

In realtà la definizione della quarta frequenza richiederebbe ancora qualche iterazione perché lo squilibrio all'ultimo piano è ancora apprezzabile. Si deve osservare come il criterio di convergenza, molto efficace per la prima frequenza, perde efficienza al crescere della frequenza stessa: in particolare, per l'ultima frequenza con tre iterazioni si è passati da 207 rad/sec a 207,05 rad/sec con una velocità di convergenza estremamente bassa.

Nella figura 17 sono riportate le deformate corrispondenti alle quattro frequenze calcolate. Nel primo modo di vibrazione gli spostamenti orizzontali sono crescenti con l'altezza; nel secondo modo gli spostamenti cambiano segno ai piani superiori, una sola volta. Nel terzo modo di vibrazione gli spostamenti cambiano segno due volte mentre infine per il quarto modo di vibrazione si hanno tre cambiamenti di segno di spostamento.

È questa una caratteristica generale delle forme modali dei telai multipiano: il modo di vibrazione m -esimo contiene $m - 1$ cambiamenti di segno degli spostamenti. Interessanti osservazioni possono farsi circa la forma del primo modo.

Nell'ipotesi di masse uniformemente distribuite lungo la verticale, generalmente il primo modo presenta un flesso a metà altezza; più precisamente, procedendo verso l'alto, le rotazioni rigide di piano inizialmente crescono, presentano un massimo a metà altezza circa, per diminuire nuovamente verso l'alto.

Naturalmente la distribuzione delle rigidezze dei pilastri lungo le verticali (rastrematura dei pilastri) può modificare in maniera significativa tale andamento.

Nella figura 18 è riportato il primo modo di vibrazione di tre telai a otto piani con masse eguali ma con tre diverse distribuzioni delle rigidezze.

Il telaio "a" presente rigidezze dei pilastri eguali a tutti i piani di modo che, in rapporto ad una situazione tipica la parte bassa risulta più deformabile di quella alta.

Il telaio "b" presenta invece andamento lineare delle rigidezze dei pilastri con rigidezza laterale all'ultimo piano pari ad $1/8$ di quella al primo piano.

In rapporto ad una situazione tipica la parte superiore del telaio si presenta più deformabile. Infine, nel telaio "c" la rigidezza del primo piano è la metà di quella degli altri piani: questa situazione è invero frequente a causa della maggiore altezza del piano terra rispetto agli altri, altezza che, ai fini della rigidezza laterale, gioca, com'è noto, un ruolo significativo.

Come si può osservare dalla deformata, si è venuto a determinare un primo piano soffic, dove si concentra una notevole aliquota delle deformazioni della struttura.

