura longitudinale, con un massimo di 250 mm. Il diametro delle staffe non deve essere minore di 6 mm e di 1/4 del diametro massimo delle barre longitudinali.

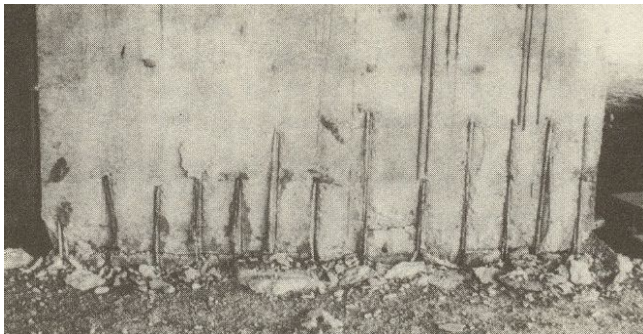
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

4

Esempi di instabilizzazione barre longitudinali di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe

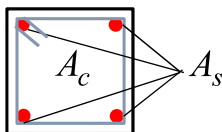


Le zone più «critiche» sono tipicamente le estremità dei pilastri, in quanto sono le zone in cui c'è la ripresa delle armature ed è presente anche una maggiore sollecitazione di flessione



CAPACITA' PORTANTE di un PILASTRO IN C.A.

Le capacità portante di un pilastro in c.a. nei confronti dell'azione assiale di compressione sarà data dal contributo della sezione di **calcestruzzo** (A_c) e di quello delle **barre d'armatura longitudinali** (A_s)



$$N_{Rd} = f_{cd} A_c + \sigma^* A_s$$

Resistenza a compressione
(di progetto) del cls

Tensione di compressione
nelle barre longitudinali

$$\sigma^* = E_s \varepsilon_{c2} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} > \varepsilon_{c2} \quad (\text{ovvero se le barre sono ancora in campo elastico})$$

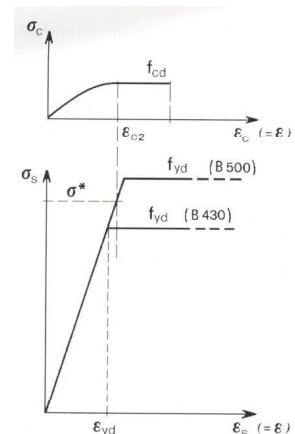
$$\sigma^* = f_{yd} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{c2} \quad (\text{ovvero se le barre sono snervate})$$

In quest'ultimo caso, sostituendo sopra, si può scrivere:

$$N_{Rd} = f_{cd} \left(A_c + \frac{f_{yd}}{f_{cd}} A_s \right) = f_{cd} A_c (1 + \omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} A_c} \quad \text{Rapporto meccanico di armatura}$$

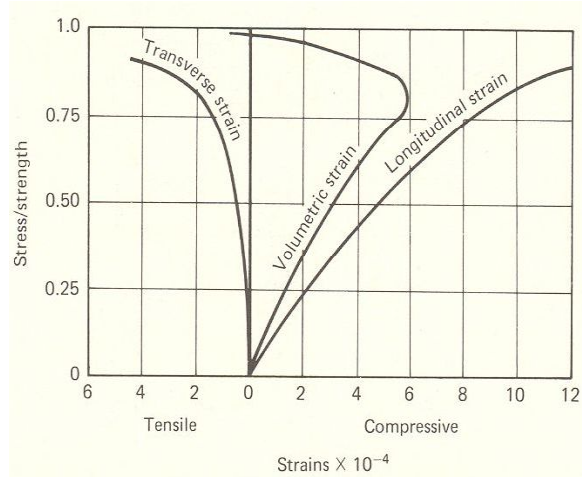
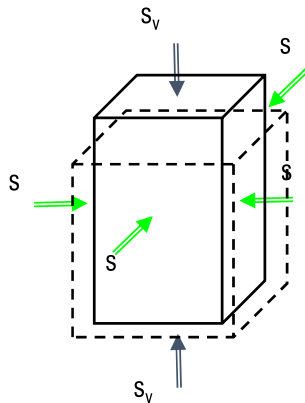
$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} \quad \text{Rapporto geometrico di armatura}$$



IL CONFINAMENTO del CALCESTRUZZO

La presenza di staffe o spirali contiene (meglio, confina) il calcestruzzo incrementando la resistenza a compressione (**CONFINAMENTO**)

