

rente della superficie (fig. 29).

Ogni altro *parallelo* è rappresentato in prima proiezione, come l'equatore e la gola, da un cerchio di centro S_a' e di raggio uguale a quello del parallelo obiettivo; la seconda proiezione del parallelo è un segmento di retta orizzontale di lunghezza uguale al suo diametro e avente il punto medio sulla retta a'' .

Fig. 29

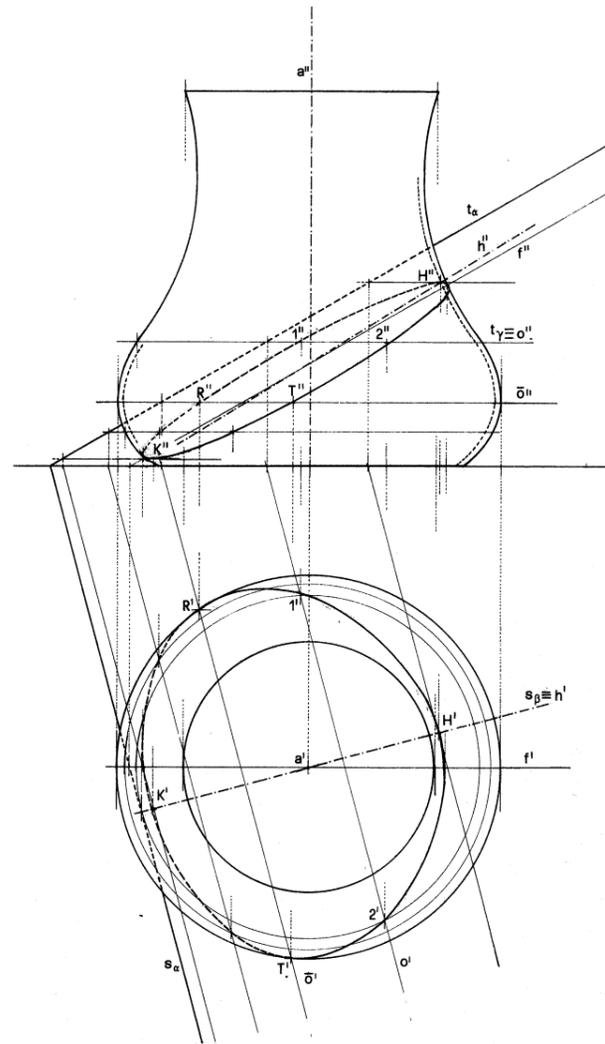
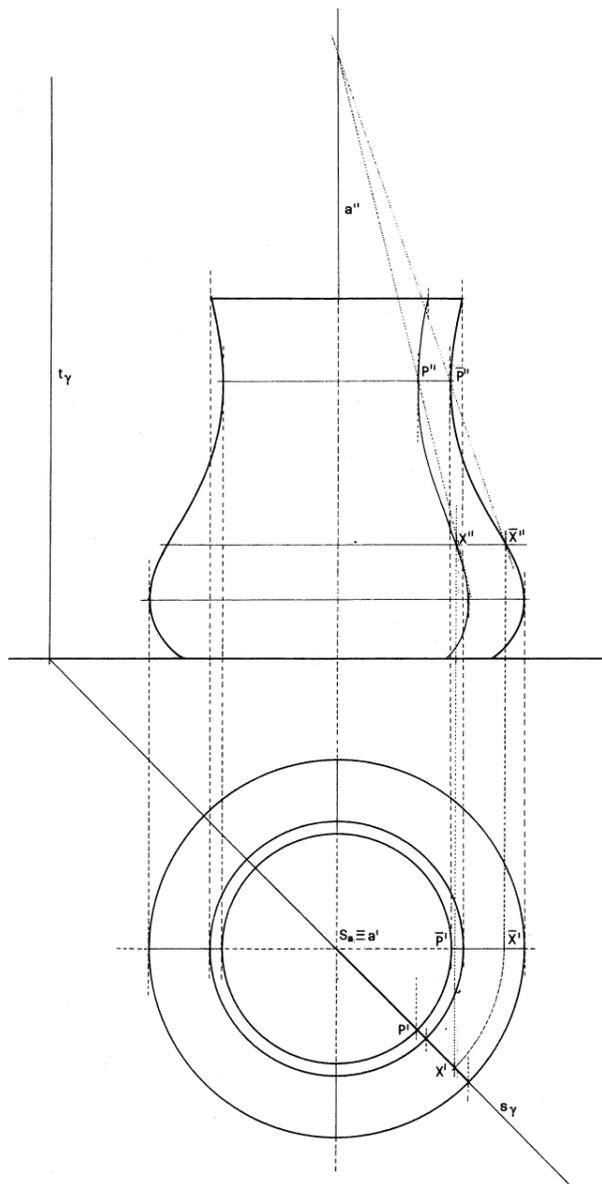


Fig. 30

Un generico *meridiano* è rappresentato in prima proiezione da un diametro o da due segmenti di diametro (cfr. Parte IV. 2.3.4.) del cerchio-equatore; in seconda proiezione un meridiano passante per un punto della superficie può costruirsi come omologo del meridiano principale in un'*affinità omologica ortogonale* avente per asse la retta a'' : infatti tali meridiani (come due qualunque altri meridiani) si possono considerare nello spazio l'uno la proiezione dell'altro secondo la direzione ortogonale al piano bisettore del diedro dei rispettivi piani, la cui retta comune è appunto l'asse a (oppure ciò che è lo stesso l'uno il ribaltato dell'altro nel ribaltamento del pri-

mo dei rispettivi piani meridiani sul secondo); allora il meridiano passante per un punto $P(P'', P')$ della superficie si costruisce per punti mediante la suddetta omologia, in cui sono punti corrispondenti \bar{P} (appartenente al meridiano principale e allo stesso parallelo cui appartiene P) e P'' , nella figura 29 è evidenziata la costruzione del punto X'' , come omologo di un punto \bar{X}'' del primo meridiano. Si noti che ciascun punto, esclusi quelli del meridiano principale, rappresenta in seconda proiezione due punti distinti della superficie, precisamente quelli che appartengono a uno stesso parallelo e le cui prime proiezioni stanno su un'unica retta di richiamo.

3. Ogni *sezione* della superficie con un piano generico α è una linea curva, che si determina costruendone (coppie di) punti ottenibili secondo con una serie di piani orizzontali la superficie stessa e il piano α ; ognuno di tali piani, ad esempio γ , seca la superficie secondo un parallelo e il piano α secondo una retta o , evidentemente orizzontale: i punti 1, 2 comuni al cerchio e alla retta appartengono alla curva-sezione cercata (fig. 30).

Per la determinazione di punti particolari della curva-sezione, come gli eventuali *punti più alto e più basso*, e quelli di *contatto con il primo e con il secondo contorno apparente*, si ricorre a procedimenti diversi. I punti del primo tipo sono quelli in cui la curva ammette come tangenti rette orizzontali: costruita la retta $h(h'', h')$ di massima pendenza di α , come intersezione dello stesso piano α con il piano meridiano β perpendicolare ad α : i punti più alto e più basso, rispettivamente $H(H'', H')$ e $K(K'', K')$, sono quelli comuni alla retta h e al meridiano della superficie contenuto in β ; per costruire questo meridiano se ne determini un punto $P(P'', P')$ come intersezione della retta che β ha in comune ad esempio con l'equatore e si trasformino alcuni punti del meridiano principale mediante la suddetta affinità di punti corrispondenti \bar{P}'', P'' . I punti di contatto con il secondo contorno sono quelli in cui la seconda proiezione f'' della retta di fronte f , intersezione del piano α con il piano meridiano principale, incontra quel contorno; i punti di contatto R', T' con il primo contorno, sono quelli comuni alla prima proiezione \bar{o}' della retta orizzontale \bar{o} - intersezione di α con il piano equatoriale - e al cerchio-equatore.

Un piano α tangente in un punto $P(P'', P')$ della superficie è determinato dalle due rette $o(o'', o')$ e $t(t'', t')$, tangenti rispettivamente al parallelo e al meridiano passanti per P : la tangente o è evidentemente una retta orizzontale la cui prima proiezione o' passa

per P' (fig. 31); la seconda proiezione t'' di t si costruisce come trasformata della retta \bar{t} , tangente al meridiano principale in \bar{P}'' (punto omologo di P'' nell'affinità tra le seconde immagini di questo meridiano e di quello per P) mentre la prima proiezione t' coincide con il raggio passante per P' : le tracce del piano α sono quelle che congiungono le tracce omonime delle rette o e t .

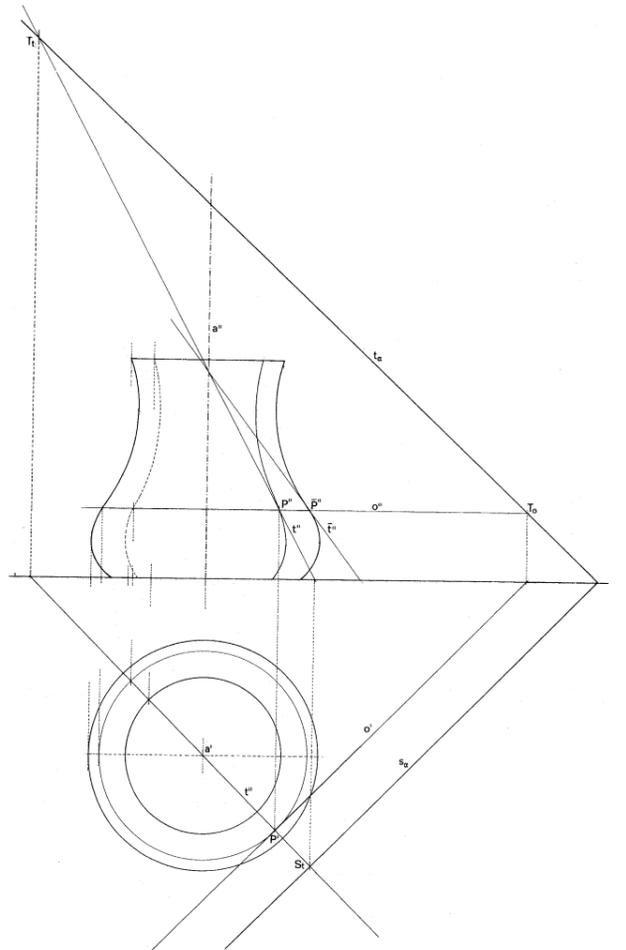


Fig. 31

4. *Superfici di rotazione a profilo non continuo*. In architettura abbiamo un esempio di superfici di questo tipo nella *base di una colonna*. La rappresentazione assonometrica come quella prospettica si possono costruire, determinando in entrambi i casi un

certo numero di meridiani, raccordandoli poi mediante le curve involuppo.

Nel caso dell'*assonometria cavaliere*, data la rappresentazione mongiana della parte di colonna interessata (fig. 32), si proceda come di consueto alla trasformazione della pianta mongiana nella corrispondente prima proiezione assonometrica; trasformato poi mediante traslazione il meridiano principale (della seconda proiezione mongiana) nel relativo meridiano assonometrico, si costruiscano altrettanti meridiani come corrispondenti ciascuno del precedente, a partire da quello principale, nelle diverse *affinità omologiche*, generalmente oblique, aventi per asse l'immagine a' dell'asse della colonna e per centro di

volta in volta la direzione \bar{S}_∞ della retta che congiunge due punti corrispondenti dell'ellisse, immagine di uno stesso parallelo: queste affinità costituiscono l'equivalente delle affinità ortogonali tra le seconde proiezioni mongiane degli stessi meridiani, tuttavia variando qui di volta in volta la direzione del centro; disegnate le immagini di alcuni meridiani più esterni, se ne traccino infine le curve-involuppo.

Per la *rappresentazione prospettica*, costruite le ellissi che costituiscono la proiezione geometricale della colonna, i diversi meridiani si rappresentano ricordando che in questo caso le relazioni tra le coppie di immagini dei meridiani stessi sono *omologie a centro proprio*, centro che coincide di volta in volta

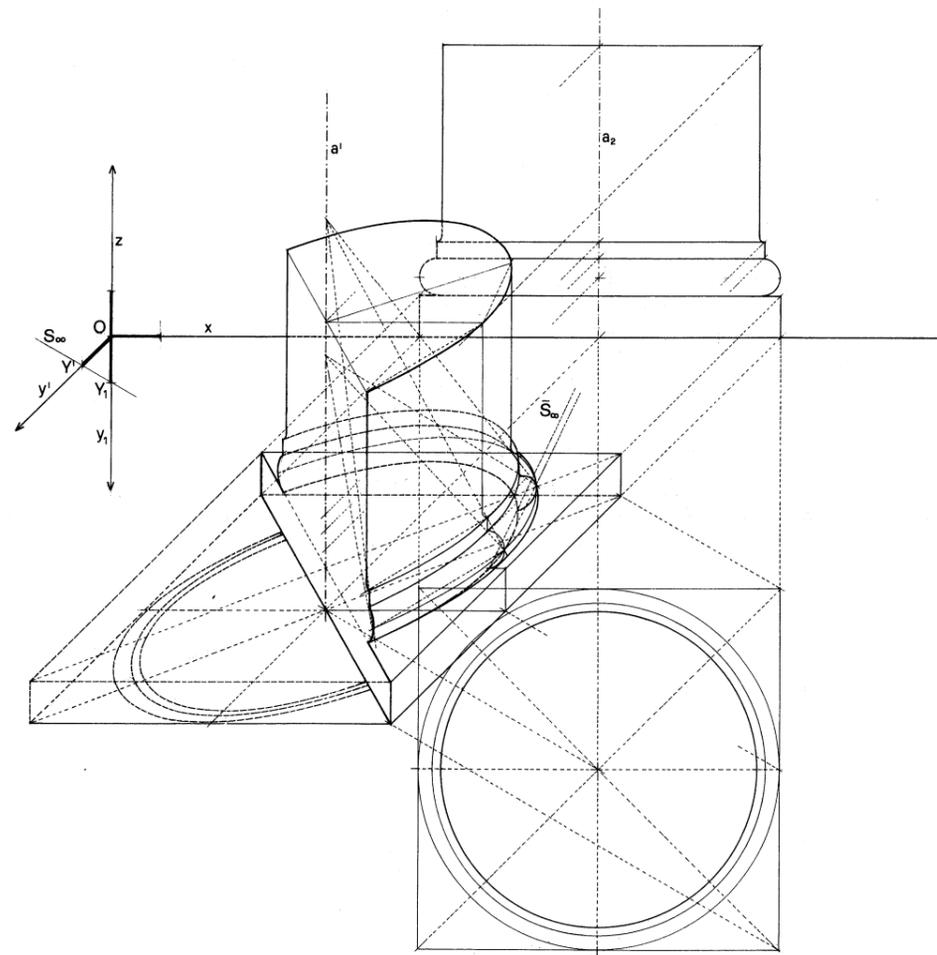


Fig. 32

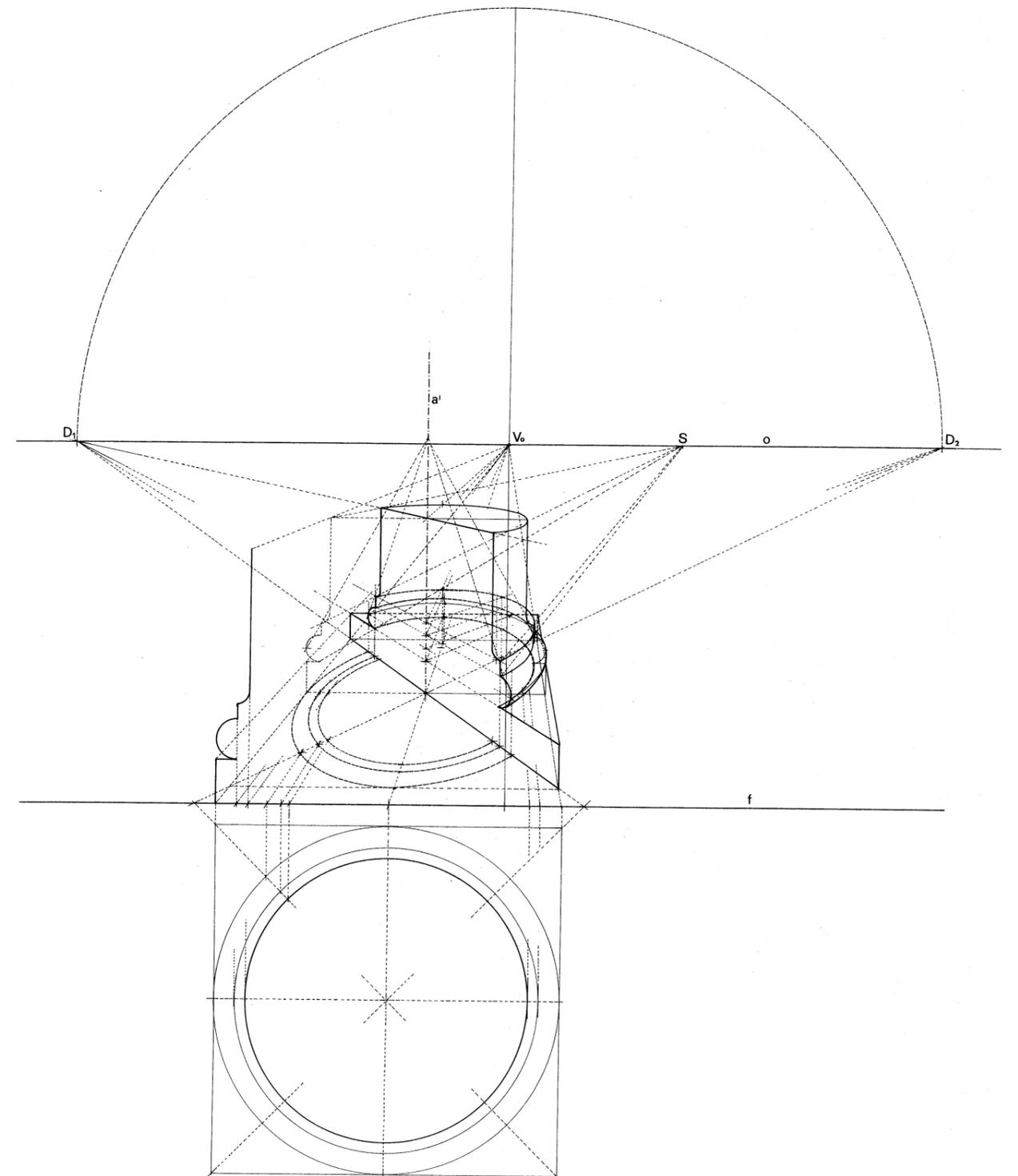


Fig. 33

con il punto di fuga delle rette orizzontali passanti per le coppie di punti corrispondenti dello stesso parallelo, come ad esempio il punto S , che coincide con la fuga della retta che congiunge una coppia di punti corrispondenti (fig. 33); si proceda infine con il tracciamento della linea-inviluppo.

3.3 Le superfici quadriche

1. *Definizioni e proprietà.* Si definiscono *superfici quadriche* o semplicemente *quadriche* le superfici algebriche del *secondo ordine*, cosiddette perché rappresentate analiticamente da equazioni di secondo grado (in tre variabili): tale condizione si traduce nella proprietà geometrica dell'avere tali superfici in comune con una generica retta due punti, condizione e proprietà che accomunano le quadriche alle coniche (cfr. 2.2.2.); e come per le coniche, se quei due punti sono reali e distinti, la retta è secante; se reali e coincidenti, è tangente; se complessi coniugati, esterna. Di queste proprietà godono anche i *coni* e i *cilindri quadrici* (o *quadriche specializzate*), quei coni e cilindri che hanno come direttrice una conica o in particolare un cerchio.

Le *quadriche non specializzate* denunciano anche figurativamente rilevanti analogie con le coniche, derivandone le rispettive denominazioni, secondo una prima classificazione, di *ellissoide*, *paraboloide*, *iperboloide*.

Ancora un importante aspetto consente di considerare le quadriche come l'equivalente nello spazio delle coniche (cfr. 2.2.3.), precisamente la definizione proiettiva, di cui diremo, secondo la quale *una quadrica è l'insieme dei punti autoconiugati in una polarità nello spazio*.

Le analogie con le coniche appaiono evidenti se consideriamo un particolare tipo di quadriche, le *quadriche di rotazione*, generate appunto dalla rotazione di una conica intorno a uno dei propri assi; più precisamente la conica costituisce un intero meridiano della superficie, mentre funge da curva generatrice una sola delle due metà della conica stessa, sezionata lungo un asse. Secondo che la conica di origine sia un'ellisse, un'iperbole o una parabola, la quadrica risulta nell'ordine un *ellissoide*, un *iperboloide*, un *paraboloide*.

E ancora, nel caso dell'*ellisse*, secondo che l'asse della rotazione coincida con l'asse minore o con l'asse maggiore, viene generata una delle due famiglie di *ellissoidi*, che differiscono tuttavia solo per la giacitura delle sezioni circolari, essendo tali sezioni normali all'asse minore negli ellissoidi del primo tipo,

all'asse maggiore in quelli del secondo: tali superfici vengono denominate rispettivamente *ellissoide schiacciato* ed *ellissoide allungato* (figg. 34 a, b). Se la quadrica è generata dalla rotazione di una *circonferenza* (che è una particolare *ellisse*), tutte le sezioni piane sono circolari e dunque questo ellissoide è una *sfera*.

La rotazione di un'*iperbole* invece può generare due superfici assai diverse, secondo che l'asse della rotazione coincida con l'asse trasverso o con quello non trasverso: la quadrica assume nell'ordine la denominazione di *iperboloide ellittico* o *a due falde*, e di *iperboloide iperbolico* o *a una falda* o *rigato*; nel primo caso le sezioni circolari sono quelle dei piani normali all'asse trasverso, nel secondo all'asse non trasverso (figg. 35a, b): in entrambi i casi si tratta di superfici infinitamente estese in due versi opposti

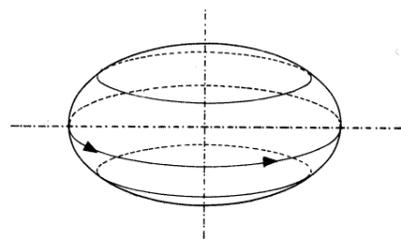


Fig. 34a

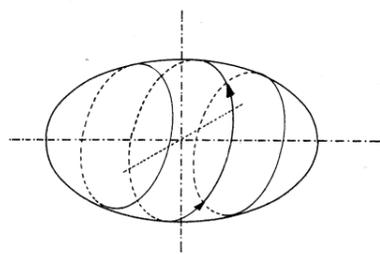


Fig. 34b

dello spazio. Nell'*iperboloide iperbolico* di rotazione esiste una sezione circolare minima, la *linea di gola*; inoltre la rotazione simultanea degli asintoti dell'*iperbole* di origine genera il *cono asintotico*, che risulta esterno alla superficie nel caso dell'*iperboloide ellittico*, interno in quello *iperbolico*.