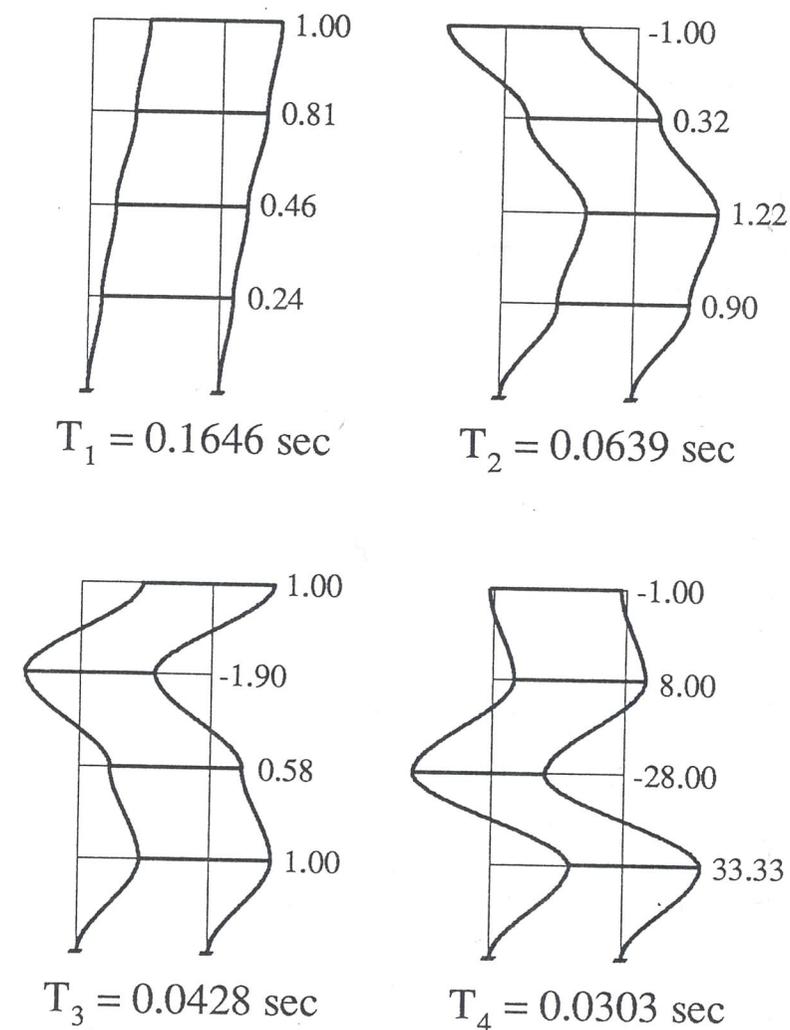


Fig. 17

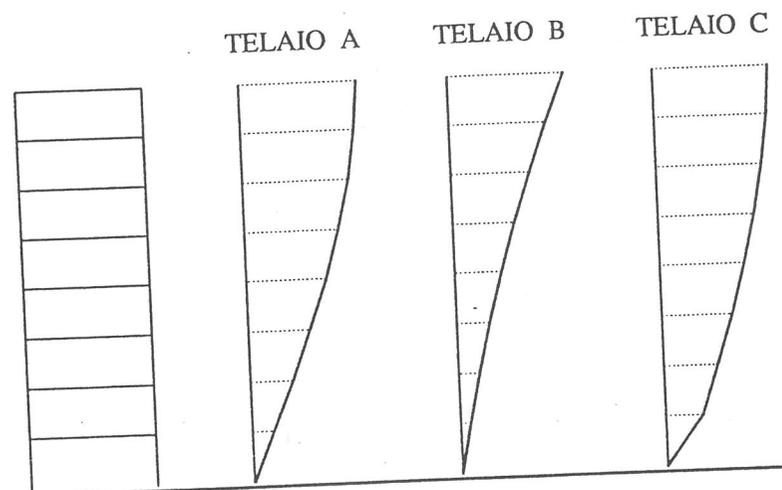


Fig. 18

10.2 Edifici multipiano

a) Scelta dei gradi di libertà: matrici

Ai fini dello studio delle oscillazioni orizzontali degli edifici si adotta generalmente un'ipotesi semplificativa che riduce drasticamente i gradi di libertà del modello dinamico: si assumono cioè gli impalchi infinitamente rigidi nel proprio piano di modo che, per ciascuno di essi, lo schema possiede solo tre gradi di libertà dinamica, due traslazioni orizzontali e la rotazione intorno all'asse verticale z .

Per quanto riguarda il comportamento elastico i gradi di libertà sono invece molto più numerosi in quanto in aggiunta ai tre già considerati si hanno ad ogni piano altre tre incognite per nodo e precisamente la traslazione verticale e le due rotazioni φ_x e φ_y , essendo gli assi x ed y disposti nel piano orizzontale. Indicando con N il numero dei piani, e con M quello dei nodi al piano tipo, si hanno complessivamente i seguenti gradi di libertà:

G.d.L. statici	G.d.L. dinamici
$(3 + 3 \cdot M)N$	$3 \cdot N$

Poiché generalmente $M \gg N$ i gradi di libertà del problema elastico sono di gran lunga superiori a quelli del problema dinamico. Per quanto riguarda la modellazione elastica dell'edificio sono disponibili allo stato attuale programmi di calcolo automatico che tengono conto, attraverso un modello tridimensionale completo, di tutte le connessioni elastiche presenti.

Un modello semplificato può ottenersi trascurando la rigidità torsionale delle travi e considerando l'edificio prendere forma da un'aggregazione di schemi piani, mensole e/o telai, collegati dal diaframma rigido di piano.

Con tale modello si ipotizza che le reazioni elastiche orizzontali esercitate dal generico schema piano dipendono solo dalle traslazioni orizzontali dei suoi piani.

Con le ipotesi introdotte si assumono quali incognite del problema gli spostamenti dei baricentri degli impalchi; infatti, in tali punti possono considerarsi applicate le masse, che, essendo in realtà distribuite, sono caratterizzate anche dal momento d'inerzia polare intorno all'asse verticale.