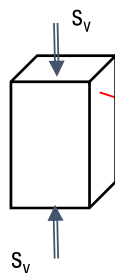
--> **Effetto benefico:** la **resistenza** e la **duttilità** del calcestruzzo compresso aumentano sensibilmente in stati di sforzo triassiali. L'azione di una pressione trasversale "confina" il calcestruzzo e contrasta l'evoluzione dello stato fessurativo interno e l'incremento di volume che precede la rottura

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

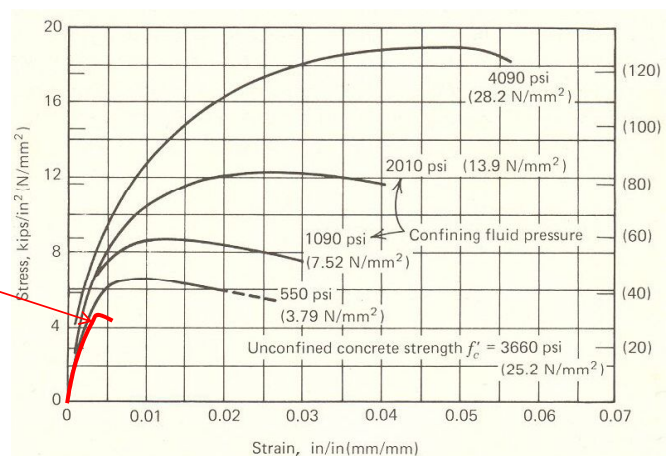
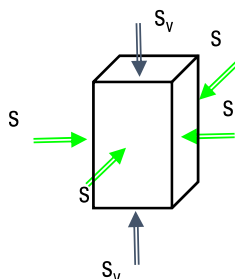
7

Caso ideale:

Prova di compressione monoassiale



Se applichiamo una **pressione trasversale s (o σ)** sulle altre facce, otteniamo un notevole aumento di **resistenza** e in **duttilità**



$$f_{cc} = f_c + \alpha \sigma$$

Resistenza del cls confinato

Resistenza del cls NON confinato

Pressione trasversale

α coefficiente che varia fra 4 e 7 (=4.1 Richart, Brown)

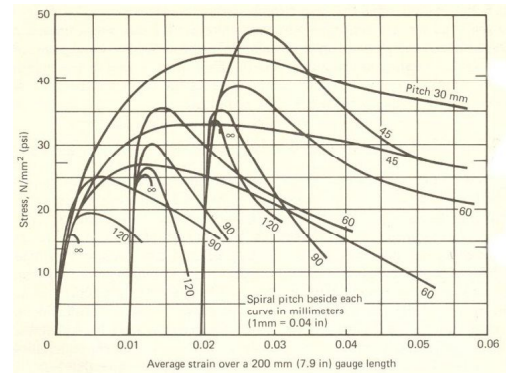
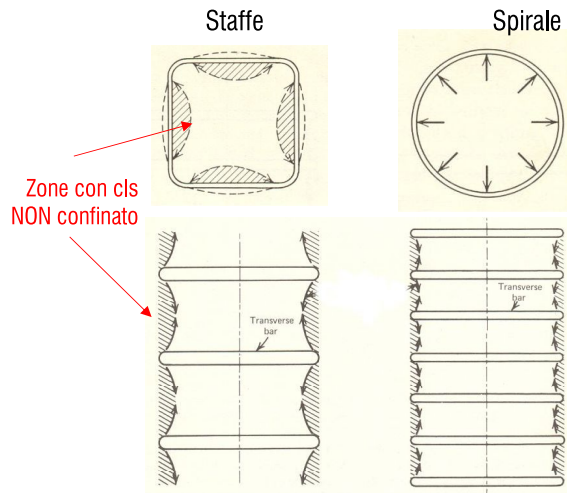
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

8

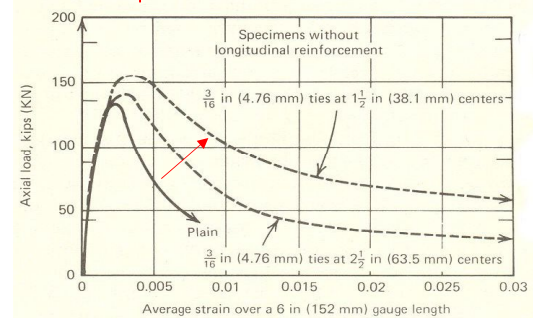
Caso reale:

Il confinamento trasversale può essere realizzato mediante **staffe/spirali**. L'efficacia è funzione del **passo** e della **forma**.

