Geometria 2

Anno accademico 2024-2025

Foglio di esercizi n.1

7 marzo 2025

Ricordiamo la nozione di *traslazione lungo un vettore* $v \in V$:

$$t_v : \quad \mathbb{A} \to \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad t_v(P) := P + v$$

dove $P + v$ denota l'unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$ (vedi SA1).

1) Provare che t_v è biiettiva e che la sua inversa è t_{-v}.

2) Siano $\mathbb{A} := \mathbb{A}(V)$, W un sottospazio vettoriale di V, $P \in \mathbb{A}$ e $S := P + W$. Provare che S è uno spazio affine su W.

3) Siano $\mathbb{A} := \mathbb{A}(V)$, W un sottospazio vettoriale di V, $P \in \mathbb{A}$ e $S := P + W$. Si ricordi che, fissato un punto $O \in \mathbb{A}$, la biiezione $\phi_O : \mathbb{A} \to V$ è definita da $P \mapsto P - O$. Provare che

$$\phi_O(S) \text{ è sottospazio vettoriale di } V \iff \phi_O(S) = W \iff O \in S.$$

4) Siano L ed L' due rette affini sghembe in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$. Dimostrare che esistono e sono unici due piani affini paralleli H e H' in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ tali che $L \subset H$ e $L' \subset H'$.

5) Siano L ed L' due piani affini sghembi in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{K}}$. Dimostrare che esistono e sono unici due iperpiani paralleli H e H' in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{K}}$ tali che $L \subset H$ e $L' \subset H'$.

6) Siano L ed L' due piani affini in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{K}}$ che si intersecano lungo una retta. Dimostrare che esiste un unico iperpiano $H \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{K}}$ che contiene L ed L'.

7) Sia $\mathbb{A}^2$ il piano affine su un campo K e sia $(O, \mathcal{B})$ il suo sistema di riferimento standard. Se $P = (2, 3) \in \mathbb{A}^2$ e $v = (5, -1) \in K^2$, scrivere le coordinate del generico punto della retta L passante per P e di direzione v.

8) Sia $\mathbb{A}^3$ lo spazio affine su un campo K e sia $(O, \mathcal{B})$ il suo sistema di riferimento standard. Se $P = (2, 3, 4) \in \mathbb{A}^3$ e $v = (5, -1, 1), w = (2, 0, 1) \in K^3$, scrivere le coordinate del generico punto del piano H passante per P e di giacitura $\langle v, w \rangle$.

9) Dire se il punto $P = (2, -3) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ appartiene alla retta passante per $Q = (1, 1)$ e avente vettore direzionale $e_1 - 2e_2$, dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.