Indicando con x_i , y_i , e φ_i gli spostamenti del baricentro del piano i -esimo, è preferibile ordinare il vettore delle incognite $\{q\}$ come segue: (cfr. figura 19)

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \\ \{\varphi\} \end{Bmatrix}_{3N} \quad (221)$$

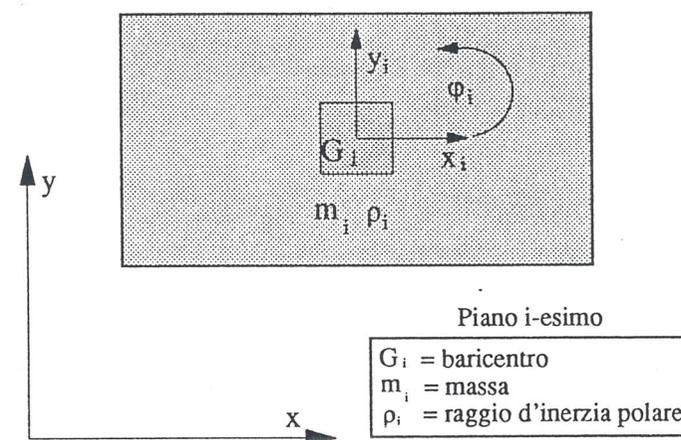


Fig. 19

Per quanto riguarda l'energia cinetica del sistema, indicando con m_i e ρ_i rispettivamente la massa ed il suo raggio d'inerzia polare relativi al piano i -esimo, si può scrivere:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\varphi}_i^2 \rho_i^2) \quad (222)$$

Per quanto riguarda la rigidezza delle molle che simulano la deformabilità del terreno si sono adottate le formule proposte da Whitman per fondazioni circolari:

$$k_H = \frac{32(1-\nu)R}{7-8\nu} G$$

$$k_\varphi = \frac{8R^3}{3(1-\nu)} G$$

essendo $G[FL^{-2}]$ il modulo di taglio e ν il coefficiente di Poisson del terreno. Per quest'ultimo si è assunto il valore 0,5 mentre per il modulo G , sulla base di alcune prove dinamiche, si sono adottati due valori e precisamente:

$$G_{\min} = 7500 \text{ t/m}^2$$

$$G_{\max} = 15000 \text{ t/m}^2$$

Pertanto le rigidezze delle molle, in relazione alla rigidezza del terreno, diventano:

	Terreno rigido (R)	Terreno deformabile (D)
k_H	479.000 t/m	239.500 t/m
k_φ	17.279.000 tm	8.639.500 tm

I valori dei primi 4 periodi nelle due ipotesi formulate sono riportati in secondi nella tabella che segue.

Modo	Schema (R)	Schema (D)
1	0,5537	0,6182
2	0,0977	0,1262
3	0,0698	0,0816
4	0,0495	0,0514

Le deformate dinamiche corrispondenti ai primi quattro modi nelle due ipotesi di terreno rigido e di terreno deformabile, sono riportate nella figura 29 e 30 rispettivamente.