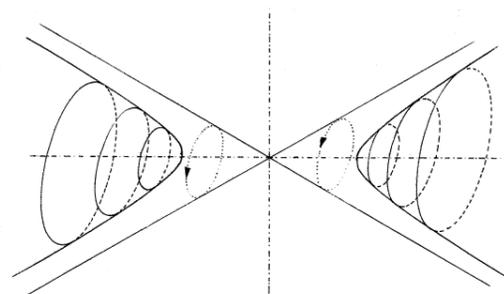


Fig. 35a

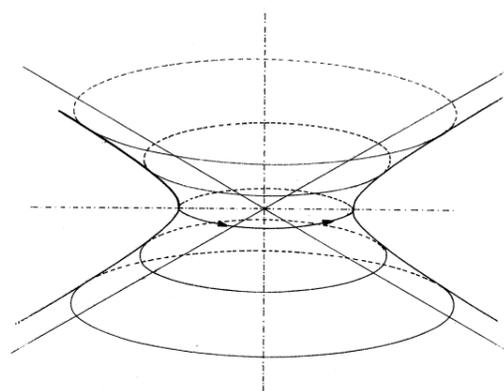


Fig. 35b

La superficie generata dalla rotazione di una *parabola* intorno al proprio asse è detta *paraboloide ellittico* e le sezioni circolari sono evidentemente quelle dei piani normali all'asse stesso (fig. 36).

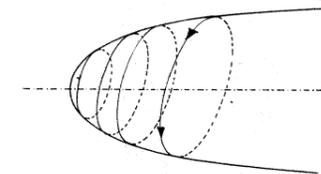


Fig. 36

Ma esiste ancora un paraboloide che non può ottenersi per rotazione della parabola, precisamente il *paraboloide iperbolico*: è possibile supporre che questa superficie sia generata dal moto di una parabola che si sposti parallelamente al proprio piano mentre il suo vertice scorre lungo un'altra parabola appartenente a un piano diverso (fig. 37). In entrambi i casi si tratta di superfici infinitamente estese in un solo verso dello spazio.

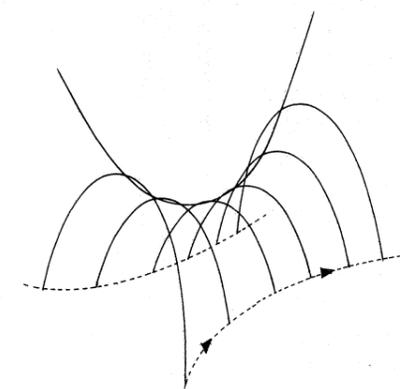


Fig. 37

Una seconda classificazione distingue dunque ancora le quadriche in due famiglie: quella delle quadriche la cui superficie è ovunque concava e caratterizzata dalla presenza di rette, dette appunto *rigate*, e quella della superficie la cui superficie è ovunque convessa, ed evidentemente priva di rette, dette *non rigate*; come vedremo, le due famiglie di quadri-

che sono anche dette rispettivamente a punti iperbolici e a punti ellittici.

Le prime possono essere generate secondo le leggi di tutte le superfici rigate (cfr. 3.4.3.), ma anche mediante un processo più generale comune anche alle quadriche non rigate, vale a dire dal moto di una conica variabile lungo un'altra conica (come abbiamo visto generarsi il *paraboloide iperbolico*): data allora una conica fissa, la conica variabile deve avere due punti in comune con essa, mantenendo il proprio piano parallelo a se stesso mentre il centro si sposta lungo quel diametro della conica fissa che è coniugato alla direzione delle corde determinate in essa dal piano mobile: l'*iperboloide* (sia *iperbolico* che *ellittico*) può essere generato da una ellisse fissa e un'iperbole mobile, o viceversa; il *paraboloide iperbolico* da una parabola fissa e una iperbole mobile o viceversa, oppure, come abbiamo visto, da una parabola fissa e una mobile: i due punti comuni sono in questo caso il vertice di quella mobile e il punto improprio di entrambe; il *paraboloide ellittico*, da una parabola e una ellisse; l'*ellissoide* infine, da due ellissi. Se l'ellisse mobile è un cerchio variabile, il cui centro si sposta lungo un asse dell'altra conica mantenendo il proprio piano perpendicolare a quell'asse, si tratta di un ellissoide di rotazione (cfr. 3.3.1.).

2. *Polarità rispetto a una quadrica.* Come una polarità piana (non uniforme) pone in corrispondenza biunivoca punti e rette – enti duali nel piano – rispetto a una conica (cfr. 2.2.3.), che viene definita "conica fondamentale della polarità" essendone il luogo dei punti autoconiugati, è possibile stabilire una relazione analoga nello spazio, vale a dire la *polarità rispetto a una quadrica*: in questa relazione si corrispondono punti e piani – enti duali nello spazio (S.- V., pp. 70-71) –, ciascuna coppia P, π definendosi come polo P del piano π , e inversamente piano polare π del punto P .

Se il punto P è esterno alla quadrica, il piano polare π interseca la superficie secondo una curva, che in quanto sezione piana di una quadrica è una conica⁵. Tale conica, in analogia con la costruzione della retta polare di un punto in una polarità piana (cfr. 2.2.3.), si può costruire come luogo dei punti di contatto delle tangenti alla superficie condotte da P , mentre l'insieme di queste tangenti individua il cono di vertice P circoscritto alla quadrica (fig. 38).

Se il polo è un punto improprio P_∞ , il cono circoscritto di vertice P_∞ diviene un cilindro, e il piano polare, che contiene la conica dei punti di contatto, passa per il centro della quadrica, e pertanto è detto piano

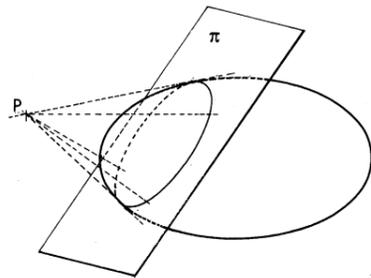


Fig. 38

diametrale; possiamo dunque dire che i piani diametrali di una quadrica sono i piani polari dei punti impropri. (fig. 39)

Se il punto P appartiene alla quadrica, il piano polare π passa per il proprio polo P ed è tangente alla quadrica in P : punto e piano diconsi *autoconiugati*. Si hanno dunque, in analogia con le coniche, le definizioni proiettive, tra loro duali: una quadrica è il luogo dei punti dello spazio autoconiugati in una polarità non uniforme; una quadrica è l'inviluppo dei piani autoconiugati in una polarità non uniforme.

Se infine il punto P è interno alla quadrica, il piano polare è esterno e può essere determinato dai poli di tre piani passanti per P ; e se in particolare tale punto è il centro C della quadrica i tre piani passanti per C hanno come poli tre punti impropri, dunque il piano polare di C , individuato da quei tre punti impropri, è il piano improprio π_∞ ; possiamo quindi affermare che il centro C di una quadrica è il polo del

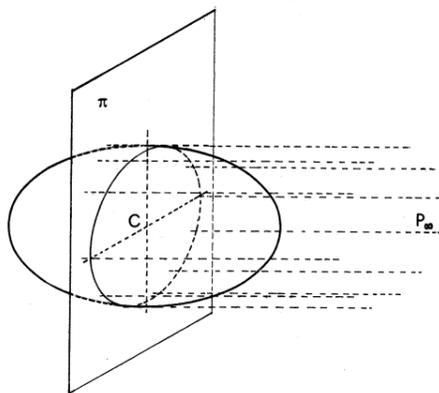


Fig. 39

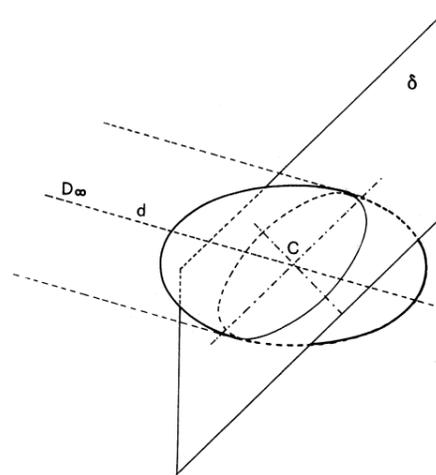


Fig. 40

piano improprio. Le rette passanti per C sono i diametri della quadrica: un diametro d dicesi coniugato di un piano diametrale δ quando passa per il (ha cioè la direzione del) polo D_∞ di quel piano (fig. 40); sono detti *assi di una quadrica* i diametri ortogonali ai relativi piani diametrali coniugati (fig. 40). Sono detti ancora *piani diametrali principali* o *piani assiali* i piani ortogonali ciascuno alla propria direzione coniugata: nelle quadriche a centro – ellipsoidi e iperboloidi – esistono tre piani assiali e tre assi, questi ultimi coincidendo due a due con gli assi di quelle coniche secondo cui i piani assiali secano la quadrica (fig. 41).

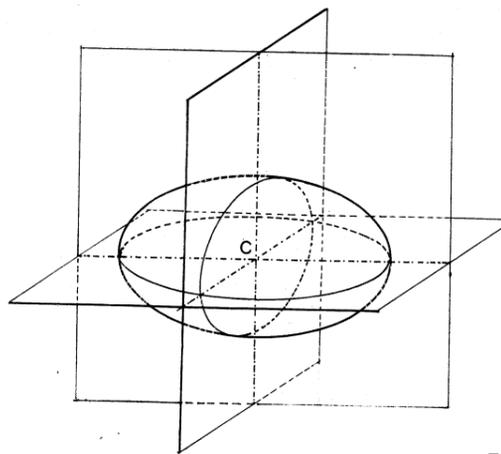


Fig. 41

Nei *paraboloidi* il polo del piano improprio è un punto C_∞ autoconiugato, appartenente cioè al proprio piano polare π_∞ , piano che infatti è tangente alla quadrica in C_∞ (cfr. 3.3.4.); tale punto, evidentemente improprio, conserva, come nella parabola, il nome di "centro" pur non essendo un punto di simmetria per il paraboloide. Tutti i diametri, passanti per C_∞ , sono dunque paralleli, ma uno solo è asse, quello ortogonale al piano γ tangente alla quadrica nel vertice; i piani assiali sono due, entrambi ortogonali al piano γ ; mentre i piani paralleli a γ intersecano il paraboloide secondo coniche i cui assi sono le intersezioni di quei piani con i due piani assiali (fig. 42).

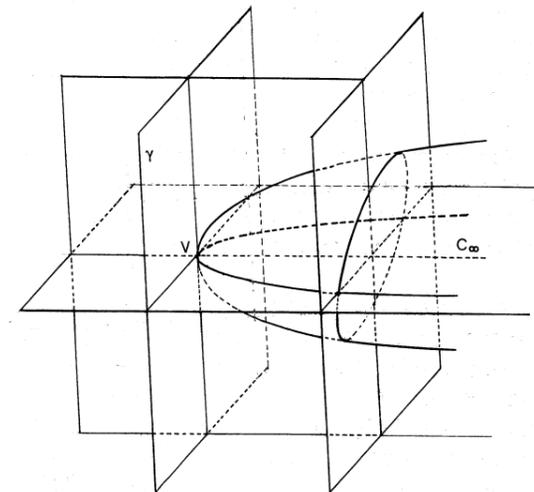


Fig. 42

3. *Punti delle quadriche.* Dalle denominazioni loro assegnate si evince, come accennato, l'esistenza di una classificazione delle quadriche secondo la natura dei punti e del loro intorno, e dunque al tipo di curvatura delle superfici stesse.

Ricordando che un piano e una quadrica hanno in comune una conica, nell'intersezione di un piano e una quadrica possono darsi tre casi: la conica sezione è *reale e irriducibile* (cioè non degenera), allora il piano è *secante*; la conica è *degenera*, cioè si spezza in due rette, e il piano è *tangente*; la conica è totalmente *immaginaria* e il piano è *esterno* alla quadrica.

Consideriamo ora un piano tangente la quadrica: può verificarsi che la curvatura della superficie sia ovunque positiva e dunque che la superficie stessa (convessa) resti interamente in uno dei semispazi definiti dal piano; oppure che la curvatura sia negativa, e allora la superficie (concava) è attraversata dal piano tangente. Nel primo caso le due rette (immaginarie) che il piano tangente ha in comune con la quadrica sono complesse coniugate e pertanto è reale il solo punto comune che costituisce il punto di contatto del piano con la superficie: la quadrica è detta *a punti ellittici*, sulla sua superficie non esistono rette reali e dunque non può trattarsi di una quadrica rigata. Sono quadriche a punti ellittici l'*ellissoide*, l'*iperboloide ellittico* (o *a due falde*) e il *paraboloide ellittico* (cfr. figg. 34a, b; 35a; 36).

Nel secondo caso, quando la superficie è attraversata dal piano tangente, le due rette sono reali e distinte e il loro punto comune è quello in cui il piano tocca la superficie; la quadrica è detta *a punti iperbolici* e pertanto per ciascun punto di essa passano due rette reali e distinte appartenenti alla quadrica – dette rispettivamente *generatrice* e *direttrice* –, rette che definiscono il piano tangente in quel punto (cfr. figg. 35 b, 37); la quadrica è allora una *superficie rigata* costituita da due schiere di rette, essendo sghembe tra loro le rette di una schiera, mentre ciascuna retta è complanare con tutte quelle dell'altra schiera. Le quadriche a punti iperbolici sono l'*iperboloide iperbolico* (o *rigato* o *a una falda*) e il *paraboloide iperbolico* (o *rigato*).

Se infine le due rette che il piano tangente ha in comune con la quadrica sono reali e coincidenti, le due schiere di generatrici coincidono, ogni generatrice è complanare con ciascuna delle altre e tutte s'intersecano in un unico punto, proprio o improprio: la quadrica, detta *specializzata*, è *a punti parabolici* e si tratta di un *cono* (o un *cilindro*) *quadrico*.

4. *Classificazione affine delle quadriche*. In analogia con la classificazione di una conica rispetto alla retta impropria del suo piano (S.-V., pp. 170-171), esiste una classificazione delle quadriche rispetto al piano improprio π_∞ , essendo tale piano l'insieme di tutti i punti impropri e di tutte le rette improprie dello spazio: l'*ellissoide*, superficie chiusa al finito, ha in comune con il piano improprio una *conica totalmente immaginaria*, essendo π_∞ esterno alla quadrica; i due *iperboloidi*, superfici infinitamente estese, hanno in comune con il piano improprio π_∞ una *conica reale e irriducibile* (evidentemente impropria), essendo tale piano secante (fig. 43a); il *paraboloide am-*

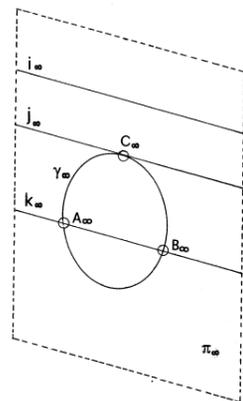


Fig. 43a

mette il piano improprio come tangente nel punto C_∞ , centro della superficie, e pertanto ha in comune con π_∞ due rette (evidentemente improprie): tali rette sono *complesse coniugate*, dunque immaginarie, nel caso del *paraboloide ellittico*, che infatti ha in π_∞ un solo punto reale, il punto improprio C_∞ dell'asse (fig. 44a); nel caso del *paraboloide iperbolico* invece, le due rette g_∞ e d_∞ che la superficie ha in comune con il piano improprio sono *reali e distinte*, e costituite ciascuna dall'insieme dei punti impropri di una delle due schiere di rette del paraboloide (fig. 45a); da ciò deriva la proprietà secondo la quale

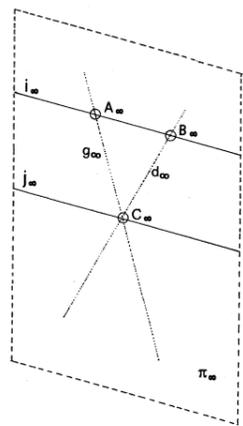


Fig. 44a

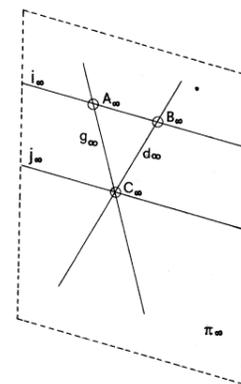


Fig. 45a

le rette di ciascuna delle due schiere, pur sghembe tra loro, sono parallele a un piano, dei quali piani essendo g_∞ e d_∞ le rette improprie ne definiscono le giaciture.

5. *Sezioni piane delle quadriche*. Osservando la conica che una quadrica ha in comune con il piano improprio, è possibile conoscere il tipo di sezioni piane esistenti sulla sua superficie. Le sezioni piane dell'*ellissoide* sono tutte e solo *ellissi*: infatti la retta impropria i_∞ di un qualunque piano α secante, retta che può essere esterna o tangente oppure secante la conica (tutta immaginaria) che l'*ellissoide* ha in comune con il piano improprio, la interseca comunque in punti (impropri) evidentemente immaginari: non avendo alcun punto reale all'infinito, tutte le sezioni piane dell'*ellissoide* sono dunque sempre e soltanto ellissi, in particolare *cerchi* (in tutte le quadriche a punti ellittici, anche non di rotazione, esistono giaciture di piani che producono sezioni circolari). Nei due *iperboloidi* sono presenti tutti i tre tipi di sezioni piane, *ellissi*, *parabole*, *iperboli*: infatti secondo che la retta impropria i_∞ (j_∞ , k_∞) di un piano α (β , γ) secante la superficie sia esterna, tangente o secante rispetto alla conica γ_∞ reale e irriducibile che la quadrica ha in comune con il piano improprio, la sezione del piano con la quadrica, avendo in π_∞ rispettivamente nessun punto (più correttamente, due punti complessi coniugati), due punti (impropri) reali e coincidenti, due punti (impropri) reali e distinti A_∞ e B_∞ in comune con γ_∞ , è nell'ordine un'*ellisse*, una *parabola*, un'*iperbole* (figg. 43a, b)

Le sezioni del *paraboloide ellittico* sono *parabole* ed *ellissi*: ricordando che tale quadrica ha nel piano improprio due rette complesse coniugate (immagina-

rie), se la retta impropria i_∞ di un piano α secante la quadrica interseca quelle due rette in punti (impropri) evidentemente immaginari, la curva sezione non ha punti reali all'infinito e dunque è un'*ellisse*; se invece la retta impropria j_∞ di un piano β passa per il punto improprio reale C_∞ , comune alla due rette complesse coniugate, quel punto appartiene alla conica sezione della quadrica con il piano β , conica che avendo un punto all'infinito è una *parabola* (figg. 44a, b).

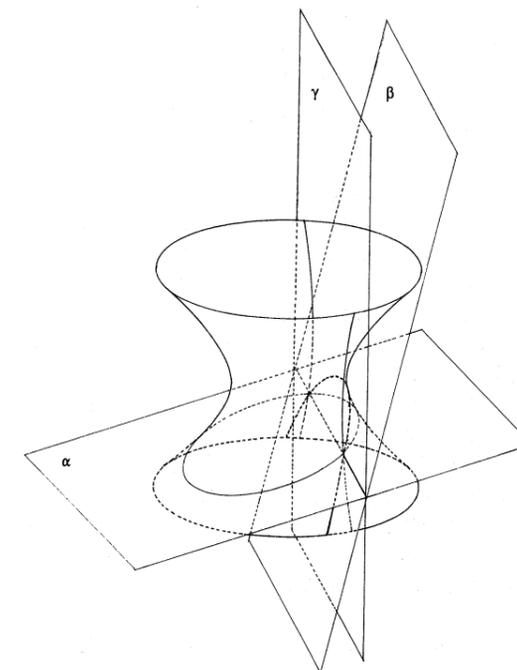


Fig. 43b

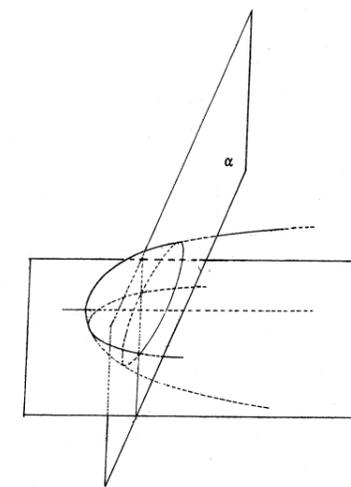


Fig. 44b

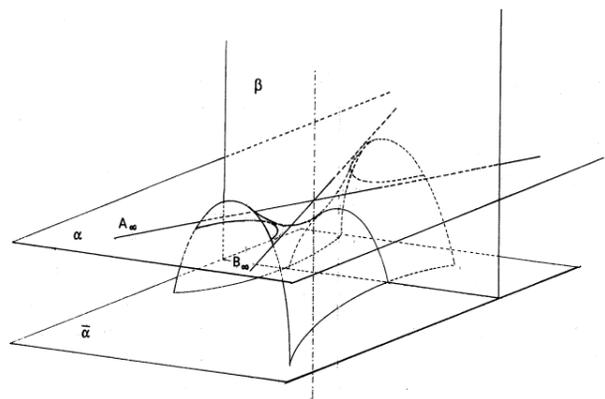


Fig. 45b

Le sezioni del *paraboloide iperbolico* sono *iperboli* e *parabole*: si ottengono le prime se la retta impropria i_∞ del piano α secca le due rette (improprie) reali e distinte, che la quadrica ha in comune con il piano improprio, in due punti reali A_∞ e B_∞ ; nel secondo caso la retta impropria j_∞ di un piano β passa per il punto C_∞ comune a quelle due rette, e la curva sezione, avendo un solo punto improprio, è una *parabola* (figg. 45a, b). Non esistendo ellissi sulla sua superficie non possono esservi neppure cerchi, e dunque, come già osservato (cfr. 3.3.1.), non può esistere un *paraboloide iperbolico di rotazione*.

6. *Quadriche specializzate: coni e cilindri*. Anche nel cono – come sappiamo – esistono i tre tipi di sezioni, poiché questa superficie come gli iperboloidi ha nel piano improprio una conica γ_∞ reale e irriducibile: infatti, ricordando che solo i piani passanti per il vertice secano il cono secondo coppie di generatrici (coniche degeneri), poiché π_∞ non passa per il vertice essendo questo un punto proprio, la conica sezione γ_∞ non è degenera: allora anche in questo caso secondo che la retta impropria del piano secante abbia in comune con γ_∞ due punti reali e distinti, reali e coincidenti, complessi coniugati (immaginari) la conica sezione con α risulta nell'ordine un'iperbole, una parabola, un'ellisse.