L'effetto del confinamento dato dalle armature trasversale coinvolge, in realtà, soltanto una porzione della sezione (cioè σ non è uniforme)



Al diminuire del passo delle armature trasv. aumenta il confinamento



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



9

L'effetto del confinamento può essere tenuto conto **modificando il legame costitutivo del calcestruzzo**, in funzione del tipo di **armatura d'anima** impiegata:

In particolare, si assume che quando il calcestruzzo raggiunge il suo ramo plastico, le staffe sono **prossime allo snervamento**: allora le tensioni di confinamento possono essere approssimate con la relazione

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

ω_w è la percentuale volumetrica meccanica di armatura d'anima



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

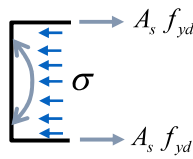
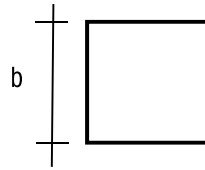
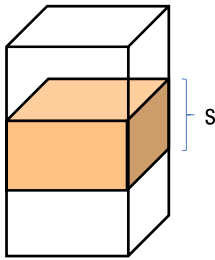


10

Es. caso staffe quadrate

$$\omega_w = \frac{4 A_s f_{yd}}{b^2 s f_{cd}}$$

Riscrivendo $2 A_s f_{yd} = \frac{\omega_w f_{cd}}{2} b s$



Dall'equilibrio alla traslazione:

$$2 A_s f_{yd} = \sigma b s$$

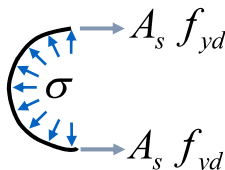
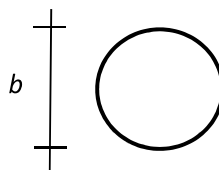
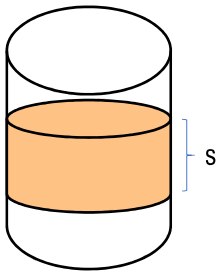
Quindi:

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

Es. caso staffe circolari

$$\omega_w = \frac{4 A_s f_{yd}}{\pi b^2 s f_{cd}}$$

Riscrivendo $2 A_s f_{yd} = \frac{\omega_w f_{cd}}{2} b s$



Legge di Boyle:

$$2 A_s f_{yd} = \sigma b s$$

Quindi:

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE



11

L'efficacia è legata al passo e alla forma

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd} \rightarrow \sigma = 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}$$

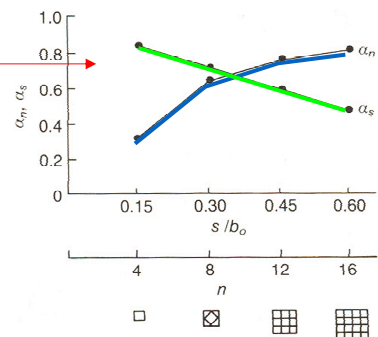
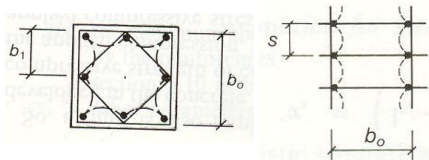
Coeff. forma Coeff. passo

- Per pilastri rettangolari

$$\alpha_n \cong 1 - \frac{n b_1^2}{6 A_o}$$

n = numero barre longit. vincolate con staffe
 b_1 = interasse barre longitudinali
 A_o = area del core (nucleo di cls interno alle staffe)

$$\alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$$



- Per pilastri circolari e staffe circolari

$$\alpha_n = 1$$

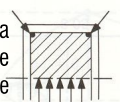
$$\alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right)^2$$

- Per pilastri cerchiati con spirale

$$\alpha_n = 1$$

$$\alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$$

Oss. Per le travi, l'asse neutro va considerato come se fosse presente una staffa trasversale