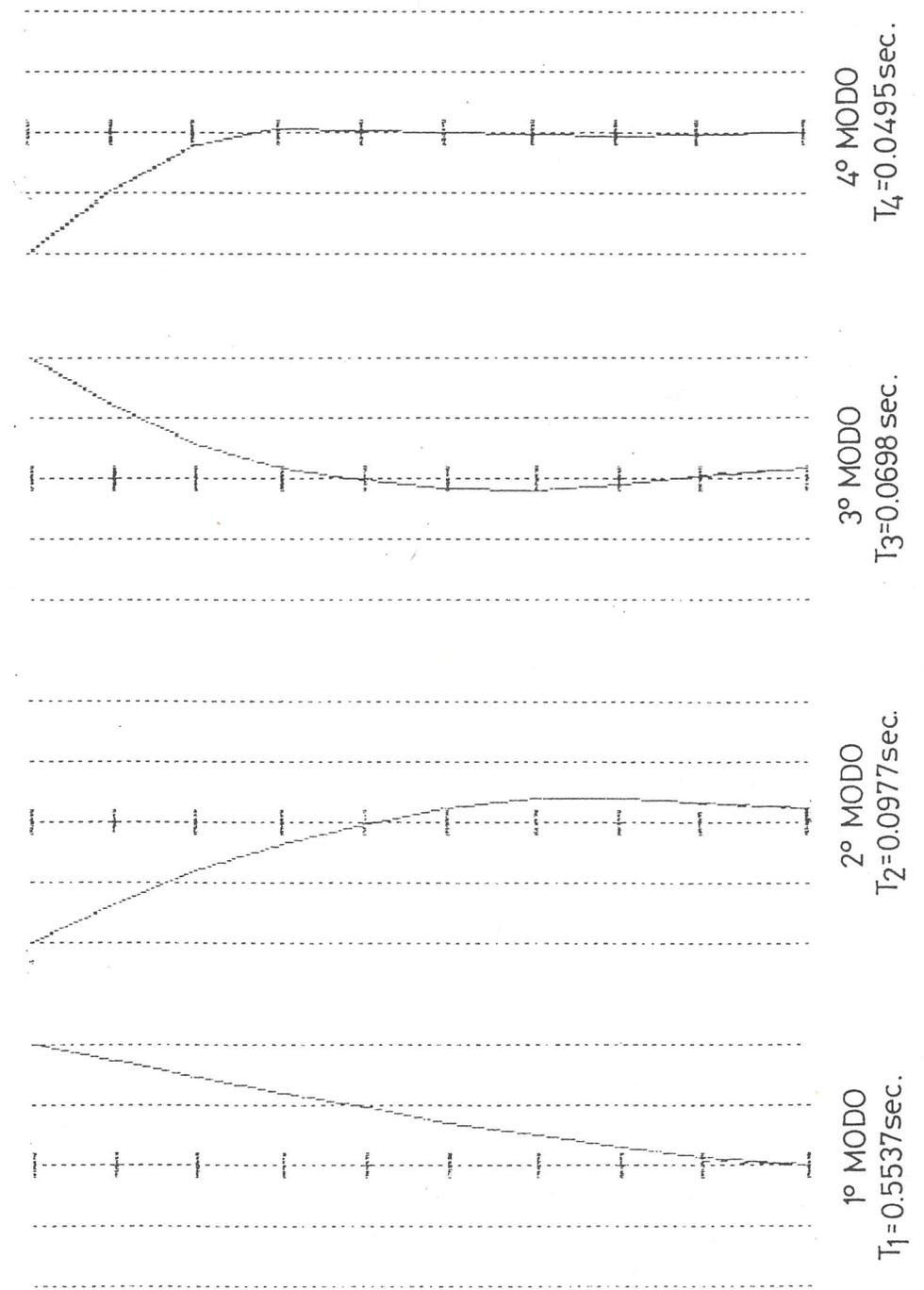


Fig. 29

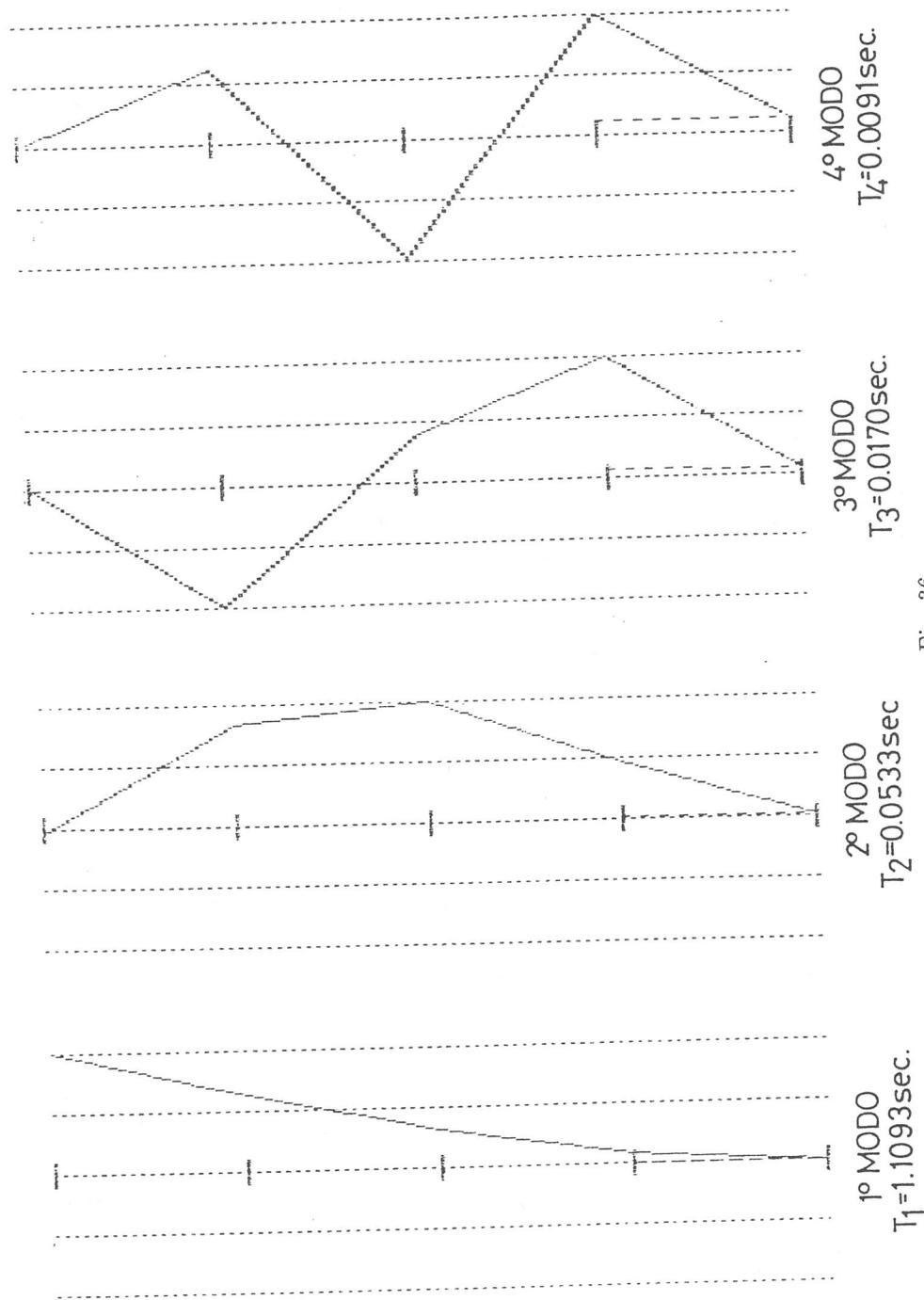


Fig. 36

- Oscillazioni trasversali

Per lo studio delle oscillazioni trasversali si adotta il modello di Figura 37 che presenta nel caso in esame, tre gradi di libertà.

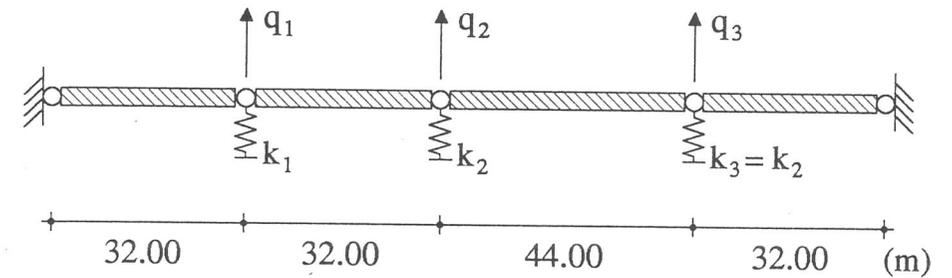


Fig. 37

La matrice delle masse è:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{608 + 608}{3} & \frac{608}{6} & 0 \\ \frac{608}{6} & \frac{608 + 830}{3} & \frac{830}{6} \\ 0 & \frac{830}{6} & \frac{830 + 608}{3} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 88 + \frac{144}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 88 + \frac{178}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 88 + \frac{178}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{9.81} = \begin{bmatrix} 56,09 & 10,32 & 0 \\ 10,32 & 66,90 & 14,10 \\ 0 & 14,10 & 66,90 \end{bmatrix} \text{ t/g}$$

dove il primo termine è il contributo degli impalcati ed il secondo quello delle pile.