Nel caso del *cilindro* invece, che è un cono il cui vertice V_∞ è un punto improprio, il piano π_∞ contiene il vertice, e in quanto tale secca la superficie secondo due rette: se tali rette (improprie) sono complesse coniugate, può accadere che la retta j_∞ del piano β passi per il punto improprio reale V_∞ comune a quelle

due rette, e allora la sezione di α con il cilindro è costituita da *due generatrici* (che essendo parallele s'incontrano in quel punto improprio); se invece la retta i_∞ di un piano α interseca le due rette immaginarie, evidentemente in punti immaginari, la sezione, non avendo alcun punto improprio reale, è una *ellisse*: la superficie è dunque un *cilindro a direttrice ellittica* e tutte le sezioni piane sono costituite da coppie di generatrici oppure da *ellissi* (eventualmente *cerchi*) (fig. 46). Se il cilindro ha nel piano improprio due rette reali e distinte, secondo che la retta i_∞ di un piano α sechi quelle rette in due punti distinti A_∞ , B_∞ , oppure che la retta j_∞ di un piano β passi per il loro punto comune V_∞ , la sezione del piano con π_∞ è costituita rispettivamente da un'iperbole, i cui punti impropri sono appunto A_∞ e B_∞ , oppure da *due generatrici*: in questo caso il cilindro è a *direttrice iperbolica* e tutte le sezioni piane sono coppie di generatrici o *iperboli* (fig. 47). Se infine il cilindro ha

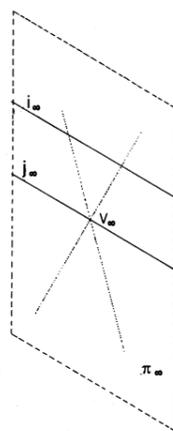


Fig. 46

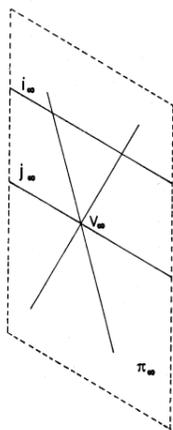


Fig. 47

nel piano improprio due rette reali e coincidenti, avendo la retta i_∞ di qualunque piano secante in comune con quelle due rette coincidenti un solo punto (improprio), la sezione è costituita da *due generatrici* se quel punto è V_∞ , negli altri casi da una *parabola*: il cilindro è a *direttrice parabolica*, tutte le sezioni piane sono coppie di generatrici oppure *parabole* (fig. 48).

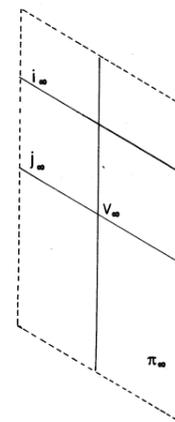


Fig. 48

7. *Rappresentazione di una quadrica*. Per quanto riguarda le *quadriche rigate*, dette anche a *punti iperbolici*, ricordando che un *piano tangente* secca la superficie secondo una conica degenera, cioè secondo due rette – rispettivamente *generatrice* e *direttrice* –, che hanno in comune il punto di contatto del piano con la quadrica; e ricordando ancora che le rette di ciascuna schiera sono sghembe tra loro mentre ogni retta di una schiera interseca tutte le rette dell'altra schiera, si possono costruire le immagini della quadrica mediante quante si voglia generatrici e/o direttrici. Osserviamo infatti che, *date tre rette di una schiera* (tre *direttrici* secondo la genesi delle superfici rigate, cfr. 3.4.3.) ogni *generatrice* si può determinare come quella retta dell'altra schiera, che passa per un punto di una delle tre direttrici e si appoggia a due rette sghembe (S.-V., pp. 139 e 244), cioè alle altre due direttrici. Scegliendo alcuni punti sulla prima direttrice e costruendo per ciascuno di essi la retta che si appoggia alle altre due direttrici, si hanno altrettante generatrici; per costruire invece ulteriori direttrici, si possono fissare tre delle generatrici trovate e, invertendo i ruoli, ripetere le operazioni. È questo un procedimento per la costru-

zione nel metodo di Monge di un *iperboloide iperbolico*: la conica-traccia su π_1 si può costruire congiungendo i punti prime tracce di un certo numero di generatrici e/o direttrici.

La costruzione è notevolmente semplificata nel caso dell'*iperboloide iperbolico di rotazione*: infatti, dati in prima proiezione un cerchio, in cui coincidono due paralleli della superficie disposti simmetricamente rispetto alla linea di gola, a sua volta rappresentata in prima proiezione da un cerchio minore concentrico al primo, e fissate le seconde proiezioni dei due paralleli mediante due segmenti orizzontali, ogni coppia di rette – generatrice e direttrice – individua un piano tangente, la cui prima traccia è tangente alla prima proiezione del cerchio di gola, e corda del cerchio maggiore, e in questa traccia coincidono le prime immagini delle due rette poiché ciascuno di tali piani, che tocca l'iperboloide lungo la linea di gola, è un piano verticale, cioè perpendicolare a π_1 . La seconda proiezione di ciascuna coppia direttrice-generatrice è costituita dalle rette che congiungono le seconde proiezioni degli estremi delle corde prime proiezioni, estremi alternativamente considerati appartenenti all'uno e all'altro dei due paralleli dati. Nella figura 49 – ove è anche presente la *rappresentazione assonometrica* – ad esempio la corda $A_1B_1 \equiv C_1D_1$, prima traccia di un piano tangente α , ha come seconde proiezioni le rette A_2B_2 e C_2D_2 , il cui punto comune è la seconda proiezione T_2 del punto di contatto T del piano α con l'iperboloide, mentre la prima proiezione T_1 è il punto di contatto della traccia s_α di α con il cerchio-gola.

Un *paraboloide iperbolico* è invece determinato da un *quadrilatero sghembo*, cioè non contenuto in un piano, di cui ciascuna coppia di lati opposti siano rette della stessa schiera, dunque rispettivamente *due direttrici* e *due generatrici*: in ogni vertice concorrono così una direttrice e una generatrice, che sono infatti complanari, e inoltre le due direttrici (come le due generatrici) individuano la giacitura di un piano a cui tutte le rette della stessa schiera saranno parallele, condizione richiesta perché una quadrica rigata sia un *paraboloide* (cfr. 3.3.4.). Assegnato dunque nel *metodo di Monge* un siffatto quadrilatero e divisi due lati opposti, ad esempio d_1 e d_2 , nello stesso numero di segmenti uguali, le rette che congiungono i punti dell'uno con i corrispondenti dell'altro, sono rette dell'altra schiera, cioè generatrici; operando in modo analogo con l'altra coppia di lati opposti g_1 e g_2 si costruiscono altre rette della prima schiera, cioè direttrici. Con una particolare scelta del riferimento, in prima proiezione il quadri-

latero sghembo, mediante il quale è assegnato il paraboloide, si proietta in un quadrato (fig. 50), mentre in seconda proiezione le coppie di lati opposti sono rappresentate da due segmenti di rette obliqui ri-

spetto alla linea di terra. Costruite un certo numero di rette delle due schiere come sopra descritto, e determinati i punti prime tracce, la linea che li congiunge è un'iperbole, traccia su π_1 del paraboloide;

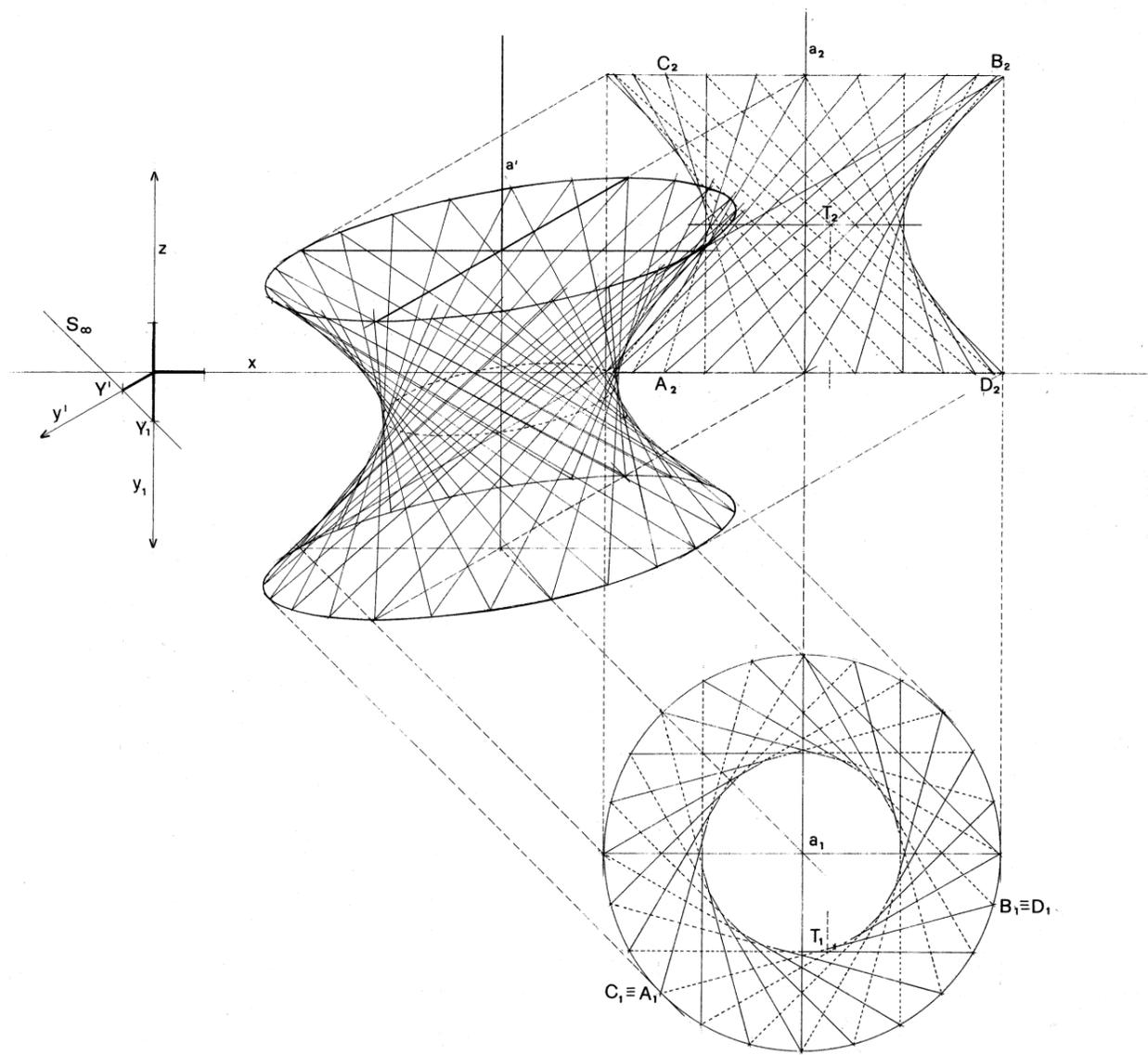


Fig. 49

la superficie infine è delimitata lateralmente dalle sezioni con due piani verticali di profilo. La stessa figura 50 comprende anche la rappresentazione in *assonometria cavaliera* che rende visibili le due parabole, sezioni con i due piani di profilo. Per rappresentare una quadrica a punti ellittici se ne possono assegnare le due coniche, sezioni diametrali rispettivamente con un piano orizzontale e un piano di fronte che abbiano in comune un diametro orizzontale (cfr. 8. seg.).

8. *Intersezione di una quadrica con un piano.* Nel caso di una *quadrica rigata*, dato un piano generico α , si possono costruire un certo numero di punti della conica sezione, determinando le intersezioni del piano α con altrettante generatrici e/o direttrici. Ricordiamo che una conica, determinata da cinque elementi (soli punti oppure punti e tangenti), richiede tuttavia, per il suo corretto tracciamento, che ne siano individuati un numero maggiore di punti, eventualmente con tangenti.

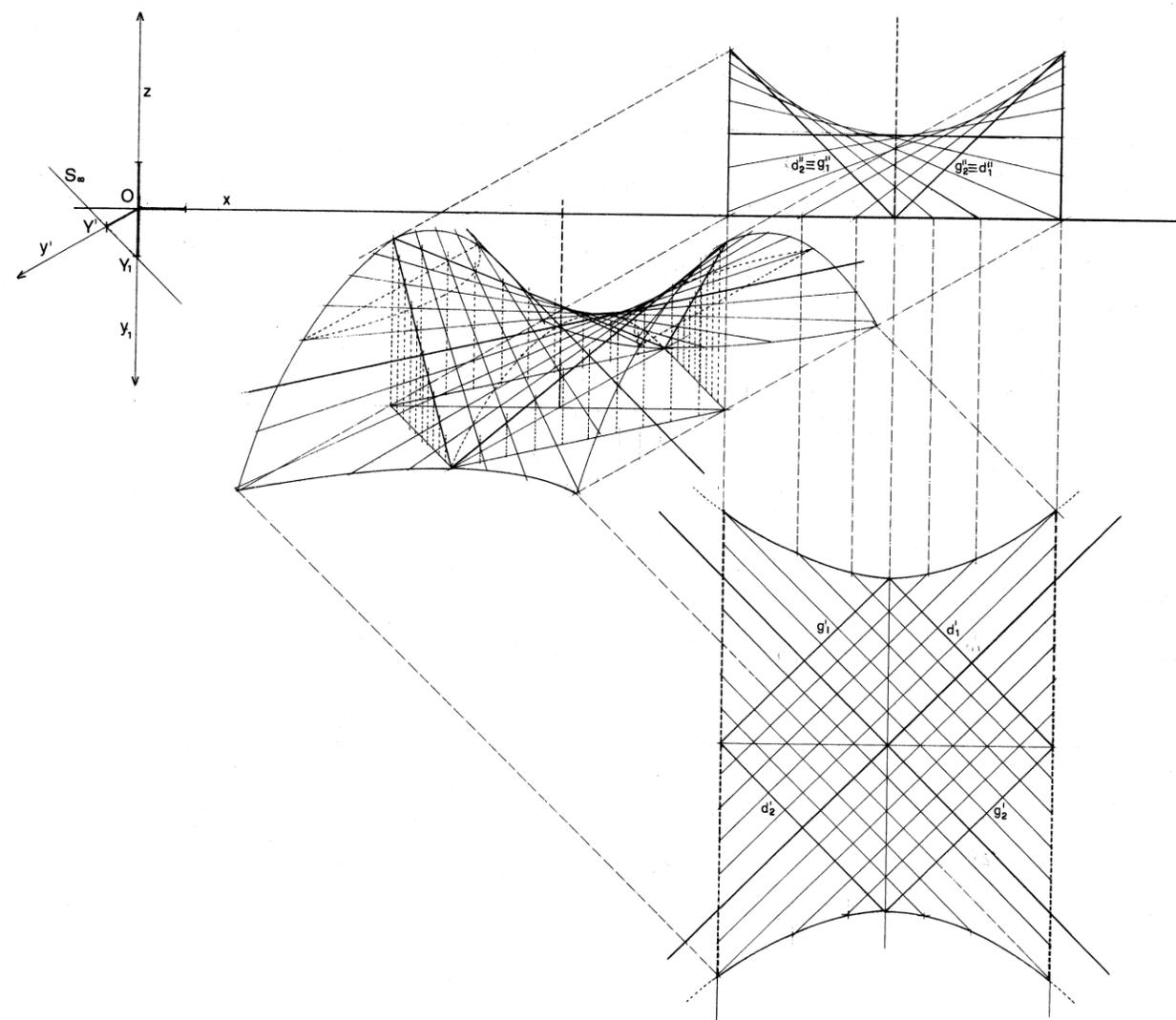


Fig. 50

Riferendoci alla genesi delle quadriche (cfr. p. 3.3.1.), un *ellissoide* può essere assegnato nel *metodo di Monge* mediante un'ellisse fissa in un piano di fronte, e un'ellisse mobile (in un piano orizzontale) avente in comune con la prima un diametro AB parallelo alla linea di terra e passante per il centro della ellisse fissa (fig. 51); i diametri coniugati ad AB siano, per le due ellissi, rispettivamente i segmenti FG e DE , dati ciascuno nelle due proiezioni.

Assegnato un piano $\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$, si può costruirne la sezione (evidentemente ellittica, essendo tali tutte le sezioni piane dell'ellissoide) (cfr. 3.3.5.), facendo variare il piano orizzontale β della conica mobile γ e, determinata la retta o intersezione dei piani α e β , individuare le coppie di punti 1, 2; 3, 4;... comuni di volta in volta alla conica γ nelle diverse posizioni e alla relativa retta o ; inoltre, poiché l'ellisse-sezione richiesta, come tutte le coniche, è determinata da

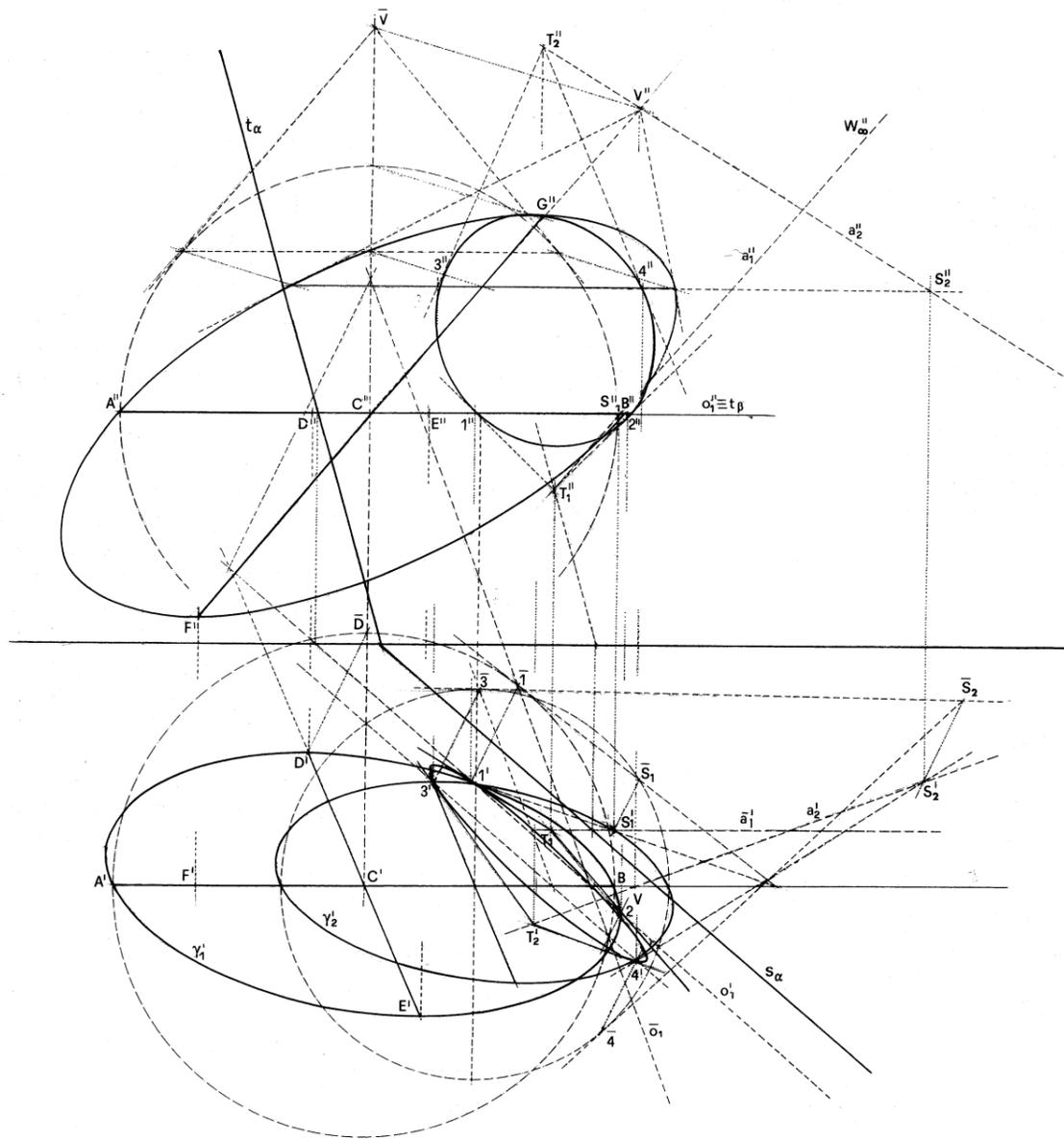


Fig. 51

cinque punti, oppure da quattro punti e dalla tangente in uno di essi, scegliendo due sole posizioni di γ e costruendo anche le tangenti nelle due coppie di punti individuati, si ottengono quattro punti e le relative tangenti, elementi più che sufficienti a determinare l'ellisse-sezione.

Allo scopo possiamo utilizzare come prima posizione γ_1 dell'ellisse mobile quella data nel piano diametrale orizzontale $\beta_1(t_{\beta_1})$, mediante la coppia di diametri coniugati AB e CD : la retta o_1 comune ad α e β (con $o'_1 \equiv A''B''$ e o'_2 parallela alla prima traccia s_α di α) interseca l'ellisse γ_1 nei punti 1, 2. Per determinare con precisione tali punti (potendosi anche non costruire γ_1 , che invece nella figura è presente) si può ricorrere al cerchio $\bar{\gamma}_1$ affine a γ_1 - nell'affinità omologica il cui asse è il diametro AB' e la direzione del centro è quella della retta $D'D$ (cfr. 2.2.5.III.a) - per trasformare la retta o'_1 in \bar{o}_1 e quindi, mediante l'affinità inversa determinare i punti 1', 2' corrispondenti dei punti 1, 2 in cui la retta \bar{o}_1 interseca il cerchio (nella figura 51 per costruire l'omologa \bar{o}_1 di o'_1 si è trasformato il punto K , in cui o'_1 interseca la retta $D'E'$, nel punto \bar{K} : la retta \bar{o}_1 è quella che congiunge \bar{K} con il punto in cui o'_1 incontra l'asse AB' dell'affinità).