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

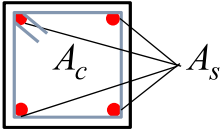


12

CAPACITA' PORTANTE di un PILASTRO IN C.A. CON CONTRIBUTO CONFINAMENTO

$$\left. \begin{aligned}
 N_{Rd} &= f_{cd} A_c + \sigma^* A_s \\
 f_{cc} &= f_c + \alpha \sigma \\
 \sigma &= 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}
 \end{aligned} \right\} \quad N_{Rd} = f_{cd} [A_c + 4(0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w)] + \sigma^* A_s$$

assumendo $\alpha = 4$



Se le barre sono snervate, ovvero $\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{c2}$, si ha $\sigma^* = f_{yd}$ e si può scrivere:

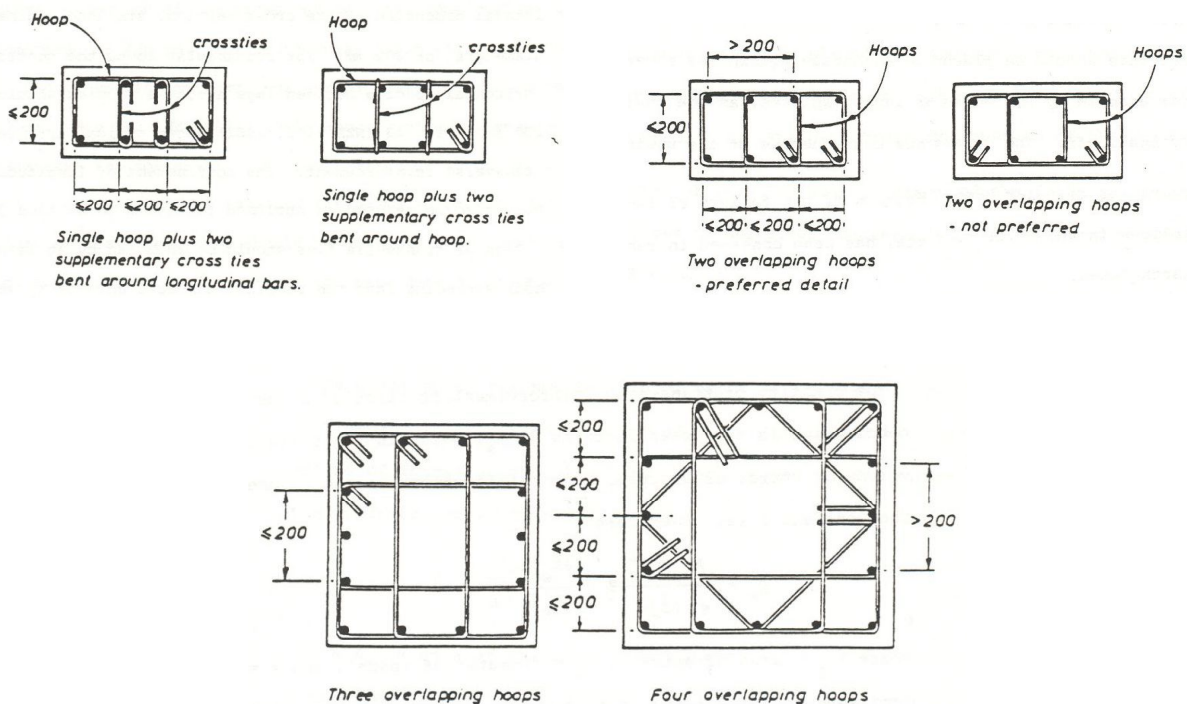
$$N_{Rd} = f_{cd} (A_c + 2 \alpha_n \alpha_s \omega_w) + f_{yd} A_s$$

Contributo importante per
staffe circolari o spirali

Contributo trascurabile per
pilastri con staffe poligonali



Esempi di confinamento con staffe



ELEMENTI IN C.A. SOGGETTI AD AZIONE ASSIALE di TRAZIONE

Con la trattazione degli elementi tesi in calcestruzzo armato si introduce il tema della **fessurazione**.

Il tema della fessurazione è complesso e quindi i criteri e metodi che si utilizzano per trattare il fenomeno sono approssimati.