Per quanto riguarda la rigidità trasversale delle pile, ipotizzando il traversone infinitamente rigido a flessione, si ha:

$$k_1 = 2 \times \frac{12 \times EI}{9,00^3} = 47473 \text{ t/m}$$

$$k_2 \text{ e } k_3 = 2 \times \frac{12 \times EI}{14,00^3} = 12612 \text{ t/m}$$

La matrice delle rigidità è dunque:

$$[C] = \begin{bmatrix} 47473 & 0 & 0 \\ 0 & 12612 & 0 \\ 0 & 0 & 12612 \end{bmatrix} \text{ t/m}$$

Le frequenze ed i modi di vibrazione corrispondenti si ottengono dalla soluzione del sistema omogeneo:

$$(-\omega^2[A] + [C])\{\psi\} = \{0\}$$

Considerando approssimativamente le equazioni disaccoppiate si ottiene:

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{66,90}{12612}} = 0,457 \text{ sec}$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{56,90}{47473}} = 0,217 \text{ sec}$$

In realtà i termini di accoppiamento non sono trascurabili, sicché risolvendo il problema di autovalori si ottiene:

$$\omega_1 = 12,4616 \text{ rad/sec} \quad ; \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,5042 \text{ sec}$$

$$\omega_2 = 15,4020 \text{ rad/sec} \quad ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,4079 \text{ sec}$$

$$\omega_3 = 29,6750 \text{ rad/sec} \quad ; \quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0,2117 \text{ sec}$$

I primi due periodi danno luogo ad un intervallo nel quale è compreso il periodo calcolato per le due pile alte nell'ipotesi di disaccoppiamento: il terzo periodo risulta sensibilmente eguale a quello calcolato per la pila bassa, con la stessa ipotesi.

I modi di vibrazione sono riportati nella figura 38, dalla quale si evince che in sostanza la pila bassa è praticamente disaccoppiata dalle altre due, che sono invece accoppiate fra loro in maniera sensibile. I vettori sono:

$$\{\psi^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0,0413 \\ 1,0000 \\ 0,9849 \end{Bmatrix} \quad \{\psi^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0,0698 \\ 0,9741 \\ -1,0000 \end{Bmatrix} \quad \{\psi^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -1,0000 \\ 0,2112 \\ -0,0559 \end{Bmatrix}$$