È inoltre possibile costruire le tangenti in questi due punti alla costruenda ellisse sezione (rette che evidentemente appartengono al piano α), osservando la figura 52 e ricordando che tali tangenti sono le

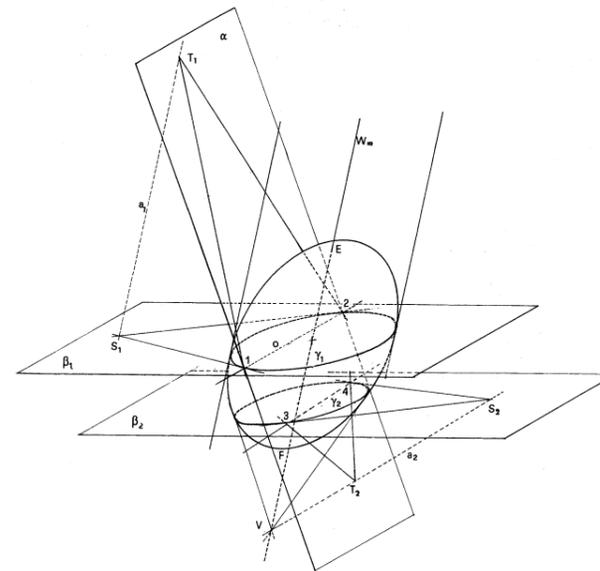


Fig. 52

intersezioni con α dei piani tangenti la quadrica in quei due punti, piani che si possono individuare in quanto tangenti anche al cono circoscritto alla superficie lungo la conica γ_1 ; e poiché γ_1 appartiene a un piano diametrale, tale cono è un cilindro. I piani tangenti la quadrica nei punti 1, 2 si intersecano in una retta a che passa per il punto W_∞ del cilindro circoscritto e dunque è parallela al diametro FG ; quei piani (che non è necessario costruire) secano β_1 in due rette che sono tangenti all'ellisse γ_1 negli stessi punti 1, 2 e dunque passano per il punto S_1 in cui la retta a incontra il piano β_1 ; i piani tangenti secano ancora il piano α secondo due rette passanti per il punto T_1 in cui la retta a incontra α , rette che sono evidentemente le tangenti alla richiesta ellisse, sezione dell'ellissoide con il piano α , nei punti 1, 2.

La costruzione descritta si traduca ora nella rappresentazione mongiana della figura 51: condotte le tangenti al cerchio $\bar{\gamma}_1$ affine alla ellisse γ_1 nei punti 1, 2, si trasformi nella suddetta affinità il loro punto comune S_1 in S'_1 (allo scopo è sufficiente costruire l'omologa di una sola delle tangenti e su questa proiettare secondo la direzione del centro dell'affinità, il punto \bar{S}_1 in S'_1): le tangenti alla ellisse γ_1 sono le rette che congiungono S'_1 con i punti 1' e 2'; poiché queste tangenti appartengono al piano orizzontale β_1 , la seconda proiezione S''_1 di S'_1 cade sulla retta $o'' \equiv t_{\beta_1}$. Le due proiezioni a''_1, a'_1 della retta a_1 sono allora rispettivamente le parallele alle rette $F''G''$ e $F'G'$ condotte per i punti S''_1 e S'_1 : il punto $T_1(T''_1, T'_1)$ si determina come intersezione della stessa a_1 con il piano α (con l'ausilio del piano di fronte per a_1 e la relativa intersezione $x(x'', x')$): infine le rette che congiungono T'_1 e T''_1 rispettivamente con i punti 1', 2' e con 1'', 2'' sono le immagini delle tangenti nei punti 1, 2 della ellisse sezione dell'ellissoide con il piano dato α .

Per costruire gli altri due punti e le relative tangenti dell'ellisse richiesta, si operi in modo analogo rispetto a una seconda posizione γ_2 , della conica mobile, considerata appartenente a un piano ausiliario $\beta_2(t_{\beta_2})$, ancora orizzontale: la prima proiezione γ'_2 è un'ellisse simile e similmente posta rispetto a γ'_1 (di cui si potrebbe evitare il tracciamento, che tuttavia nella figura è presente, e assegnarne i soli diametri coniugati), mentre la seconda proiezione coincide con un segmento orizzontale, appartenente alla seconda traccia t_{β_2} di β_2 .

Costruiti in modo analogo al precedente, con l'ausilio del cerchio affine a γ'_2 , i punti 3', 4' (secondo cui la retta intersezione o'_2 del piano α con β_2 seca γ'_2), le relative tangenti e il loro punto comune S_2 (cfr. figg.

51, 52), è necessario determinare il vertice V del cono circoscritto all'ellissoide lungo la conica γ_2 , la cui seconda proiezione è il punto V'' comune alle tangenti alla conica fissa negli estremi della corda (diametro per γ_2). Per l'esatta determinazione di tali punti e delle tangenti, si ricorre al cerchio $\bar{\gamma}_2$ affine alla ellisse fissa trasformando la suddetta corda (mediante il punto in cui questa secca il diametro $F''G''$) nella corrispondente corda del cerchio $\bar{\gamma}_2$ per i cui estremi si conducano le tangenti, e infine mediante l'affinità inversa si costruiscano i punti di contatto delle tangenti alla ellisse fissa, le tangenti stesse e il loro punto comune, quest'ultimo essendo l'immagine V'' del vertice V del cono circoscritto alla ellisse γ_2 . Determinata la prima proiezione V' di V sulla retta del diametro $A'B'$, prima traccia del piano di fronte della ellisse fissa, si costruisca la retta a_2 congiungendo le proiezioni di V con le proiezioni omonime del punto S_2 , comune alle tangenti a γ_2 nei punti 3, 4 (costruite con l'ausilio del cerchio affine a γ_2) e infine si determini il punto T_2 , intersezione di a_2 con il piano α (quest'ultima costruzione non appare nella figura 51 perché esorbitante dai limiti del disegno): le tangenti alla conica richiesta nei punti 3, 4 sono le rette che congiungono le proiezioni T_2'' , T_2' con le proiezioni omonime degli stessi punti. Gli otto elementi (punti e tangenti) così determinati consentono l'ulteriore determinazione di altri punti⁶ e quindi il tracciamento delle due immagini dell'ellisse richiesta.

9. *Rappresentazione e sezioni della sfera.* La sfera è rappresentata nel *metodo di Monge* dai due cerchi massimi contenuti in piani paralleli ai piani di proiezione, detti rispettivamente *equatore* e *meridiano principale*, la prima proiezione dell'equatore essendo un cerchio di raggio R uguale al raggio della sfera e centro nel punto C' , prima proiezione del centro C della sfera, e la seconda proiezione un segmento orizzontale di lunghezza uguale al diametro, il cui punto medio è la seconda proiezione C'' del centro C dell'equatore stesso e della sfera; viceversa il meridiano si proietta in seconda proiezione in un cerchio uguale al primo con centro in C'' , e in prima proiezione nel diametro parallelo alla linea di terra. Ogni piano, come è noto, secca la sfera secondo un cerchio, che, se il piano passa per il centro della sfera, è un cerchio massimo di centro e raggio uguali ai corrispondenti elementi della sfera, in ogni altro caso è un cerchio di raggio tanto minore quanto maggiore è la distanza del suo piano dal centro. Esclusi i paralleli e i cerchi contenuti in piani di fron-

te, che si proiettano rispettivamente in prima e in seconda proiezione ancora in cerchi, la rappresentazione di ogni altro cerchio della sfera è costituita da due ellissi.

Se il piano α passa per il centro C della sfera, nella rappresentazione mongiana le proiezioni C'' , C' appartengono alle proiezioni omonime della retta orizzontale $o(o'', o')$ di α (t_α , s_α) (fig. 53); ribaltato α su π_1 e con esso il punto C in C^* , si tracci il cerchio γ^* di centro C e raggio uguale a quello della sfera; costruita l'ellisse γ' prima proiezione di γ mediante l'omologia inversa di ribaltamento, se ne costruisca la seconda proiezione γ'' come trasformata della prima nell'omologia rappresentatrice del piano, il cui asse

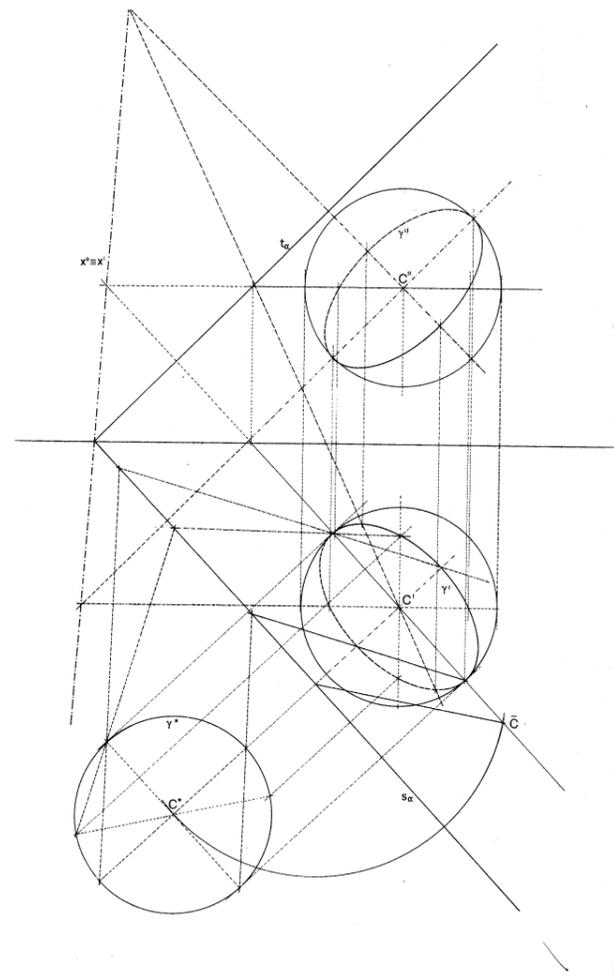


Fig. 53

è la retta $x'' \equiv x'$, e il centro è improprio nella direzione ortogonale alla linea di terra (S.-V., pp. 246-247). Se invece il piano α non passa per il centro C della sfera, è necessario determinare il centro K e il raggio r del cerchio sezione; allo scopo condotta per il punto C la retta $n(n'', n')$ ortogonale ad α e determinato il punto $K(K'', K')$ d'intersezione, si determini la vera grandezza del segmento CK (S.-V., p. 230), che misura la distanza del piano α dal centro della sfera: è evidente che se tale misura risulta maggiore o uguale a quella del raggio R della sfera, il piano α non interseca la sfera, e dunque, risultando rispettivamente esterno o tangente, la sezione è immaginaria o ridotta a un unico punto reale, quello di contatto del piano tangente. Se invece il segmento CK risulta minore di R , il cerchio sezione γ è reale (fig. 54): per

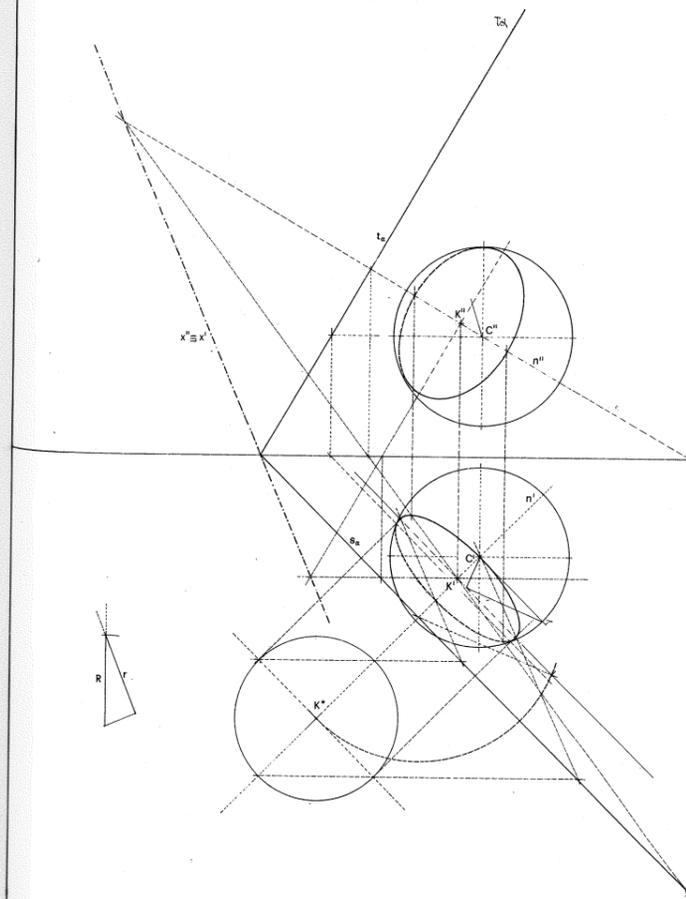


Fig. 54

conoscerne la misura r del raggio si costruisca a parte un triangolo rettangolo di cui un cateto sia uguale a CK e l'ipotenusa uguale al raggio R della sfera: l'altro cateto fornisce la misura del raggio r del cerchio γ richiesto. Allora, ribaltato il piano α e con esso il punto K in K^* , si tracci il cerchio γ^* di centro K^* e raggio r , e mediante l'affinità omologica (inversa) di ribaltamento si costruisca l'ellisse γ' prima proiezione di γ , e infine la seconda proiezione γ'' .

10. In un'assonometria ortogonale la sfera è rappresentata dal suo cerchio massimo parallelo al quadro, che si proietta in vera forma.

In un'assonometria obliqua, in particolare *cavaliera*, l'immagine della sfera è un'ellisse che ne costituisce il contorno apparente dal centro improprio R_∞ della proiezione. Assegnata dunque la sfera nel metodo di Monge (fig. 55), l'ellisse γ'_1 prima proiezione assonometrica della sfera si costruisce come trasformata della corrispondente proiezione mongiana γ_1 mediante la consueta *omologia affine* di asse la linea di terra, rette corrispondenti y_1 , y' e centro il punto $S_\infty \equiv Y_1Y'$; l'ellisse γ' , vera assonometria (o contorno apparente da R_∞) della sfera, si può determinare come curva circoscritta a una serie di altre ellissi, immagini di altrettante sezioni orizzontali, che a loro volta si possono tracciare ciascuna dopo averne costruiti alcuni punti nella prima proiezione assonometrica mediante la suddetta omologia, e aver attribuito agli stessi punti la relativa quota (per la costruzione degli assi dell'ellisse γ'_1 vedi 2.2.5.IV. e fig. 15).

Una costruzione più rapida consente tuttavia di determinare direttamente l'immagine assonometrica γ' della sfera, come *intersezione con il quadro del cilindro circoscritto alla sfera dal centro di proiezione R_∞* , o ciò che è lo stesso, come proiezione dal centro R_∞ del cerchio massimo γ , - luogo dei punti di contatto di quel cilindro circoscritto: tale cerchio appartiene al piano per il centro della sfera e ortogonale a R_∞ (è infatti il piano polare del punto R_∞); l'ellisse γ' , immagine assonometrica della sfera, può costruirsi trasformandone le due proiezioni mongiane γ_2 , γ_1 , che sono evidentemente ancora ellissi (fig. 56). Allo scopo è necessario prioritariamente rintracciare, dalla disposizione degli assi assonometrici e dalle relative unità di misura assegnate come di consueto, la direzione del centro R_∞ , determinandone le due proiezioni mongiane, $R_{2\infty}$, $R_{1\infty}$ ove $R_{2\infty}$ coincide con il punto improprio dell'asse y' (cfr. Parte I, 3.2.5.); costruito poi il piano α passante per il centro C della sfera e perpendicolare alla direzione R_∞ , e ribaltato

tale piano e con esso il cerchio massimo γ in γ^* (con centro in C^* ribaltato di C), se ne costruisca l'ellisse prima proiezione γ_1 come trasformata di γ^* nell'*omologia affine ortogonale* (inversa) di ribaltamento, e la seconda proiezione γ_2 mediante l'omologia rappre-

sentatrice del piano α ; infine, trasformata l'ellisse γ_1 nella prima proiezione assonometrica γ'_1 , e attribuita a ciascun punto la relativa quota, la curva che congiunge i punti così costruiti è l'ellisse γ' immagine assonometrica della sfera.

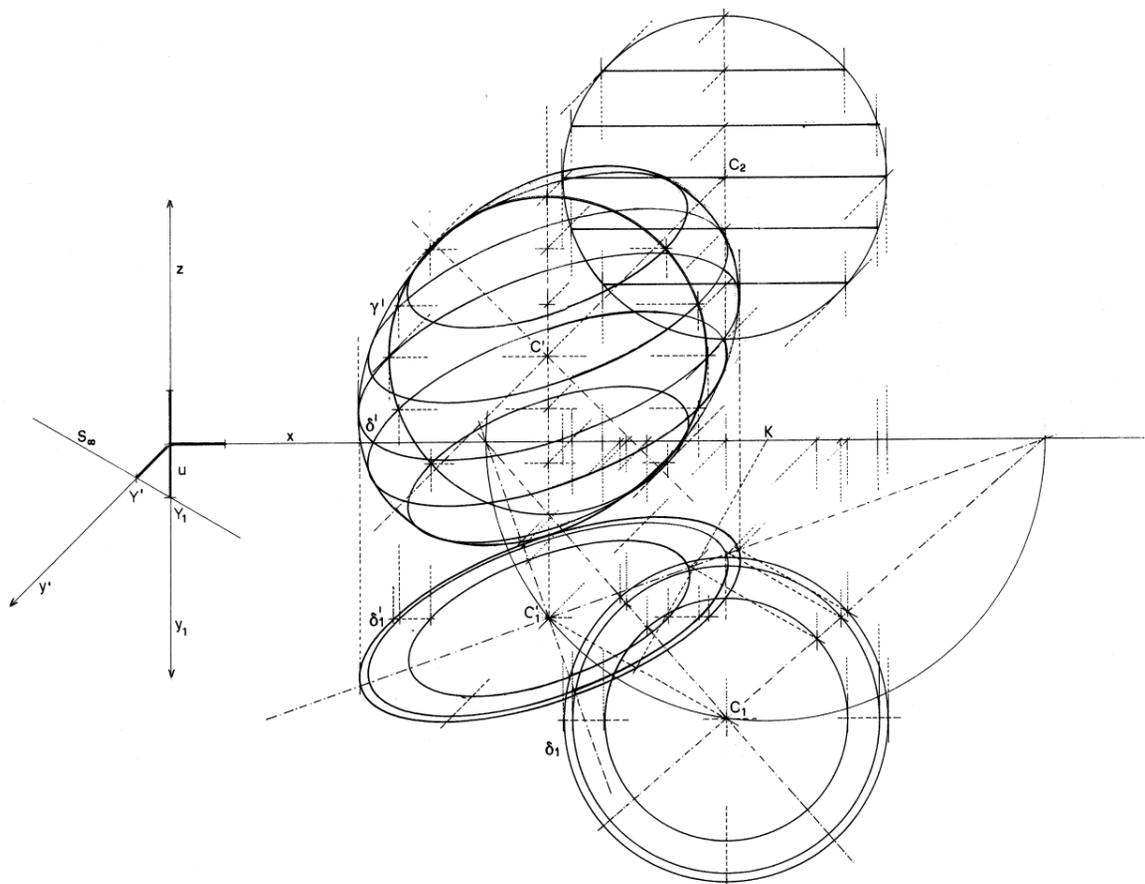


Fig. 55

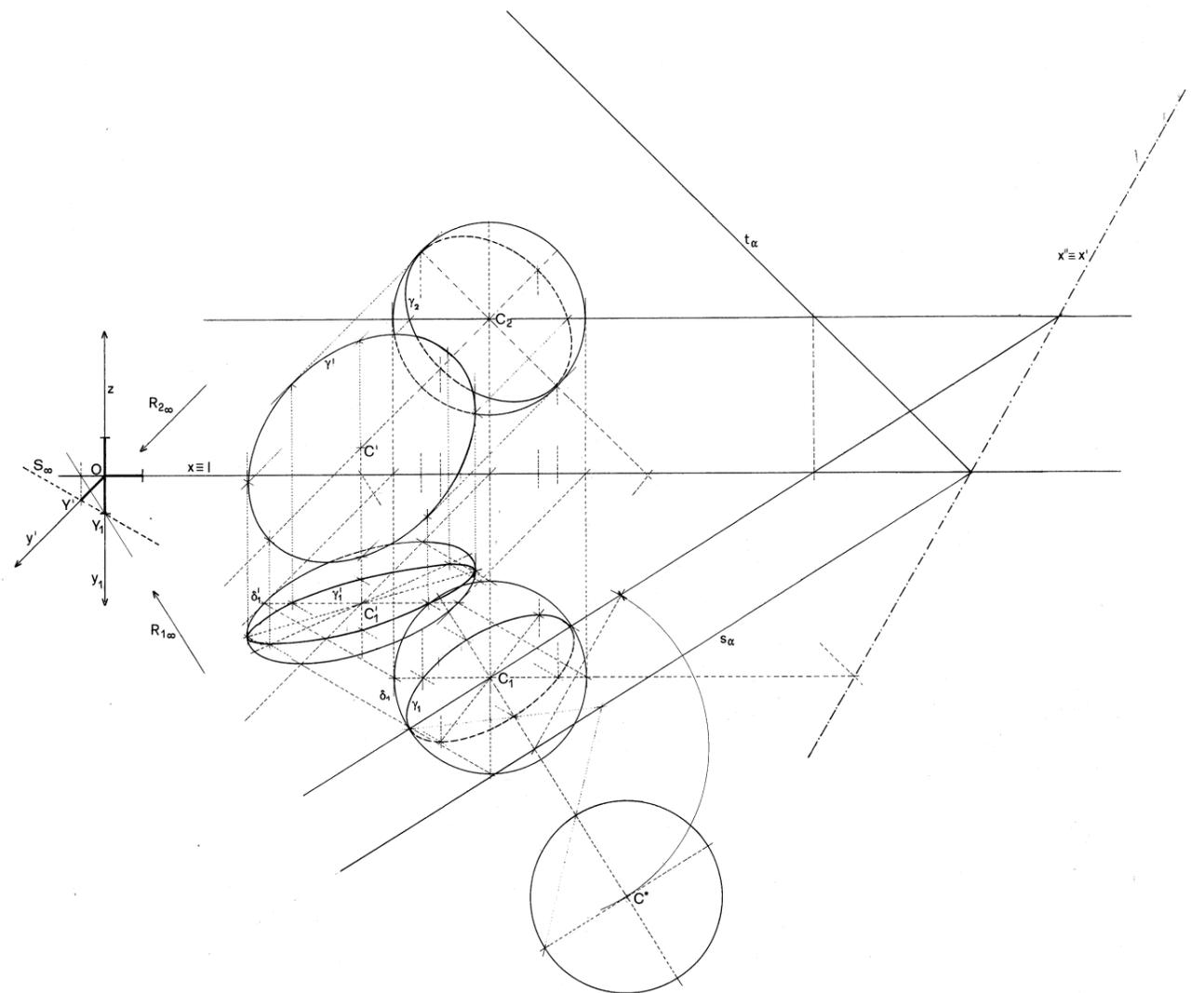
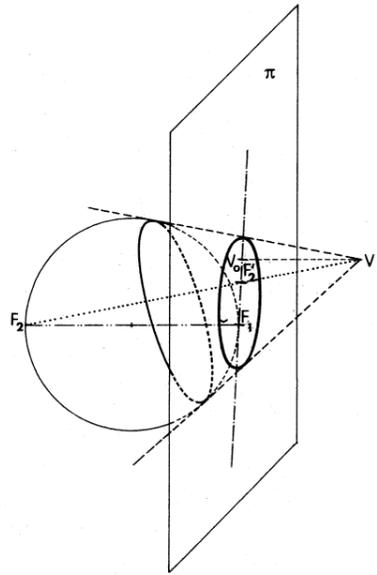


Fig. 56

11. Per costruire la *prospettiva della sfera* si ricordi che il contorno apparente della sfera da un punto proprio – in questo caso il centro di vista V – è un cerchio di raggio tanto minore quanto più breve è la distanza del punto di vista dalla sfera: questo cerchio è infatti l'insieme dei punti di contatto del cono di vertice V circoscritto alla sfera (che nelle proiezioni parallele diviene un cilindro) e come tale appartiene al piano polare di V rispetto alla sfera stessa (fig. 57). L'immagine di quel cerchio, e quindi la pro-

spettiva della sfera, è ancora un *cerchio* solo nel caso in cui il raggio visuale principale, che coincide con la retta VV_0 ortogonale al quadro, passa per il centro della sfera: infatti il cono circolare retto circoscritto alla sfera da V è sezionato con un piano (il quadro) che in questo caso è perpendicolare all'asse del cono stesso. In ogni altro caso l'immagine della sfera è una *ellisse*, non risultando il quadro ortogonale all'asse di quel cono⁷.

