

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 1

Esercizio 1. Sia $\mathbb{D}_{2n}$ il gruppo diedrale di ordine $2n$.

1. Si dimostri che se n' divide n allora $\mathbb{D}_{2n'}$ può essere considerato un sottogruppo di $\mathbb{D}_{2n}$.
2. Si dimostri che se $n \geq 3$, allora $\mathbb{D}_{2n}$ non è abeliano.
3. Si individui il centro di $\mathbb{D}_{2n}$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G , S un sottoinsieme di G e g un elemento di G . Si verifichi che:

1. H^g è un sottogruppo di G ;
2. $C_G(S)^g = C_G(S^g)$;
3. $N_G(S)^g = N_G(S^g)$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo che non ha sottogruppi propri non banali, si dimostri che allora è ciclico di ordine primo.

Esercizio 4. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo, si dimostri che esiste una biezione fra laterali destri e sinistri di H .

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottoinsieme di $GL(2, \mathbb{C})$.

$$Q = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Si dimostri che Q con il prodotto di matrici è un gruppo non abeliano e che ogni suo sottogruppo è normale.