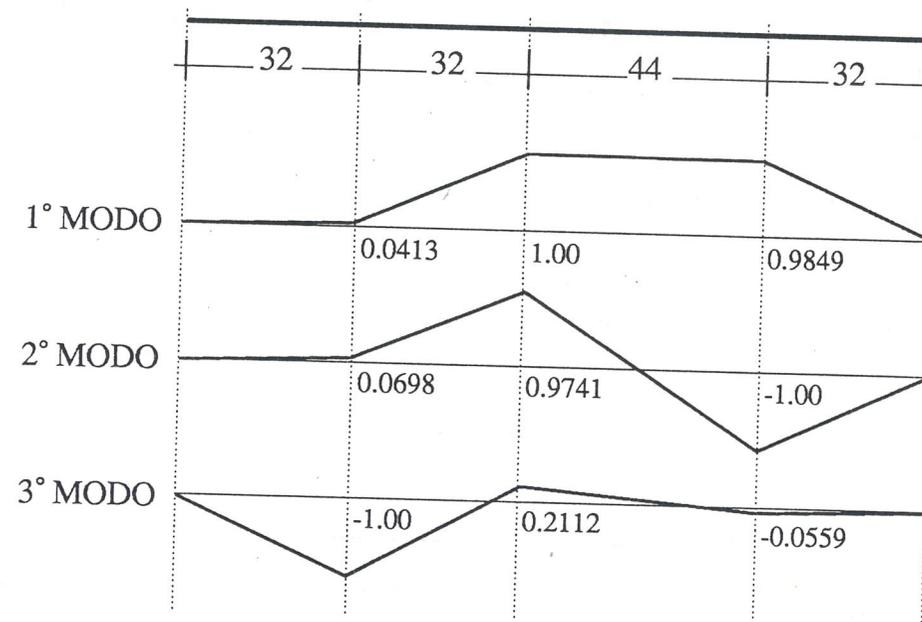
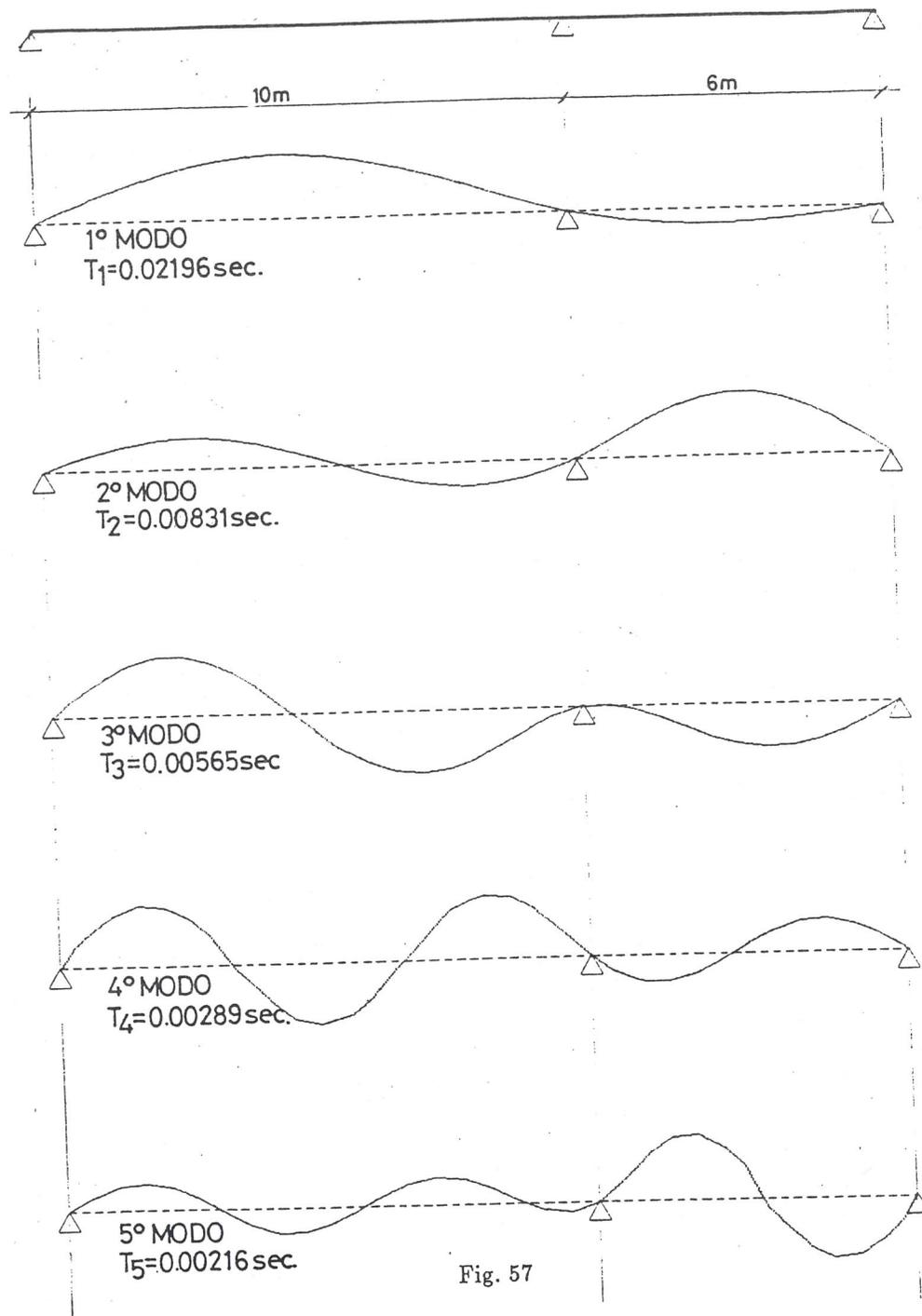


Fig. 38

11. Oscillazioni libere in presenza di smorzamento: smorzamento proporzionale

Nella realtà le oscillazioni libere delle strutture risultano sempre smorzate perché le ampiezze degli spostamenti vanno riducendosi progressivamente a causa delle dissipazioni di energia che si verificano durante il moto.



Esercizio N.7

Si consideri il serbatoio sopraelevato riportato schematicamente in figura 58 a). La vasca, a pieno carico, pesa 800 t, mentre il fusto, con sezione circolare cava ϕ 3000 mm, pesa 200 t. Per quanto riguarda la fondazione, essa è costituita da una piastra circolare nervata del peso di 500 t. ⁽⁹⁾ Sotto ipotesi semplificate, considerando fissa la massa dell'acqua e riportando la massa del fusto nei due nodi di estremità, si ottiene il modello di figura 58 b), dove le molle di base simulano la deformabilità del terreno. I gradi di libertà sono pari a 4.