La costruzione prospettica si può effettuare determi-



se infine la sezione è una parabola, esiste una sola sfera tangente al piano secante, e il suo punto di contatto coincide con l'unico fuoco della parabola (fig. 58 c).

Se allora il cono del teorema è il cono circoscritto alla sfera con il vertice nel punto di vista V , e l'ellisse γ' , immagine della sfera, ne è la sezione con il quadro π , uno dei due fuochi dell'ellisse-immagine, ad esempio F'_1 , in quanto punto di contatto con π della sfera, è l'estremo del raggio che appartiene alla retta perpendicolare a π ; ma poiché dal teorema di Dandelin deriva che ogni fuoco è anche la proiezione da V su π dell'altro estremo di quel diametro di ciascuna delle due sfere che è perpendicolare a π , possiamo determinare il secondo fuoco F'_2 proiettando sul quadro l'altro estremo del diametro d della sfera data (cfr. fig. 57).

Dunque più in generale, se cioè il quadro π non è tangente alla sfera, possiamo dire che i fuochi dell'ellisse γ' , immagine della sfera, sono le proiezioni da V degli estremi del diametro d perpendicolare a π .

Fig. 57

nando dapprima la *rappresentazione mongiana* del cerchio γ di contatto del cono circoscritto alla sfera dal punto V (o sezione della sfera con il piano polare α di V) e trasformando poi l'ellisse prima proiezione di quel cerchio nella corrispondente ellisse proiezione geometrica γ'_1 , e infine attribuendo ai diversi punti di tale curva le relative quote prospettiche, derivandole da quelle obiettive della seconda proiezione mongiana di γ : si ottiene così il contorno ellittico γ' , prospettiva della sfera.

Esiste tuttavia un procedimento assai più breve, che si realizza mediante l'individuazione diretta dell'asse maggiore e dei fuochi dell'ellisse γ' : con questi elementi, come sappiamo, la curva è determinata ed è possibile costruirne un numero di punti che ne consenta un corretto tracciamento (cfr. 2.2.4.II.). Tale procedimento consegue da un teorema (il teorema di Dandelin) secondo il quale *i fuochi di una conica, sezione di un cono circolare retto con un piano, sono i punti di contatto del piano con due sfere inscritte nel cono e tangenti a quel piano*. Se la sezione è una ellisse, le due sfere sono contenute entrambe in una delle falde del cono (fig. 58 a); nel caso dell'iperbole le sfere sono situate ciascuna in una delle falde, e perciò da parti opposte rispetto al vertice (fig. 58 b);

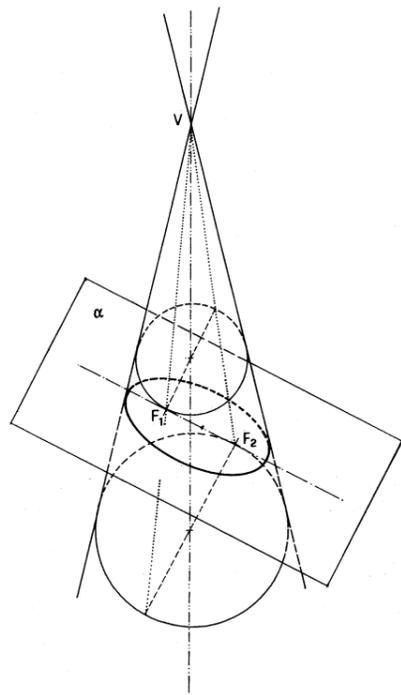


Fig. 58a

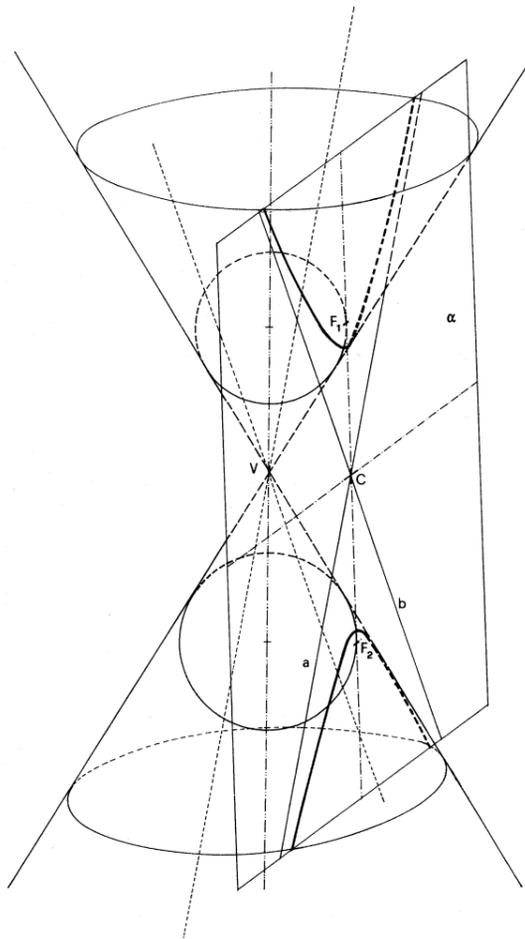


Fig. 58 b

Ricordando che la conica γ' è la proiezione da V del cerchio γ di contatto con la sfera (oppure la sezione con π) del cono circoscritto da V , l'asse maggiore $A'B'$ di γ' , cui appartengono i fuochi, è la proiezione di quel diametro AB del cerchio γ che sta nel piano proiettante δ ($f'_\delta \equiv t'_\delta$) che contiene il diametro d della sfera (fig. 59): questo piano seca la sfera secondo un cerchio σ , per il quale gli estremi del segmento AB sono i punti di contatto con σ delle tangenti condotte dal punto V , tangenti che sono infatti generatrici del cono circoscritto.

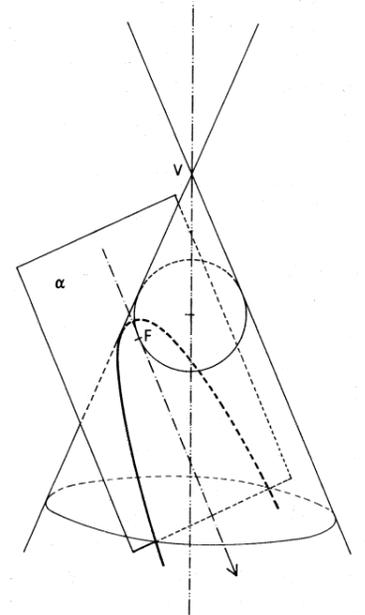


Fig. 58 c

Dati dunque sul quadro il centro C della sfera mediante la coppia C', C'_1 (dove C'_1 è la proiezione geometrica di C) e la misura r del raggio, si costruisca la retta d passante per C e ortogonale al quadro – la cui immagine d' passa per C' e per il punto di fuga F'_d coincidente con V_0 , e la cui traccia T_d cade nell'intersezione della stessa d' con la traccia del piano verticale che contiene la proiezione geometrica d'_1 per C'_1 , e ribaltato il piano δ (la cui traccia-fuga $f'_\delta \equiv t'_\delta$ coincide con d' , fig. 60) e con esso il punto V in V^*_δ , si costruisca il ribaltato σ^* del cerchio massimo σ della sfera contenuto in δ (il cui centro C^* cade sulla ribaltata d^* e il cui raggio è uguale a r); condotte da V^*_δ le tangenti a σ^* , che sono le ribaltate delle generatrici del cono di vertice V appartenenti a δ , i punti di contatto A^*, B^* (ribaltati degli estremi del diametro AB del cerchio γ) si proiettano mediante quelle tangenti sulla traccia-fuga di δ in A', B' , estremi dell'asse focale dell'ellisse γ' . I punti F'_1 e F'_2 , proiezioni da V^* su d' dei punti F_1 e F_2 in cui la retta d^* seca il cerchio σ^* , sono i fuochi dell'ellisse cercata e, detto K il punto medio dell'asse maggiore $A'B'$, l'asse minore appartiene alla normale

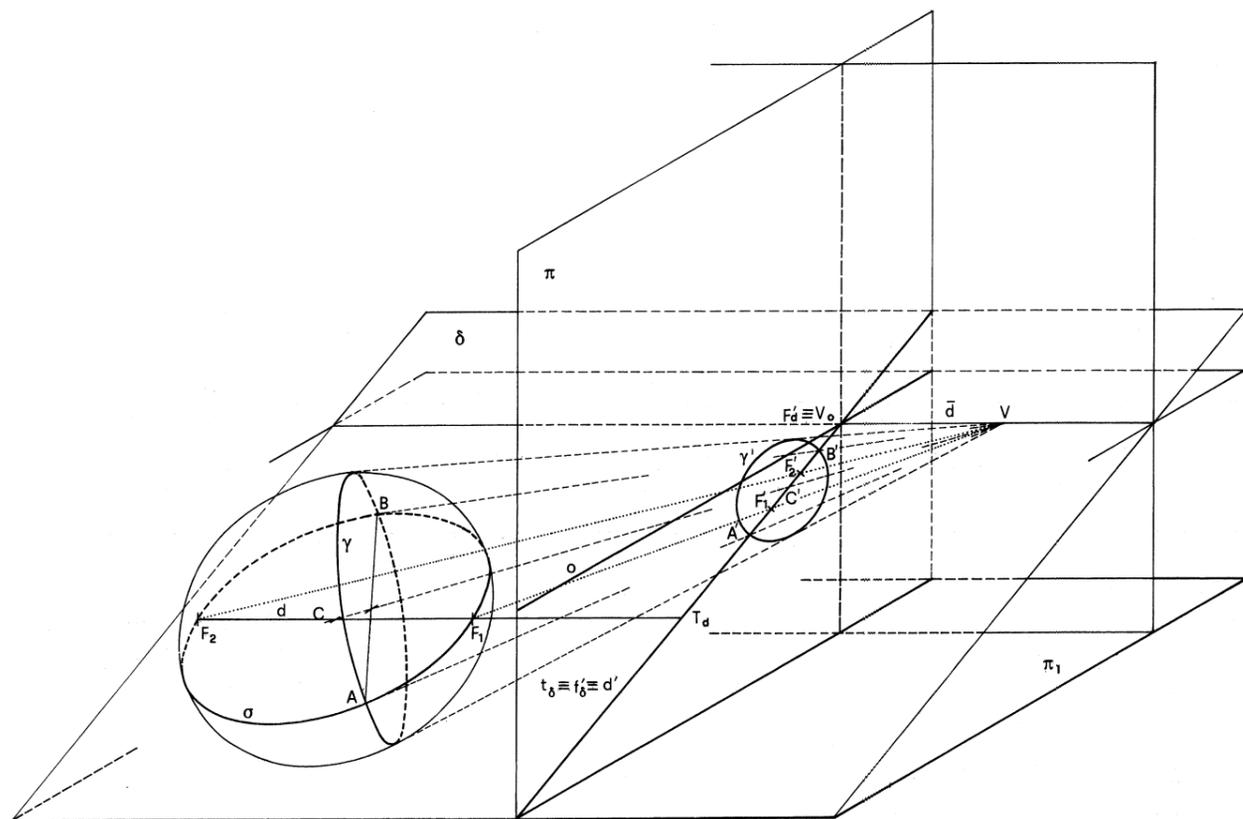


Fig. 59

ad $A'B'$ passante per K e i suoi estremi sono le intersezioni con l'arco di cerchio di centro F'_1 (o F'_2) e raggio uguale al semiasse maggiore KA' (KB') (cfr. 2.2.5.II). Noti i due assi, è possibile costruire altri punti di γ' .

Se, come nel caso di una volta sferica, si debba

limitare la prospettiva alla calotta superiore, è necessario costruire l'immagine del cerchio equatoriale per C : allo scopo, ribaltato tale piano e con esso il cerchio ϵ in ϵ^* , mediante l'inversa dell'omologia di ribaltamento si trasformi ϵ^* nell'ellisse-immagine ϵ' .

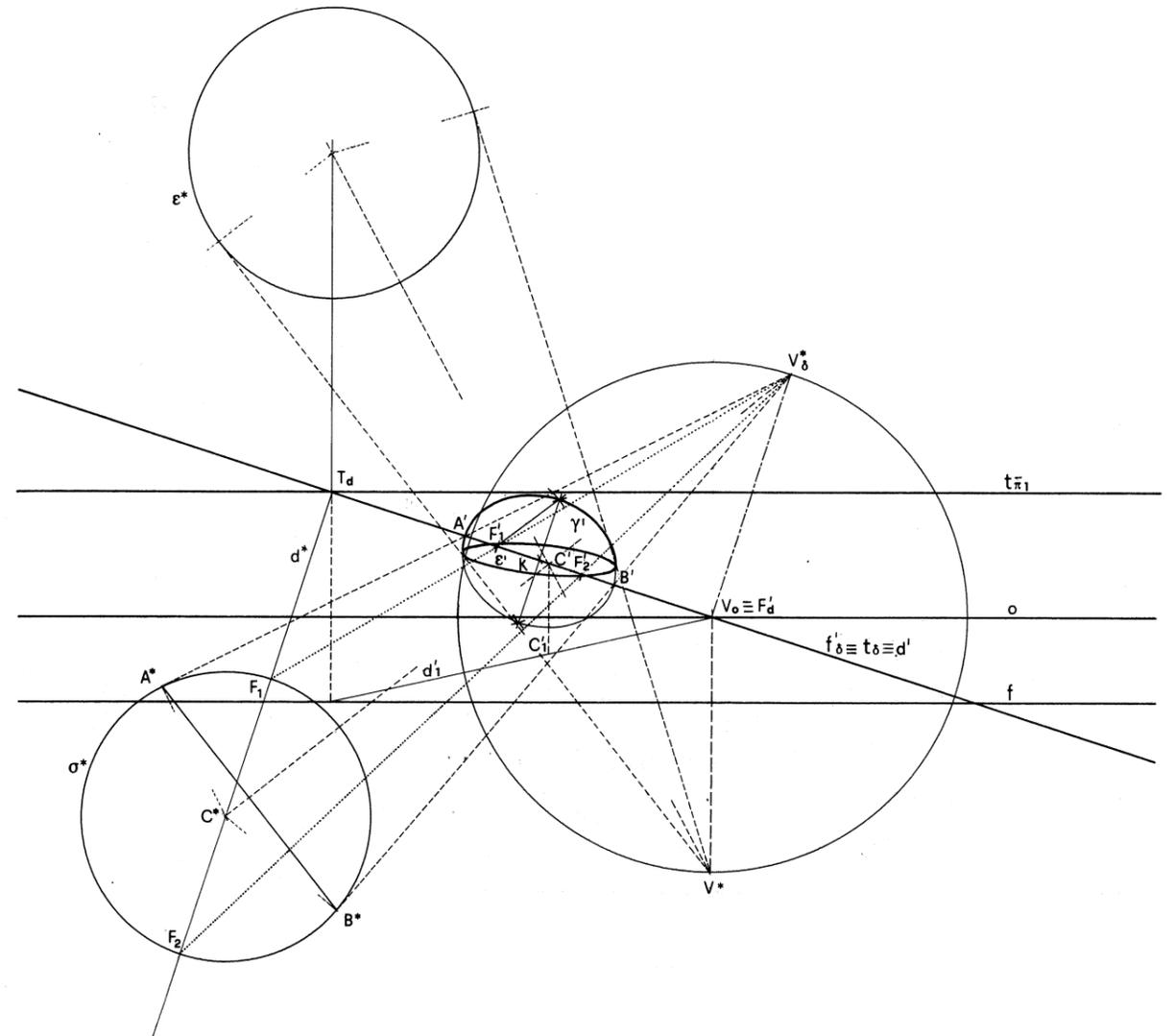


Fig. 60

3.4 Le superfici rigate

1. *Rigate sviluppabili e non sviluppabili.* Abbiamo più volte accennato all'esistenza di superfici generate da una retta – detta appunto *generatrice* – che si muove nello spazio secondo una determinata legge: tali sono le *superfici rigate*, che possono, oppure non, essere distese su un piano; nel primo caso vengono dette *sviluppabili*, nel caso contrario, *non svi-*

luppabili o *gobbe*.

Sono *sviluppabili* quelle superfici rigate in cui due generatrici successive siano complanari: infatti se di una siffatta superficie consideriamo il piano individuato da una prima e da una seconda generatrice, e il piano individuato da quest'ultima e da una terza immediatamente successiva, è possibile, facendo ruotare il secondo piano intorno alla generatrice comune, sovrapporlo al primo; e così operando pro-

ficie è particolarmente idoneo il metodo del ribaltamento: costruita l'ellisse ϵ' , immagine del cerchio proiezione geometrica dell'elica e i relativi settori circolari (fig. 62), si stacchino sull'asse le corrispondenti suddivisioni verticali e si proceda come per la prospettiva dell'elica (cfr. 2.3.3.).

Una costruzione analoga è quella relativa alla rappresentazione della scala elicoidale⁸ - in chiave

strutturale, cioè con le sole presenze lineari, prive di ogni spessore - nel *metodo di Monge*: i settori circolari, determinati dalle suddivisioni del cerchio-base del cilindro che limita esternamente la scala, coincidono con le prime proiezioni delle superfici orizzontali (pedate) dei singoli gradini; questi settori sono limitati all'interno dal cerchio, concentrico e di raggio assai inferiore al primo, base del cilindro in-

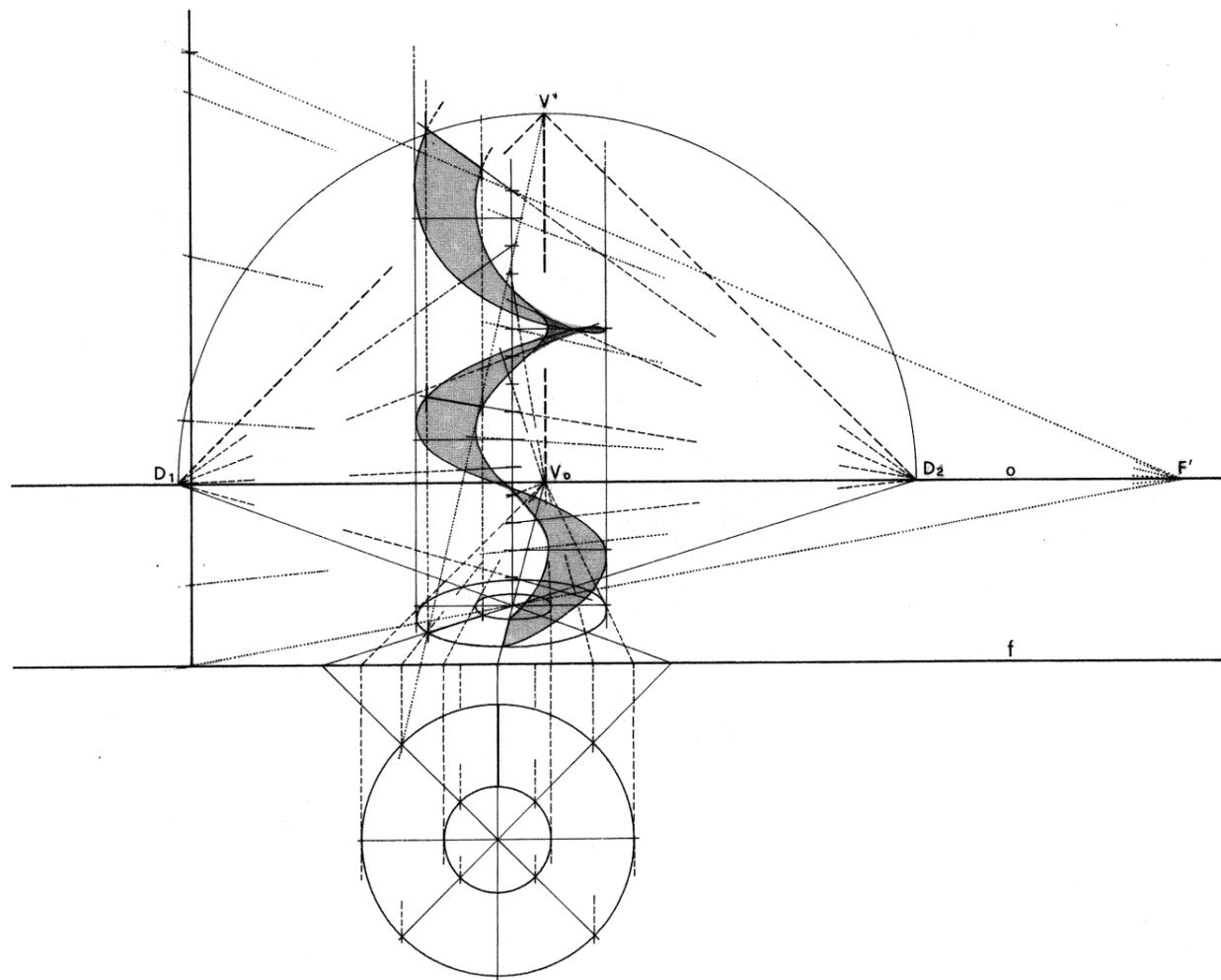


Fig. 62

terno. Le seconde proiezioni delle stesse superfici dei gradini coincidono con i segmenti di rette orizzontali compresi tra le due sinusoidi seconde proiezioni delle due eliche ideali che raccordano rispettivamente gli estremi esterni e gli estremi interni degli spigoli anteriori (o posteriori) dei gradini: infatti ciascuno dei raggi del cerchio rappresenta in prima proiezione lo spigolo posteriore di un gradino e lo spigolo anteriore del gradino successivo (fig. 63). Gli

stessi spigoli, anteriori e posteriori, si possono considerare come generatrici di due ideali elicoidi a piano direttore, la cui inclinazione fornisce la pendenza della scala.