Dando per scontata la sicurezza nei riguardi della rovina (collasso), la fessurazione ha tre ordini di conseguenze:

- Incremento della **permeabilità**, che penalizza la durabilità (e la funzionalità, nel caso dei serbatoi)
- Decadimento **estetico** (evidenza dello stato fessurativo con senso di apparente precarietà statica che lo rendono inaccettabile all'utenza)
- Riduzione **durabilità** (gli agenti aggressivi per calcestruzzo e acciaio penetrano più velocemente attraverso le fessure accelerando il degrado)

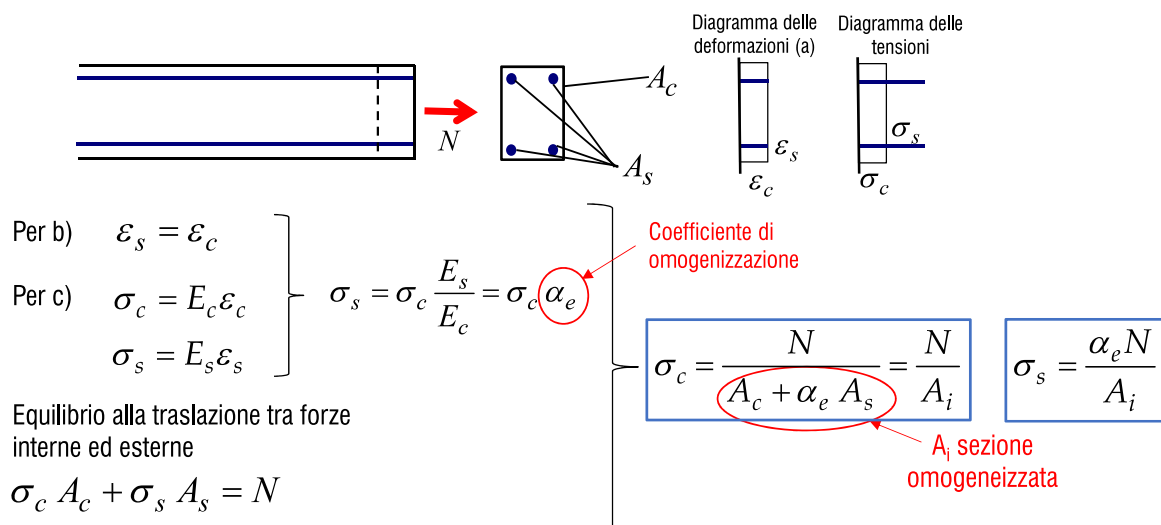
Analizziamo due differenti situazioni:

- 1) Elemento teso in c.a. **non fessurato** (sezione interamente reagente)
- 2) Elemento teso in c.a. **fessurato** (sezione fessurata)



1) Elemento teso in c.a. non fessurato (sezione interamente reagente) $\sigma_c \leq f_{ctd}$

- 3 Ipotesi
- a) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 - b) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 - c) Cla elastico lineare, acciaio elastico lineare



Per $\sigma_c = f_{ctd}$ si ha il limite di formazione delle fessure

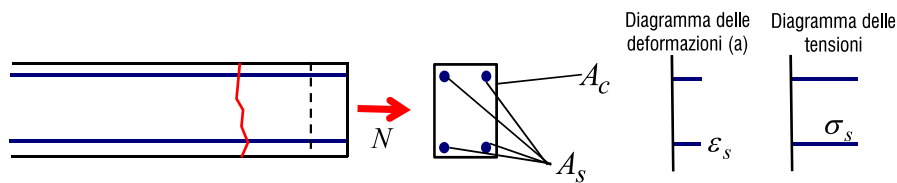
$$N_{cr} = f_{ctd} (A_c + \alpha_e A_s)$$



2) Elemento teso in c.a. fessurato (sezione fessurata)

$$\sigma_c \leq f_{ctd}$$

- 3 ipotesi
- a) Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
 - b) Perfetta aderenza acciaio-cla (congruenza)
 - c) Cla fessurato, acciaio elasto-plastico



Equilibrio alla traslazione tra forze interne ed esterne

$$\sigma_s A_s = N$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{N}{A_s} \end{array} \right\} \text{Allo stato limite di esercizio}$$