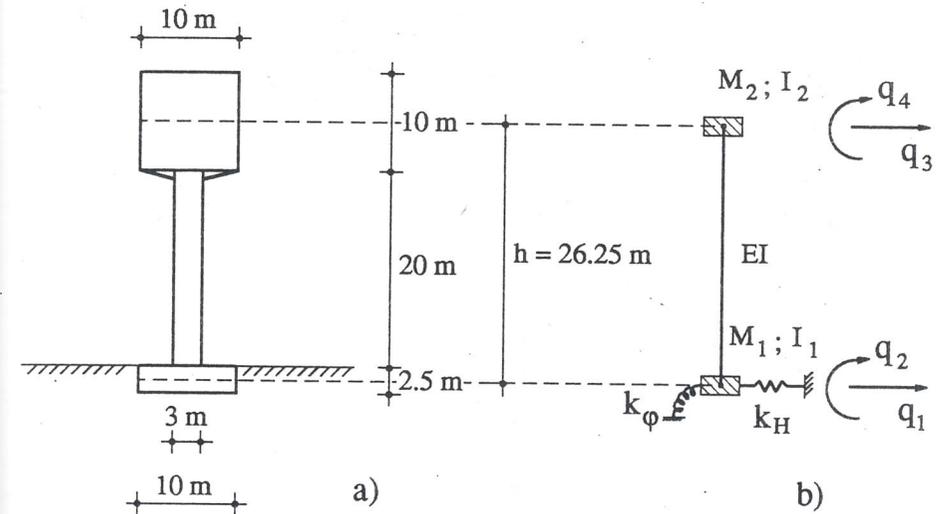


Fig. 58

Ordinato il vettore delle incognite $\{q\}$, come indicato nella figura 58 b), la matrice delle masse vale:

$$[A] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ 0 & I_1 & & \\ 0 & 0 & M_2 & \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

mentre quella delle rigidezze è:

$$[C] = [C]_s + [C]_t$$

⁽⁹⁾ I dati riportati non corrispondono ad una struttura reale.

essendo:

$$[C]_s = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{h^3} & & & \text{simmm.} \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} & & \\ -\frac{12EI}{h^3} & -\frac{6EI}{h^2} & \frac{12EI}{h^3} & \\ \frac{6EI}{h^2} & \frac{2EI}{h} & -\frac{6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h} \end{bmatrix}$$

$$[C]_t = \begin{bmatrix} K_H & & & \text{simmm.} \\ 0 & K_\varphi & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima matrice tiene conto della rigidità del fusto, mentre la seconda della rigidità del terreno.

Con i dati riportati in precedenza si ha:

$$M_1 = \frac{500 + 200/2}{9,81} = 60 \text{ t sec}^2 \text{ m}^{-1}$$

$$M_2 = \frac{800 + 200/2}{9,81} = 90 \text{ t sec}^2 \text{ m}^{-1}$$

$$I_1 = \frac{500}{9,81} \times 6,77^{(10)} = 338,5 \text{ t sec}^2 \text{ m}$$

$$I_2 = \frac{800}{9,81} \times 14,58 = 1166,4 \text{ t sec}^2 \text{ m}$$

$$EI = 2.500.000 \times 3,20 = 8.000.000 \text{ tm}^2$$

⁽¹⁰⁾ Il quadrato del raggio di inerzia polare della piastra circolare di fondazione è pari a 6,77 m².

Mentre per quanto riguarda le molle che simulano la cedevolezza della fondazione si assume:

$$K_H = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu} = 53.300 \text{ t/m}$$

$$K_\varphi = \frac{8GR^2}{3(1-\nu)} = 1.333.000 \text{ tm}$$

avendo posto per il terreno:

$$G = 2000 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0,5$$

Le matrici delle masse e delle rigidità sono pertanto:

$$[A] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 338,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1166,4 \end{bmatrix} \text{ [t, m, sec]}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 58607 & 69659 & -5307,41 & 69659 \\ 69659 & 2.552.047 & -69659 & 609523 \\ -5307,41 & -69659 & 5307,41 & -69659 \\ 69659 & 609523 & -69659 & 1.219.047 \end{bmatrix} \text{ [t, m]}$$

Le quattro frequenze ed i periodi corrispondenti del sistema sono riportate nella tabella che segue.

Modo	ω (rad/sec)	T (sec)
1	2,889704	2,174335
2	27,201467	0,230987
3	33,560438	0,187220
4	88,00965	0,071392

Si osserva che i periodi di vibrazione, rispetto a quelli riportati all'esercizio 2 del capitolo V, dove si è tenuto conto esattamente della massa diffusa del fusto, risultano approssimati in maniera casuale per eccesso o per difetto.