Nella costruzione dell'*assonometria cavaliera*, trasformata la pianta mongiana della stessa figura 63, si tracci la semiretta-asse del cilindro e si riportino su questa i punti della suddivisione relativi ai singoli gradini: per ciascuno di tali punti si traccino due se-

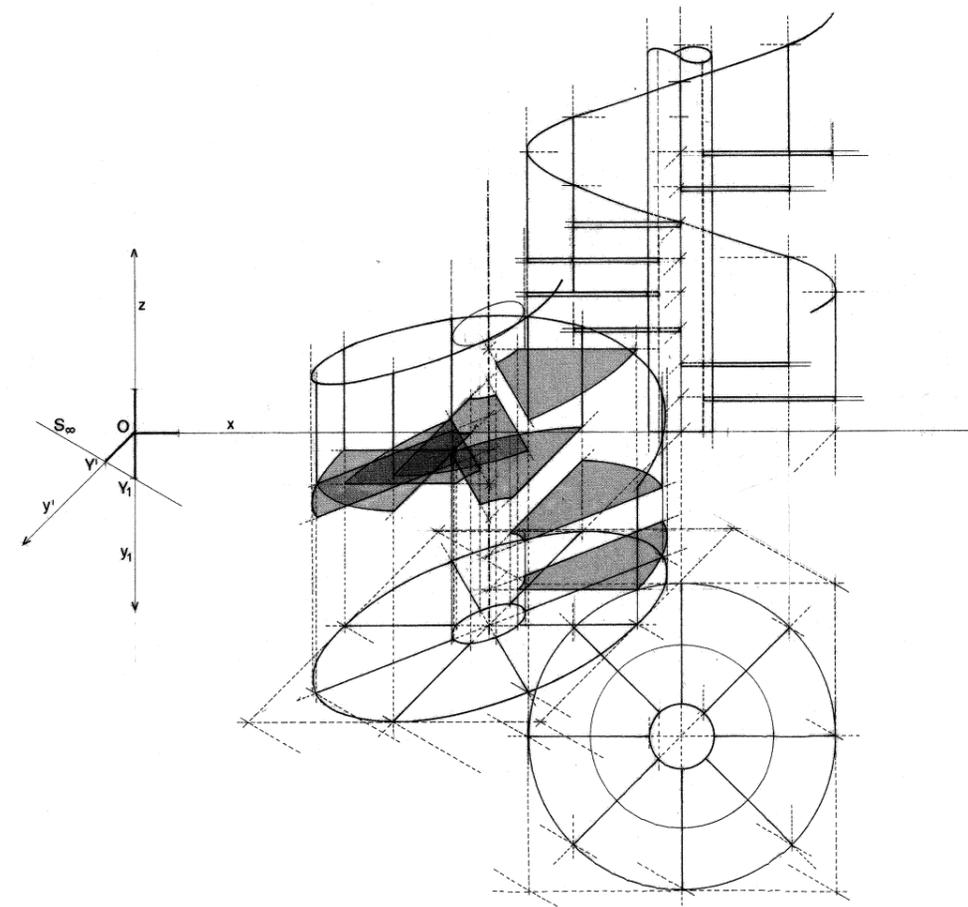


Fig. 63

mirette, spigolo anteriore e spigolo posteriore di ogni gradino, ciascuna parallela al corrispondente semidiametro dell'ellisse γ' , pianta-assonometrica, e al semidiametro successivo. Completano all'esterno la rappresentazione di ciascun gradino altrettanti archi di ellissi, trasformati dei corrispondenti archi in cui è suddivisa l'ellisse γ' , nelle diverse traslazioni aventi come punti corrispondenti di volta in volta quelli delle due suddivisioni successive dell'asse e come centro il punto improprio dell'asse; analoga costruzione vale per il limite interno dei gradini.

La costruzione della *prospettiva* segue analogo procedimento: nella figura 64 le suddivisioni del cerchio sono ottenute mediante i due diametri rispettivamente parallelo e ortogonale alla fondamentale e altri quattro, che insieme ai primi dividono il cerchio in dodici parti; i relativi punti di fuga sono rispettivamente: il punto V_0 (oppure K se la prospettiva è a quadro inclinato), il punto improprio della retta o mentre gli altri quattro punti di fuga si determinano sulla retta o nel modo consueto, mediante le parallele ai raggi del cerchio condotte dal punto V^* .

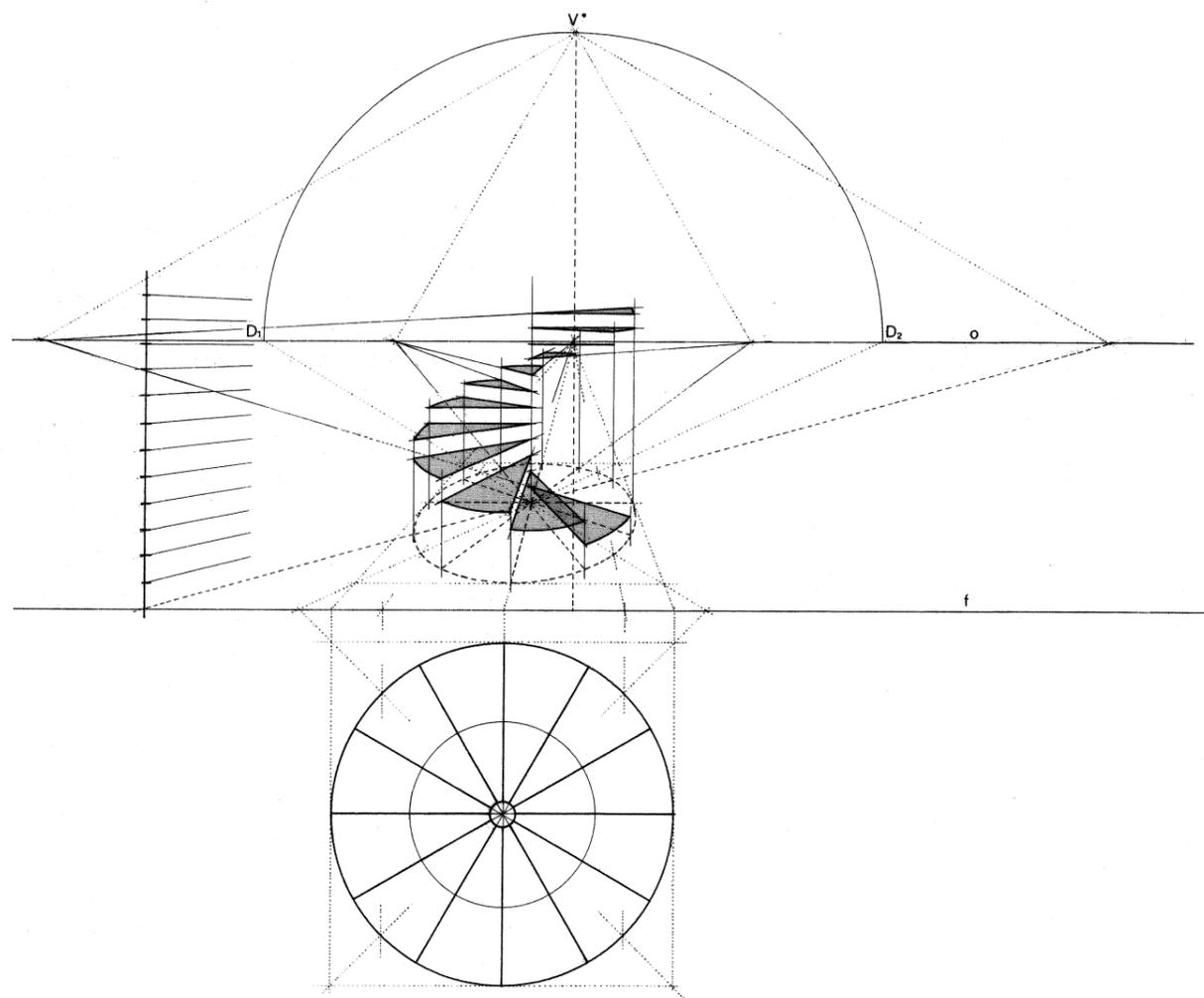


Fig. 64

La vite a *filetto rettangolare* è così denominata per essere la sua superficie generata in parte dal moto elicoidale del lato AB di un rettangolo $ABCD$ intorno a una retta a parallela a quel lato (fig. 65): se infatti il punto A (come il punto B) descrive un'elica di asse a , i lati orizzontali AD , BC descrivono porzioni di due elicoidi retti; il cilindro circolare retto di asse a e di raggio uguale alla distanza del lato AB da a completa la rappresentazione della vite, il cui *passo* è quello dell'elica descritta da A (da B) e di cui il cilindro interno è il *nucleo*, e la superficie descritta dal rettangolo è il *filetto*.

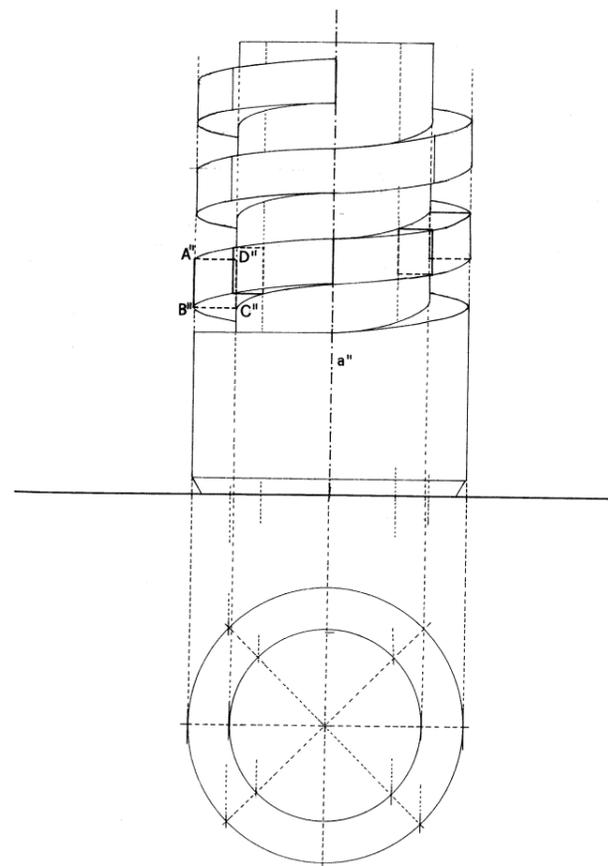


Fig. 65

5. Il *cono-cuneo di Wallis* costituisce la superficie d'intradosso di una volta che coprendo un ambiente a pianta trapezoidale, conserva qualche analogia con la volta a botte: un *arco semicircolare* è la direttrice curvilinea, le due direttrici rettilinee sono la *retta verticale*, posta in corrispondenza del punto d'incontro dei lati obliqui del trapezio, e la *retta impropria* (giacitura) di un piano ortogonale alla prima: le generatrici sono allora tutte le rette che si appoggiano al semicerchio e alla retta propria, mantenendosi parallele alla direttrice impropria, e perciò orizzontali. Per la *rappresentazione mongiana*, si divida la seconda proiezione dell'arco semicircolare in un certo numero di parti uguali mediante i punti $1_2, 2_2, \dots$ e determinatene le prime proiezioni $1_1, 2_1, \dots$ si traccino per tali punti le generatrici, tutte concorrenti nel punto a_1 prima proiezione e prima traccia dell'asse a : i punti intercettati dal lato minore del trapezio, individuano in seconda proiezione l'arco interno della superficie (fig. 66).

Nella stessa figura 66 è presente anche la *costruzione assonometrica*, trasformata della rappresentazione mongiana; tracciati l'arco circolare, mediante traslazione dell'alzato, e la direttrice verticale a' , le immagini delle generatrici sono le rette che congiungono i punti di suddivisione dell'arco semicircolare con le corrispondenti suddivisioni del segmento della direttrice a' relativo alla freccia dei due archi; osserviamo che per ciascun punto P della direttrice rettilinea (escluso il punto più alto, che corrisponde ai punti-chiave dei due archi) passano due generatrici della superficie, quelle che congiungono P con i due punti dell'arco direttore che hanno la stessa quota di P .

6. La superficie dell'*arco d'ingresso in una torre cilindrica* è un conoide che differisce dal precedente per avere come direttrice curvilinea una *curva gobba* tracciata sulla superficie del cilindro, precisamente un *arco di quartica*: tale curva è ottenibile come intersezione di due cilindri (cfr. 3.7.1.), la superficie della torre e un ideale semicilindro di asse ortogonale al primo e quindi orizzontale; le direttrici rettilinee sono l'asse del cilindro-torre e la *retta impropria* (giacitura) di direzione ortogonale all'asse. La superficie effettiva (intradosso) dell'arco è quella parte del conoide compresa tra due cilindri verticali coassiali, quelli che delimitano all'esterno e all'interno lo spessore murario della torre.

Data la *rappresentazione mongiana* dei due cilindri verticali disposti in modo che in seconda proiezione l'asse del semicilindro orizzontale (ideale) sia ortogonale a π_2 e dunque l'arco esterno appaia semicir-

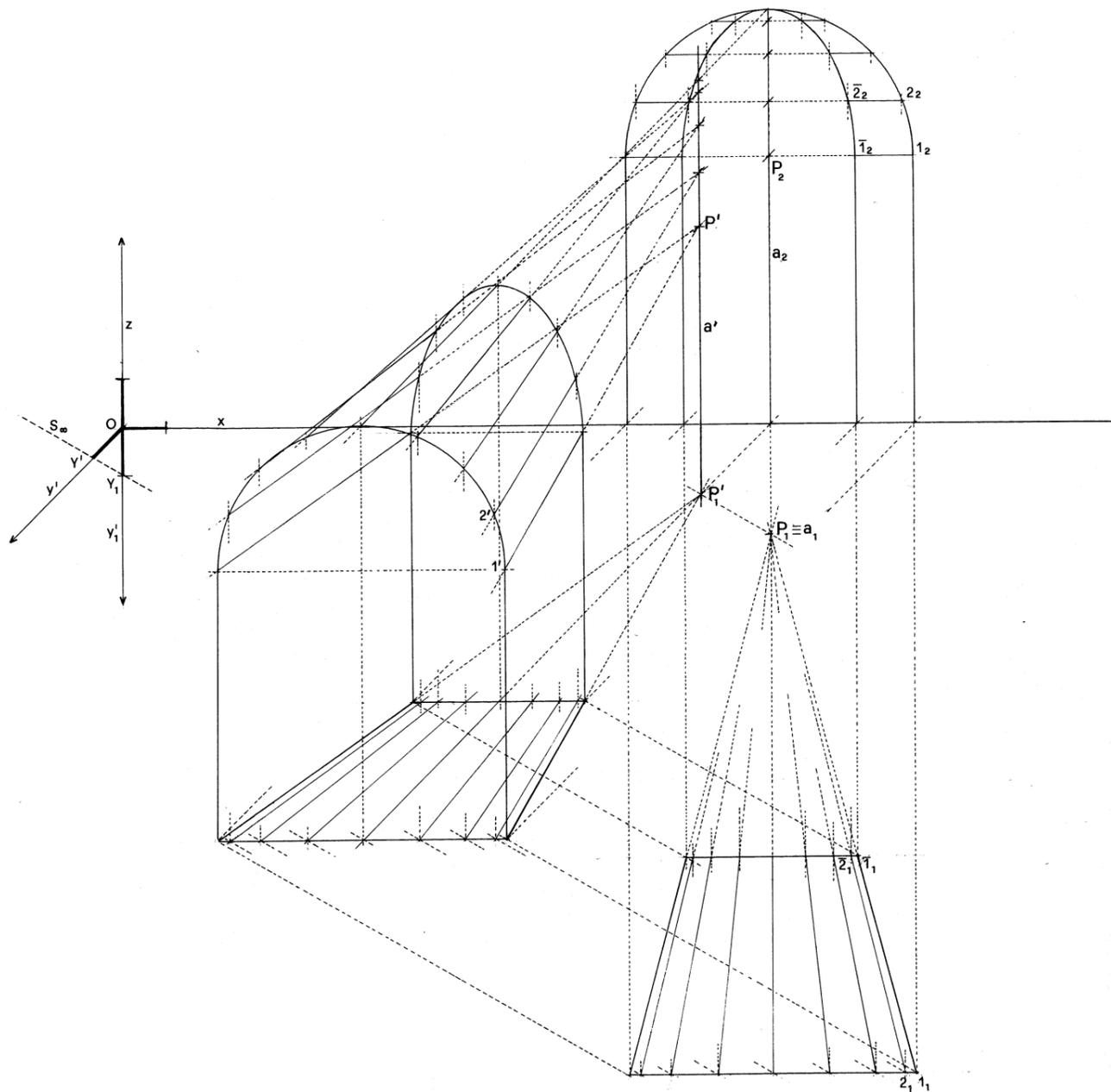


Fig. 66

colare, la costruzione dell'arco interno è analoga al caso precedente, come analogo è il procedimento per la costruzione dell'assonometria (fig. 67), che

differisce solo per la determinazione dell'arco-quartica, e per il secondo arco, sezione del conoide con il cilindro interno.

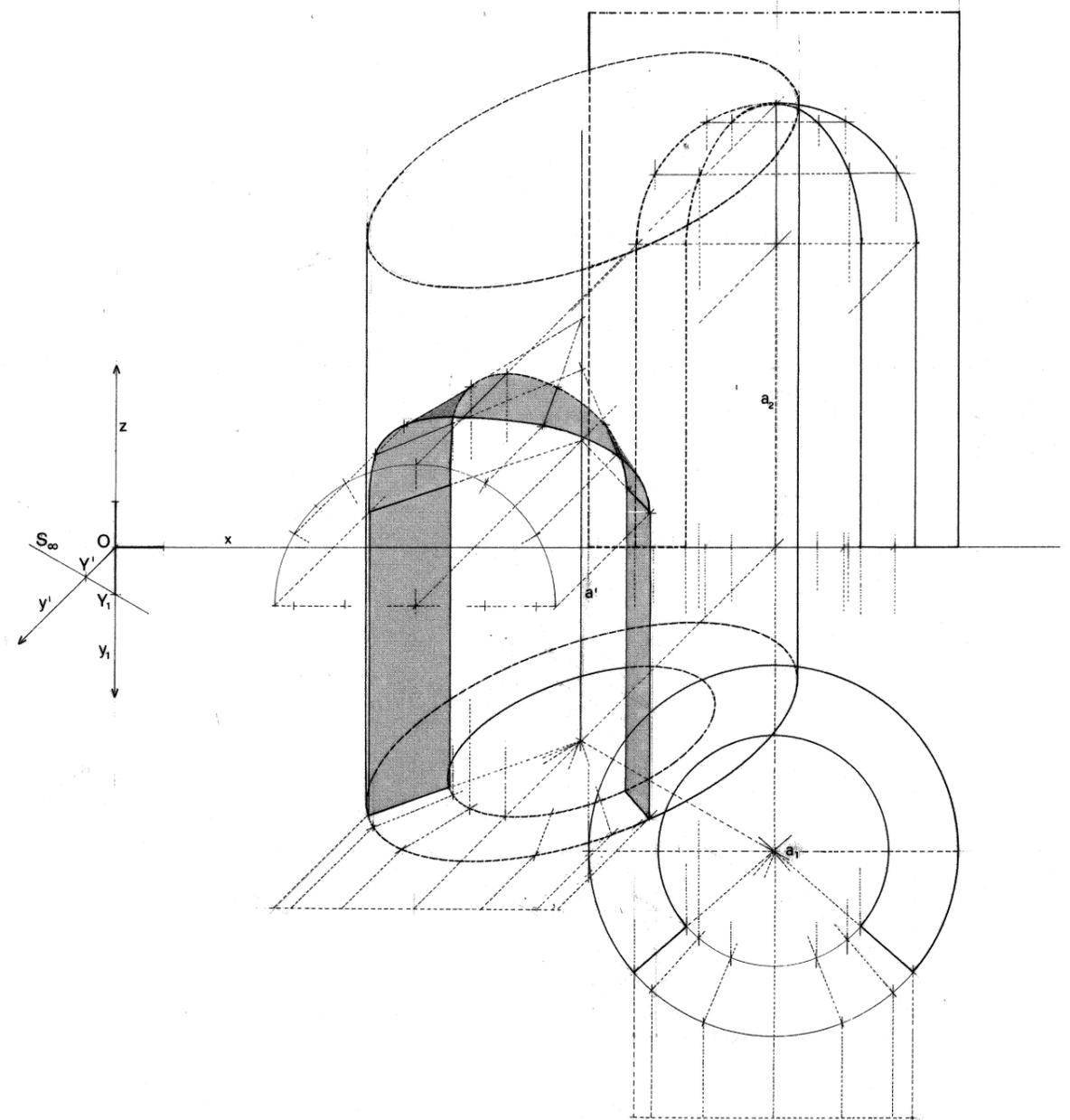


Fig. 67

Per la rappresentazione *prospettica*, con il metodo del ribaltamento, si divida quella parte del cerchio-base del cilindro esterno, relativa all'apertura del vano, in un certo numero di settori e si costruiscano, mediante l'omologia inversa di ribaltamento, le ellissi omologhe dei due cerchi, trasformandone anche i raggi che ne determinano i settori e così ottenendo le corrispondenti suddivisioni delle ellissi-immagini (fig. 68); scelti sul segmento dell'asse relativo alla freccia dell'arco un certo numero di punti equidistanti, si costruiscano per ciascuno di essi la coppie di generatrici (solo per il punto più alto passa una sola generatrice) mediante i relativi punti di fuga: le intersezioni delle generatrici con le verticali condotte per i corrispondenti punti delle due ellissi, esterna e in-

terna, sono punti della curve che delimitano lo spessore dell'arco.