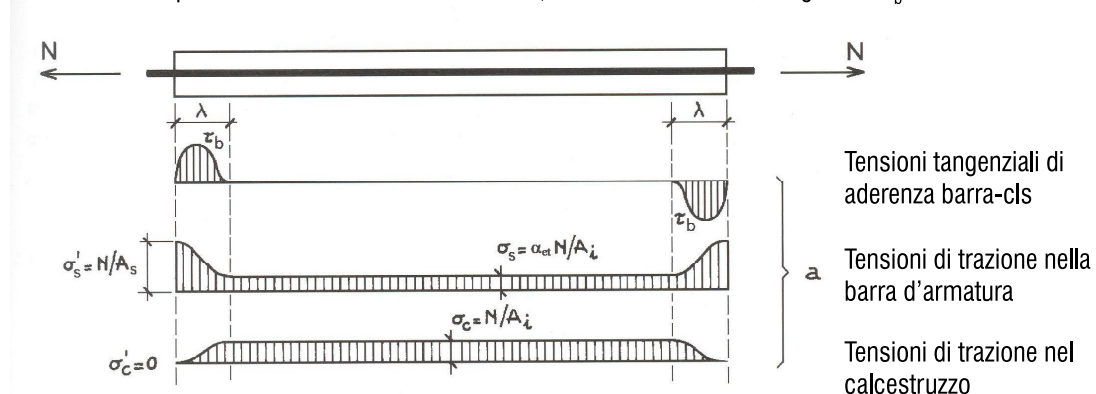
Allo stato limite ultimo, $\sigma_s = f_{yd}$

$$N_{Rd} = f_{yd} A_s$$



ANDAMENTO DELLE TENSIONI IN UN TIRANTE IN C.A.

Supponiamo di applicare N alla barre d'armatura: nei tratti estremi del tirante (per una lunghezza λ) avremo il trasferimento di parte delle tensioni della barra al cla, attraverso le tensioni tangenziali τ_b acciaio-barra



Finchè la tensione nel cla rimane inferiore alla sua resistenza a trazione, siamo in condizione di sezione interamente reagente. Nella zona centrale vale quindi:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s} \quad \sigma_s = \sigma_c \alpha_e$$

Quando la tensione nel cls supera la sua resistenza a trazione si forma una prima fessura e poi le altre:

Nelle zone di completa diffusione delle tensioni (sez. int. reagente)

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s}$$

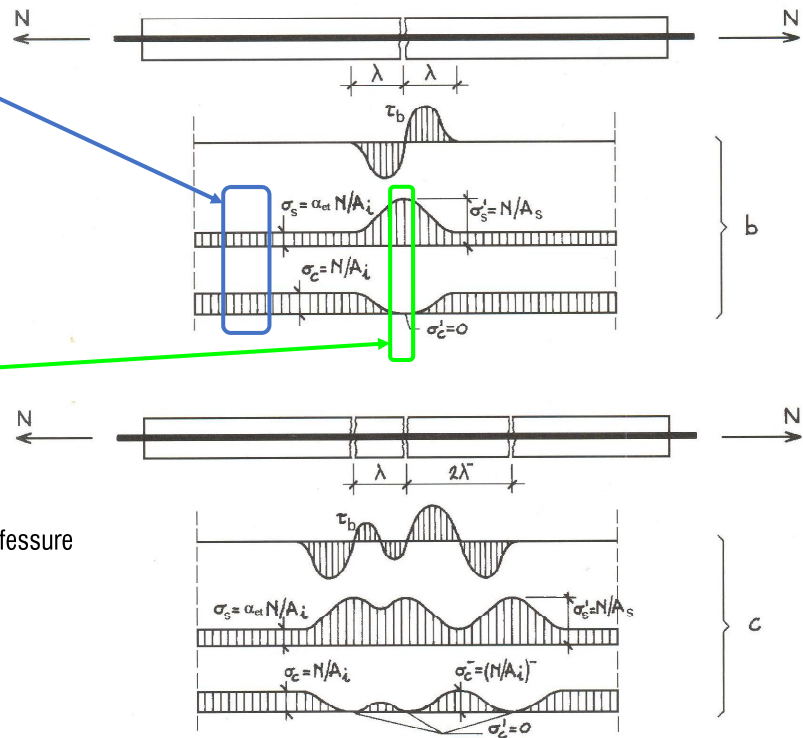
$$\sigma_s = \sigma_c \alpha_e = \frac{\alpha_e N}{A_i}$$