7. *L'elicoide a cono direttore*, detto anche *elicoide rigato obliquo* o *gobbo*, è una superficie rigata di notevole interesse figurativo, avente due direttrici curvilinee e una rettilinea (propria): il cono direttore del titolo è un cono circolare retto la cui intersezione con il piano improprio (un *cerchio all'infinito*) coincide con la seconda direttrice curvilinea dell'elicoide, l'altra essendo un'*elica cilindrica*, mentre la direttrice rettilinea è l'asse dell'elica; allora le generatrici dell'elicoide, che si appoggiano all'asse e all'elica, appoggiandosi ancora a quel cerchio improprio, sono parallele alle corrispondenti generatrici del

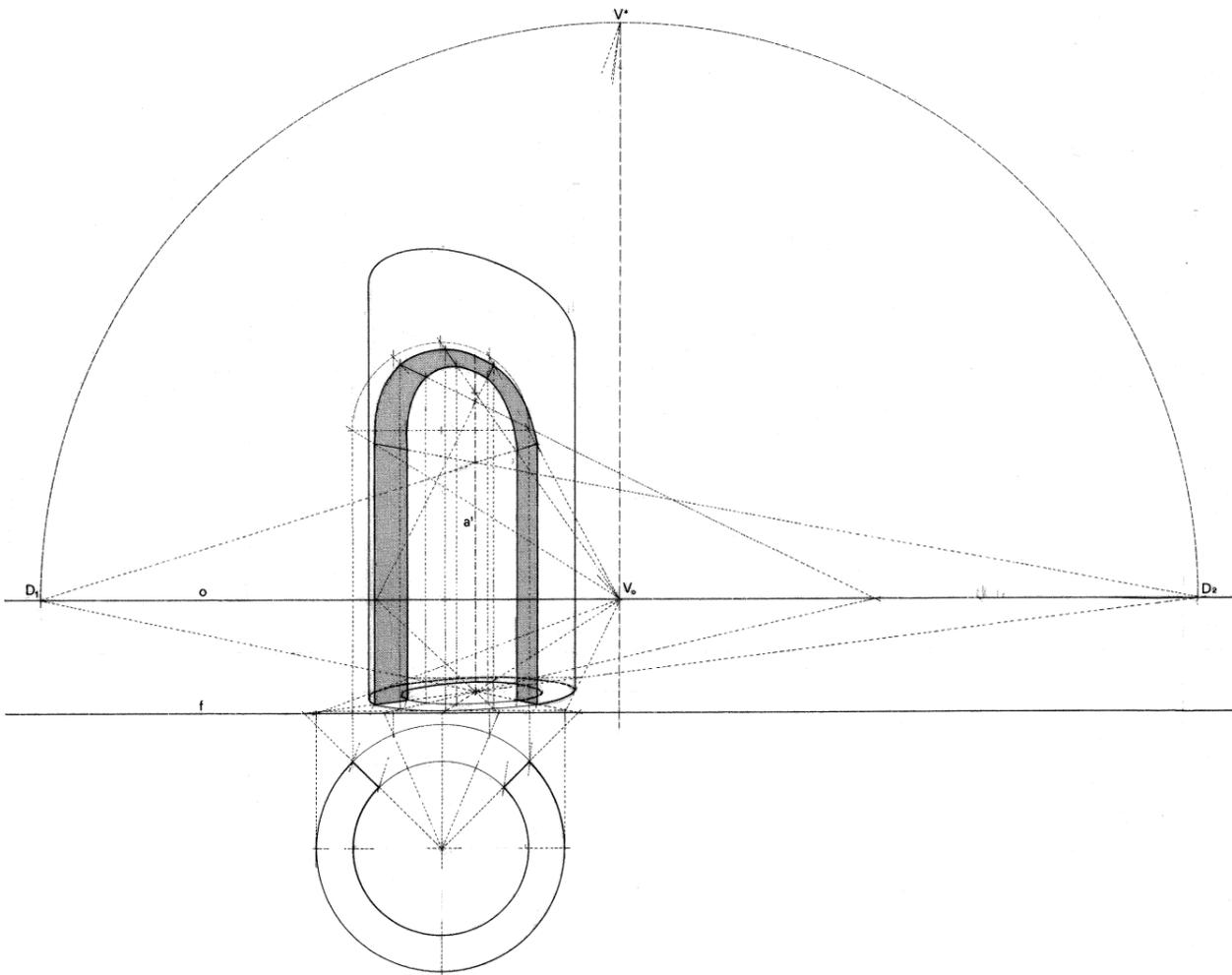


Fig. 68

cono direttore. È possibile tuttavia rappresentare l'elicoide assegnando del cono il solo angolo che le generatrici formano con l'asse: costruita nel *metodo di Monge*

l'elica direttrice (cfr. 2.3.3.) e tracciata una generatrice $g \equiv MN$ contenuta nel piano di fronte in modo che la seconda proiezione M_2N_2 formi con l'asse a_2 (fig. 69) l'angolo dato, ogni altra generatrice si può

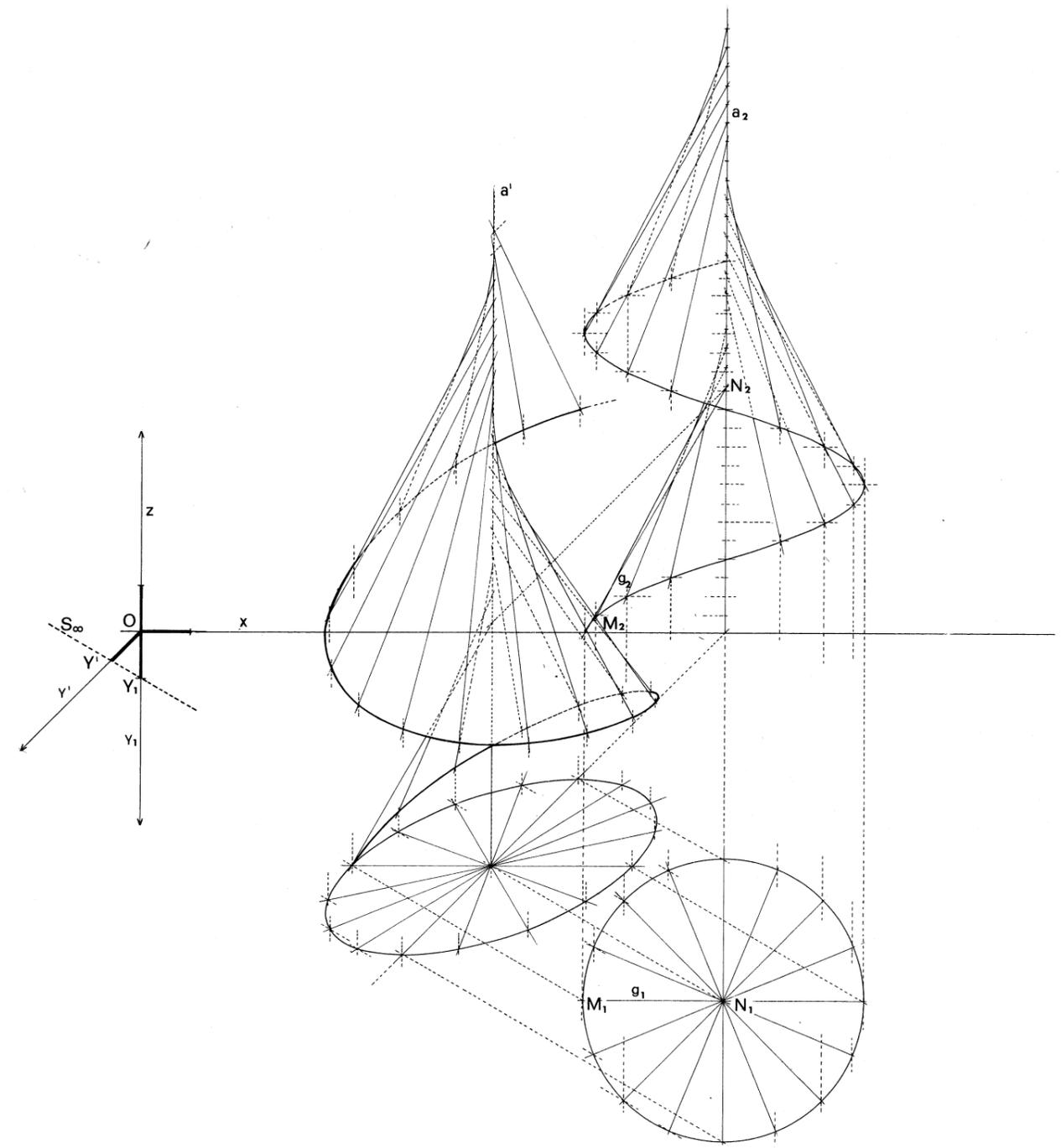


Fig. 69

costruire congiungendo ciascun punto dell'elica con il punto della relativa suddivisione dell'asse, in modo che la differenza delle quote dei due punti si mantenga sempre uguale a quella dei punti M e N della generatrice g .

Se limitiamo la rappresentazione dell'elicoide alla sola falda inferiore, costituita quindi da semirette generatrici, e consideriamo di esse i soli segmenti che hanno l'altro estremo sull'elica direttrice, il *primo contorno apparente* è costituito dal cerchio prima proiezione dell'elica, e il *secondo contorno* da archi della sinusoide seconda proiezione dell'elica, raccordati dalle linee curve ottenute come involuppo delle generatrici più esterne.

La rappresentazione *assonometrica*, trasformata omologica di quella mongiana, si costruisce mediante l'immagine dell'elica direttrice e delle generatrici necessarie alla costruzione delle linee-involuppo (cfr. fig. 69).

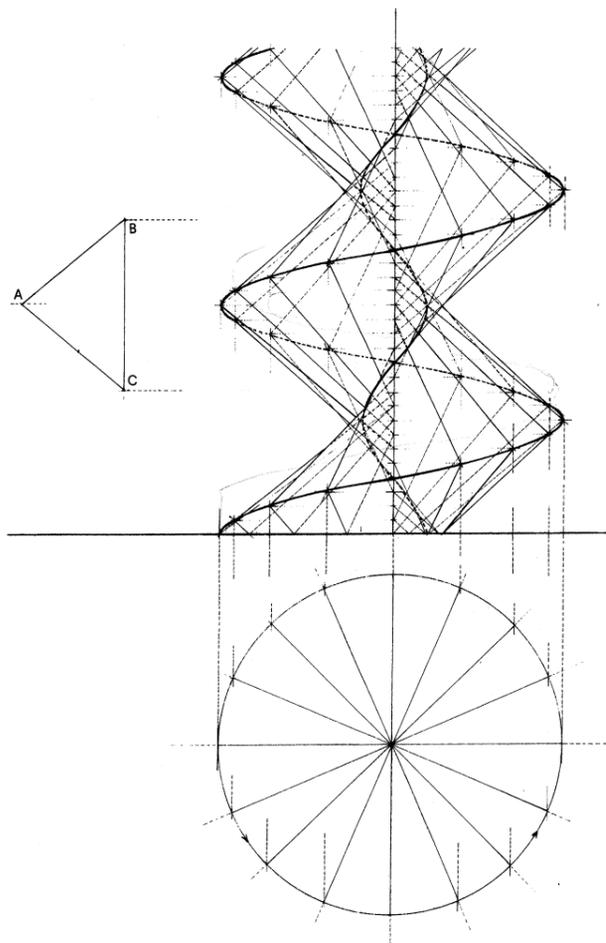


Fig. 70

L'*elicoide gobbo* caratterizza la *vite a filetto triangolare*, la cui superficie è costituita dalle falde opposte di due elicoidi coassiali, aventi in comune l'elica direttrice e il cono direttore. L'attributo 'triangolare' deriva dal fatto che tale superficie può considerarsi generata dal moto elicoidale del vertice A di un triangolo isoscele avente la base BC parallela all'asse a (fig. 70): allora i due lati uguali descriveranno porzioni di due elicoidi obliqui con le generatrici inclinate, in un verso e nell'altro, di un angolo uguale all'angolo alla base del triangolo dato. Il passo delle eliche descritte dai vertici del triangolo è il *passo* della vite, mentre le due porzioni di elicoidi descritti dai due lati uguali ne costituiscono il *filetto*.

8. Le direttrici curvilinee della *volta a sbieco* sono due archi semicircolari uguali in piani paralleli, e la direttrice rettilinea è la *retta normale ai due piani*, condotta per il punto medio del segmento della retta C_1C_2 che congiunge i centri, essendo tale retta non ortogonale ai piani dei semicerchi (fig. 71).

Allora ogni generatrice si determina costruendo un piano ausiliario α passante per un punto P del primo arco e per la direttrice rettilinea d , e detto Q il punto in cui la retta intersezione di α con il piano del se-

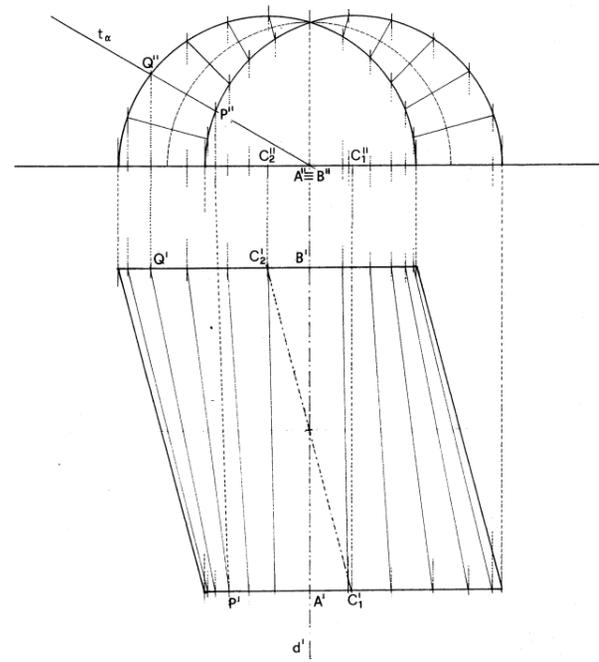


Fig. 71

condo arco seca quest'ultimo, la retta PQ è la generatrice cercata. Facendo variare il punto P sul relativo arco si costruiscono altrettante generatrici, che infatti si appoggiano alla retta d perché complanari con essa, e ai due semicerchi perché congiungono nell'ordine punti dell'uno con punti dell'altro.

Nella figura 72 la volta a sbieco è rappresentata in *assonometria isometrica*: una delle due direttrici circolari, data nel piano coordinato yz , ha come immagine la semiellisse affine all'arco circolare nella nota omologia di ribaltamento; l'altro arco, appartenente a un piano β parallelo ad yz , è costruita come omologa della prima nella traslazione di punti corrispondenti C'_1 e C'_2 ; l'immagine d' della direttrice $d \equiv AB$ ortogonale ai due piani, è dunque parallela all'asse x' . Nello spazio, ciascun piano ausiliario α , passante per la direttrice d e per le diverse posizioni del punto

P variabile sul primo arco, è individuato dalle rette a e b , intersezioni rispettive di α con i piani dei cerchi, essendo a quella che congiunge P con il punto A della direttrice d , mentre b è la parallela ad a per il punto B della stessa direttrice; nell'immagine la retta b' interseca la seconda semiellisse nel punto Q' e dunque la retta $P'Q'$ è l'immagine della generatrice PQ . Si osservi che la retta a' coincide con la terza traccia del piano α , mentre le prime due tracce, di cui una coincidente con la direttrice d , sono parallele all'asse x' , appartenendo ogni piano ausiliario α al fascio di asse d (la terza traccia di d , non presente nella figura 72, cade al di sotto dell'asse x , sul piano xy). Al variare del punto P e delle coppie di rette del tipo a', b' del piano variabile, vengono individuati i corrispondenti punti Q' e quindi le successive generatrici della superficie.

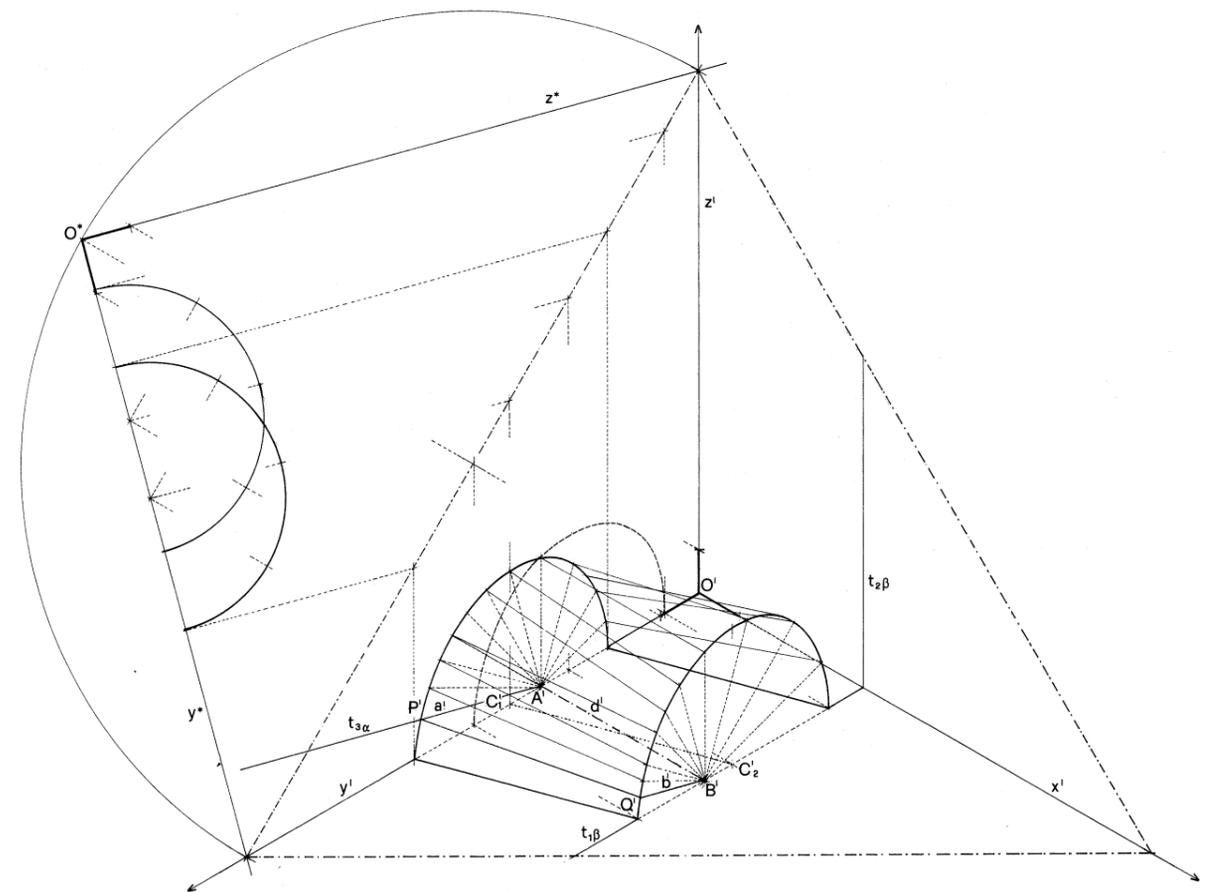


Fig. 72

3.5 Elicoidi cerchiati

1. *Definizioni e genesi.* Appartengono alla famiglia degli *elicoidi*, oltre a quelli già studiati come superfici rigate (cfr. 3.4.4.,7.), una serie di altre superfici ad andamento elicoidale, variamente adottate in architettura, la cui linea generatrice è un *cerchio* (più propriamente una *circonferenza*): si tratta degli *elicoidi cerchiati* ottenuti dal moto di un cerchio il cui centro percorre un'elica cilindrica; secondo la posizione del piano del cerchio mobile e della misura del raggio rispetto alle dimensioni dell'elica, gli elicoidi assumono aspetti diversi.

Gli elicoidi cerchiati propriamente detti sono la *colonna torsa* e la *vite di Saint Gilles*, mentre il *serpentino*, generato invece dal moto elicoidale di una sfe-

ra, può considerarsi appartenente alla stessa famiglia, se sostuiamo la sfera con un suo opportuno cerchio massimo.