In corrispondenza della fessura (sez. fessurata)

$$\sigma'_s = \frac{N}{A_s}$$

$$\sigma'_c = 0$$

C'è una distanza minima (λ) tra le fessure



DISTANZA MINIMA TRA LE FESSURE

Consideriamo un tratto di tirante compreso tra due fessure

Approssimiamo: $\tau_b \sim \text{costante}$, $\sigma_s \sim \text{lineare}$

L'equilibrio alla traslazione di metà concio, ponendo la tensione nel cls pari a f_{ctd} , dà:

$$N = \sigma'_s A_s = \sigma_s A_s + f_{ctd} A_c$$

$$\Delta \sigma_s = \sigma'_s - \sigma_s = f_{ctd} \frac{A_c}{A_s}$$

L'equilibrio della semiparte di barra dà:

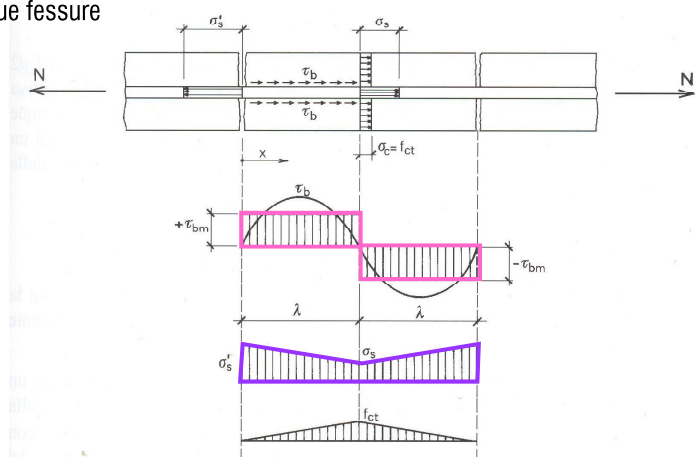
$$\Delta \sigma_s \underbrace{A_s}_{\text{Area barra}} = \tau_{bm} \underbrace{\pi \phi \lambda}_{\text{Superficie laterale barra}}$$

Area barra

Superficie laterale
barra

$$\frac{\pi \phi^2}{4} \Delta \sigma_s = \pi \phi \tau_{bm} \lambda$$

$$\lambda = \frac{\phi}{4} \frac{A_c}{A_s} \frac{f_{ctd}}{\tau_{bm}}$$



OSS: Utilizzando diametri minori di barre si hanno fessure più ravvicinate



APERTURA DI FESSURA

$$w = 2(\Delta\lambda_s - \Delta\lambda_c)$$

Allungamento barra

Allungamento cls

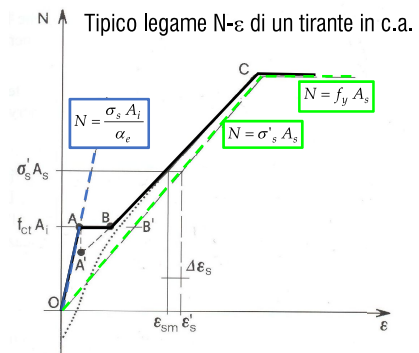
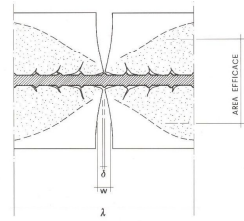
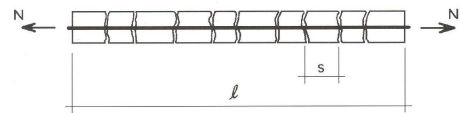
$$\Delta\lambda_s = \frac{\sigma'_s + \sigma_s}{2E_s} \lambda = \frac{2\sigma'_s - \Delta\sigma_s}{2E_s} \lambda$$

$$\Delta\lambda_c = \frac{f_{ctd}}{2E_c} \lambda \quad (\text{trascurabile})$$

$$w = 2 \left(\frac{\sigma'_s}{E_s} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_s}{E_s} \right) \lambda = 2 \frac{\sigma'_s}{E_s} \left(1 - \frac{f_{ctd} A_c}{2 \sigma'_s A_s} \right) \lambda$$

Effetto irrigidente del cls tra le fessure (effetto «Tension stiffening»)

$$A_s \geq A_c \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} \quad \text{Armatura minima (la sezione di armatura deve resistere più di quella di calcestruzzo)}$$



Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.