2. La superficie della *colonna torsa* è generata dal moto di un *cerchio* il cui centro percorre un'elica cilindrica ad asse verticale mentre il suo piano si mantiene *perpendicolare all'asse*, dunque orizzontale. Rappresentata nel *metodo di Monge*, la colonna assume aspetti diversi secondo che lasci uno spazio vuoto al suo interno, si avvolga su se stessa, oppure intersechi la propria superficie: in prima proiezione la superficie è rappresentata da due cerchi concentrici γ e δ quali linee di involuppo, esterna e interna, delle proiezioni del cerchio generatore nelle diverse posizioni, ed essendo i raggi di γ e δ rispettivamente

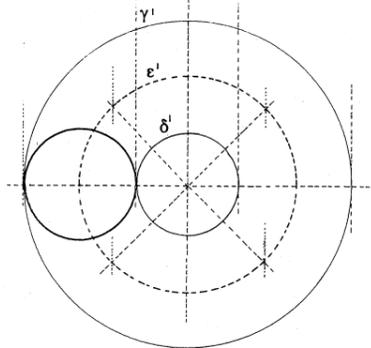
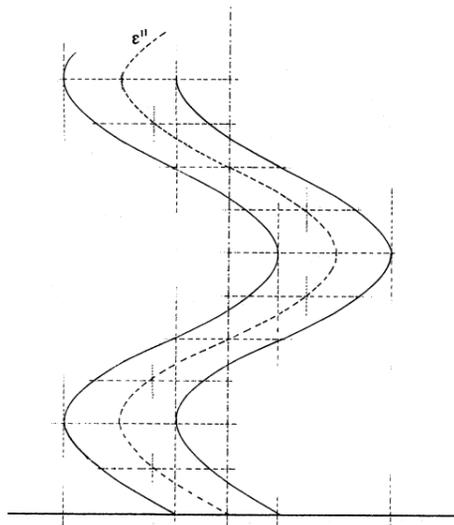


Fig. 73 a

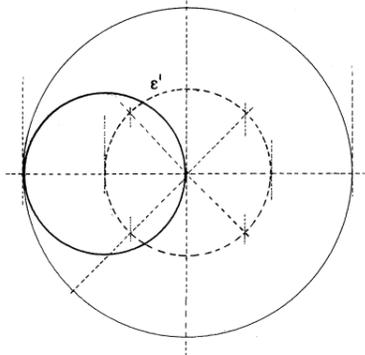
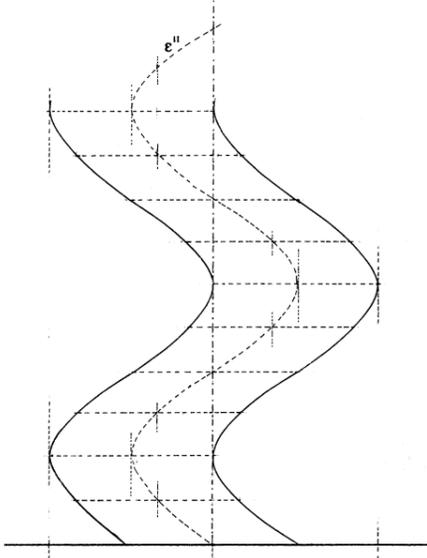


Fig. 73 b

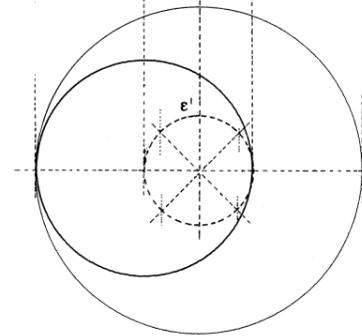
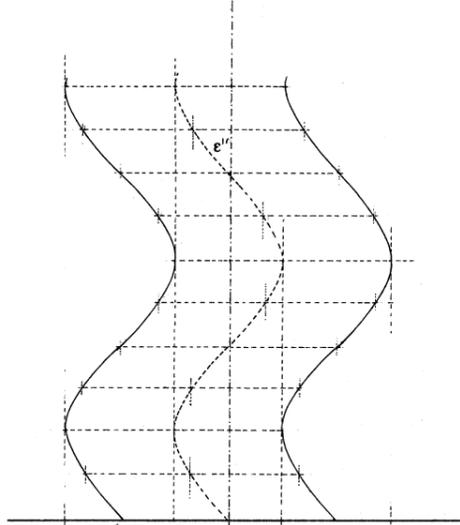


Fig. 73 c

uguali alla somma e alla differenza $R \pm r$ tra il raggio R del cerchio ϵ' - prima proiezione dell'elica percorsa dal centro - e il raggio r del cerchio generatore, le tre condizioni suddette si verificano secondo che il raggio R sia nell'ordine maggiore, uguale o minore del raggio r (figg. 73 a, b, c). Negli ultimi due casi il *primo contorno* è allora costituito dal solo cerchio esterno, essendo quello interno rispettivamente ridotto a un punto o del tutto assente: una sezione della colonna con un piano orizzontale è rappresentata evidentemente nei tre casi, dal cerchio generatore appartenente a quel piano.

Costruita la sinusoida ϵ'' seconda proiezione dell'elica dei centri (cfr. 2.3.3.), il *secondo contorno* della

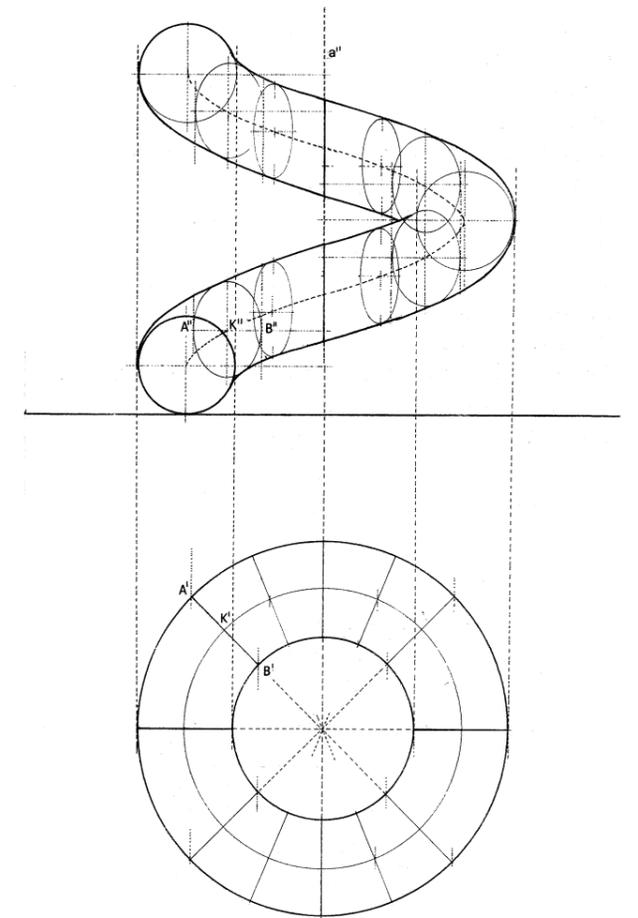


Fig. 74

colonna è costituito da due altre sinusoidi uguali alla prima, i cui punti si ottengono staccando su rette orizzontali condotte per i corrispondenti punti di ϵ'' , da una parte e dall'altra, segmenti uguali al raggio r del cerchio generatore, mentre i segmenti somma $r + r$ rappresentano in seconda proiezione le diverse posizioni dello stesso cerchio.

3. La *vite di Saint Gilles*, assume particolare interesse costituendo parte della sua superficie l'intradosso della volta che copre scale elicoidali, e che perciò è detta anche *volta elicoidale* (cfr. 4.3.1.). Il cerchio generatore appartiene a un piano passante per l'asse di un'elica, mentre il suo centro percorre l'elica stessa. Anche qui il *primo contorno della proiezione mongiana* è costituito da due cerchi concentrici di raggi uguali rispettivamente alla somma e alla diffe-

renza $R \pm r$ (essendo nell'ordine R e r i raggi dell'elica e del cerchio generatore), mentre il cerchio ϵ' rappresenta l'elica dei centri (fig. 74); il *secondo contorno apparente* è costituito dalle due curve-inviluppo delle ellissi che rappresentano in seconda proiezione posizioni successive del cerchio generatore: allora poiché le prime proiezioni di tali ellissi coincidono con quei diametri del cerchio generatore che, nelle diverse posizioni, appartengono alle tracce dei rispettivi piani passanti per il centro, in seconda proiezione restano cerchi quando appartengono al piano di fronte; si riducono a segmenti verticali

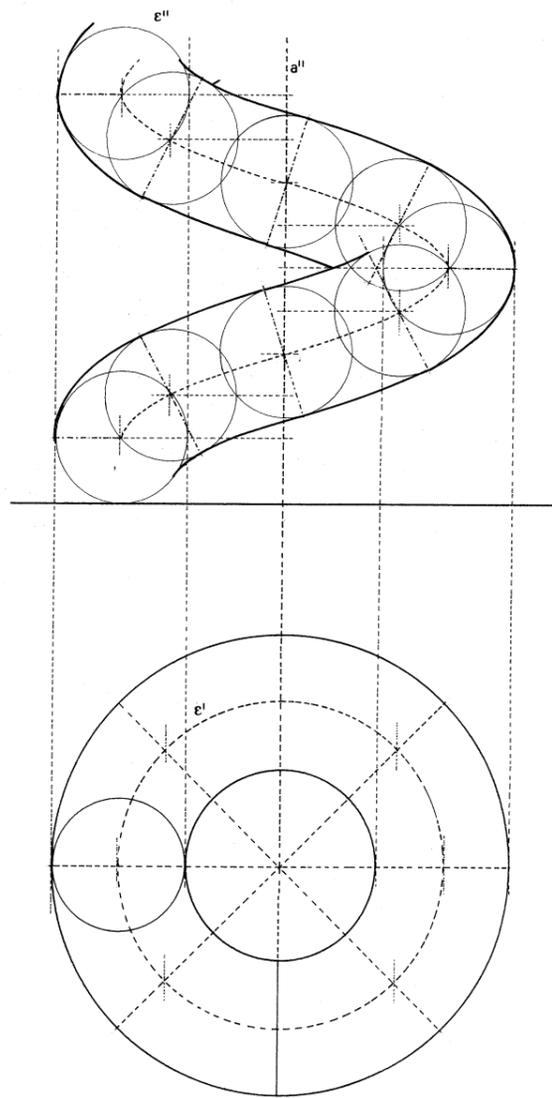


Fig. 75

uguali al diametro, quando appartengono al piano di profilo; nelle altre posizioni sono ellissi, il cui asse maggiore, sempre verticale, è uguale al diametro del cerchio, mentre l'asse minore, evidentemente orizzontale, ha lunghezza gradualmente decrescente, da quella massima – uguale all'asse maggiore – a quella nulla, relative alle due posizioni estreme suddette; ciascuno degli assi minori delle ellissi intermedie, ad esempio di quella di centro K'' , si costruisce considerando il piano diametrale cui appartiene, che in quanto tale è un piano perpendicolare a π_1 ; i punti A'' , B'' sulla retta orizzontale per K'' , seconde proiezioni dei punti A' , B' in cui la prima traccia del piano interseca i due cerchi prima proiezione dell'elicoide, sono gli estremi dell'asse minore.

4. Il *serpentino*, come abbiamo detto, è un elicoide generato dal moto di una sfera il cui centro percorre un'elica cilindrica; ma è possibile pensare questa superficie come generata dal movimento di un *cerchio massimo della sfera*, il cui piano durante il moto si mantenga *perpendicolare all'elica* (cioè perpendicolare alla tangente in ciascun punto della curva), mentre il centro percorre l'elica stessa. Anche in questo caso il *primo contorno apparente* della *representazione mongiana* è costituito dai due cerchi concentrici di rispettivi raggi $R \pm r$, dove R ed r sono nell'ordine il raggio del cerchio ϵ' , prima proiezione dell'elica dei centri, e del cerchio generatore (fig. 75). La seconda proiezione del serpentino è costituita da due curve le cui distanze da ϵ'' , misurate in ciascun punto sulla normale alla tangente dell'elica ϵ'' da una parte e dall'altra, siano uguali al raggio r del cerchio generatore.

3.6 I poliedri regolari

1. *Definizioni e proprietà.* Dicesi *poliedro* ogni solido delimitato da superfici piane poligonali dette *facce*, i cui lati e vertici sono detti rispettivamente *spigoli* e *vertici* del poliedro. Ogni spigolo appartiene a due facce consecutive, mentre due facce non consecutive possono avere in comune un vertice oppure nessun punto. Vale per i poliedri la *formula di Eulero*: $V - S + F = 2$, dove V , S e F indicano nell'ordine il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce. Si dice *pseudo-regolare* ogni poliedro le cui facce sono poligoni aventi ugual numero di lati e i cui angoloidi hanno ugual numero di facce; sono detti infine *regolari* i poliedri convessi le cui facce sono poligoni regolari e necessariamente uguali, come sono uguali gli angoloidi. Il numero dei *poliedri regolari* –

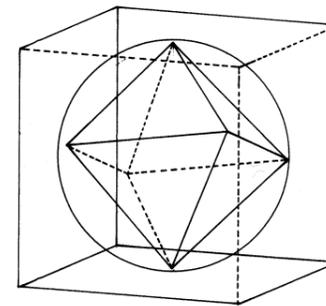


Fig. 76a

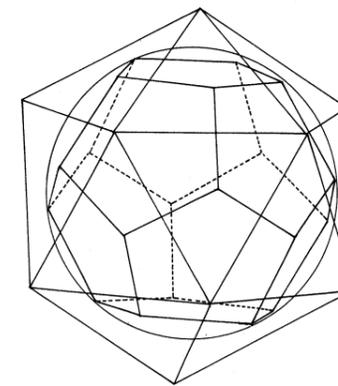


Fig. 76b

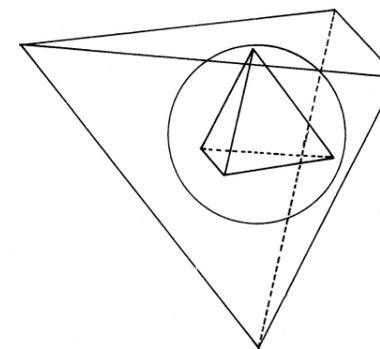


Fig. 76c

detti anche *solidi platonici* per essere noti sin dall'epoca di Platone – è cinque; precisamente essi sono: il *tetraedro*, le cui facce sono quattro triangoli equilateri; l'*esaedro* o *cubo*, sei quadrati; l'*ottaedro*, otto triangoli; il *dodecaedro*, dodici pentagoni; l'*icosaedro*, venti triangoli, sempre tutti equilateri.

Non esistono oltre a questi altri poliedri regolari: si dimostra infatti che le facce possono avere ciascuna al più cinque lati, essere cioè come abbiamo visto triangoli, quadrati, o pentagoni: infatti in ogni vertice non possono concorrere meno di tre facce, e se queste fossero ad esempio esagonali, essendo ciascun angolo dell'esagono regolare uguale a 120° , in ogni vertice si avrebbe un angoloido di 360° , cioè un angolo piatto e quelle facce giacerebbero su uno stesso piano; la concorrenza in un vertice di poligoni a più lati appare altrettanto impossibile per essere i relativi angoli via via di ampiezza maggiore.

I poliedri regolari sono tutti *inscrivibili nella sfera*; inoltre i piani tangenti la sfera in ciascun punto, vertice di un poliedro inscritto, costituiscono le facce di un altro poliedro regolare circoscritto alla stessa sfera: ogni poliedro circoscritto ha dunque tante facce quanti sono i vertici di quello inscritto, ed entrambi hanno lo stesso numero di spigoli; infine il centro della sfera è anche il centro del poliedro. L'esaedro e l'ottaedro possono essere l'uno inscritto e l'altro circoscritto alla stessa sfera (il primo ha infatti otto vertici, quante sono le facce dell'altro), e viceversa (il secondo ha sei vertici, quante le facce del primo); in modo analogo si comportano il dodecaedro e l'icosaedro, mentre al tetraedro inscritto corrisponde ancora un tetraedro circoscritto (figg. 76a, b, c): vale

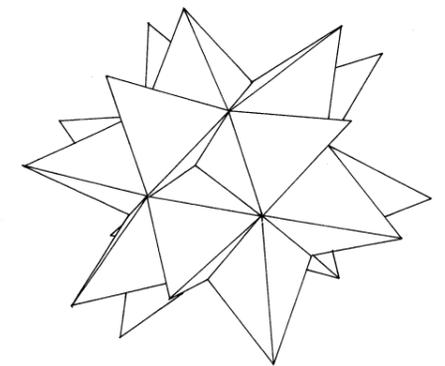


Fig. 76d

dunque per queste coppie di poliedri il *principio di dualità* (S.- V., p. 70), e per lo stesso principio il tetraedro è duale di se stesso. Il tetraedro inoltre, a differenza degli altri poliedri, non è simmetrico rispetto al proprio centro, poiché la retta che congiunge un vertice con il centro non passa per un altro vertice, ma per il centro della faccia opposta.

Dai cinque solidi platonici è possibile ottenerne altri non regolari operando opportune sezioni piane o costruendo su ciascuna faccia una piramide; in questo ultimo caso si ottengono i cosiddetti *poliedri stellari* (fig. 76d).

2. *Esaedro o cubo*. La figura 77 rappresenta nel *metodo di Monge* il più noto dei poliedri regolari, cioè

un *esaedro* (o *cubo*) disposto con una faccia in un piano $\alpha(t_\alpha, s_\alpha)$ perpendicolare a π_2 , e di cui siano assegnate la misura del lato e le proiezioni di un vertice $A(A'', A')$ di quella faccia: costruito su π_1 il quadrato in vera forma come ribaltato della stessa faccia, mediante la nota *affinità omologica ortogonale* di asse s_α e punti corrispondenti A^*, A' , se ne determini la prima proiezione e da questa le seconde proiezioni su t_α degli altri vertici; i vertici della faccia opposta si determinano staccando dai primi sulle perpendicolari a t_α segmenti uguali al lato del quadrato assegnato; in prima proiezione la stessa faccia si costruisce come omologa della precedente nella traslazione di punti corrispondenti A', E' , dove E' si determina come prima proiezione del punto E'' .

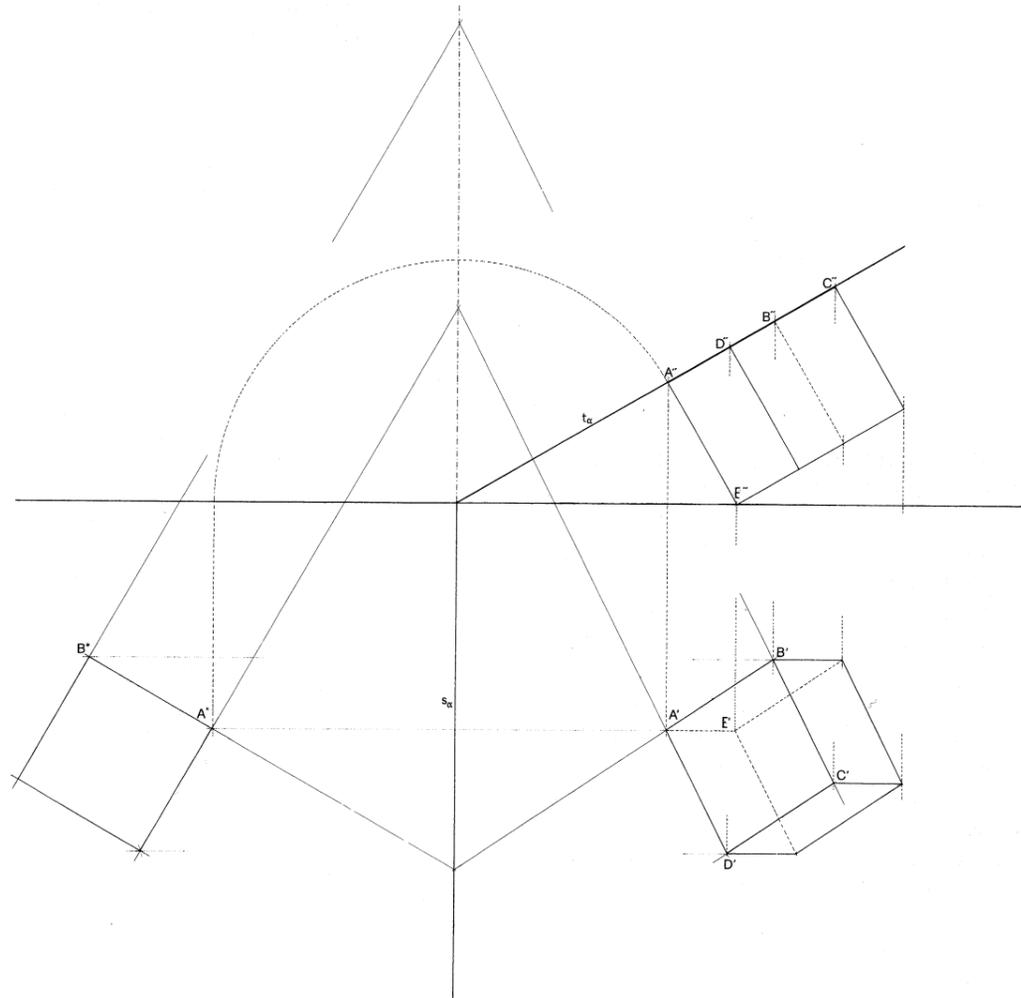


Fig. 77

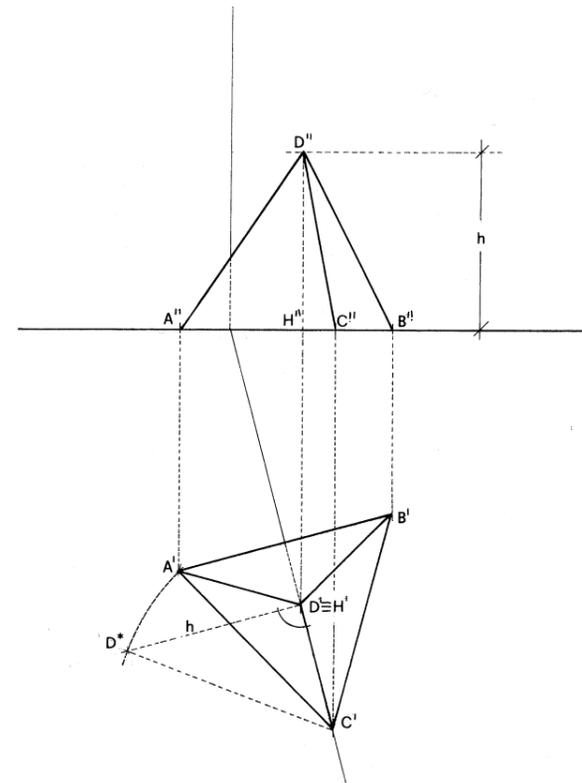


Fig. 78

3. *Tetraedro*. Assegnato un triangolo equilatero, faccia del tetraedro sul piano π_1 del *riferimento mongiano*, i segmenti di rette che congiungono ciascun vertice con il punto D' , centro del triangolo e prima proiezione del quarto vertice, completano la prima immagine del solido (fig. 78); per costruire la seconda proiezione è sufficiente determinarne l'altezza: allo scopo si ribalti il piano verticale che proietta su π_1 uno dei lati obliqui, ad esempio CD , e con esso il triangolo rettangolo $C'H'D$ in $C'H'D^*$, la cui ipotenusa $C'D^*$ sia uguale a un lato, ad esempio $C'A'$, del triangolo-base: il secondo cateto $H'D^*$ fornisce l'altezza cercata h , cioè la quota del vertice D , che consente di costruire la seconda proiezione D'' di questo vertice e dell'intero tetraedro.

4. *Ottaedro*. Posto il solido con un vertice E su π_1 e tale che il vertice opposto F appartenga alla semiretta verticale per E , la prima proiezione è costituita da un quadrato di lato uguale allo spigolo dell'ottaedro,

che si può considerare come prima proiezione di un quadrato $ABCD$ base comune a due piramidi ideali di vertici rispettivi E ed F e le cui facce laterali sono costituite rispettivamente dalle quattro facce inferiori dell'ottaedro che concorrono in E , e dalle quattro superiori che concorrono in F : nelle diagonali del quadrato coincidono allora le prime immagini degli otto spigoli obliqui. Il *secondo contorno apparente* è un rombo (tale contorno è ancora un quadrato se la faccia $ABCD$ è disposta in modo che i lati formino un angolo di 45° rispetto alla linea di terra), la cui diagonale verticale $E'F'$ è uguale a quella del quadrato essendo uguali le distanze di ciascun vertice dal vertice opposto.

Assegnata dunque la prima proiezione $A'B'C'D'$ di quadrato, il cui centro sia il punto $E' \equiv F'$ (fig. 79), la seconda proiezione dell'ottaedro si costruisce assumendo la quota del punto F uguale alla misura del segmento $A'C'$ (o $D'B'$).

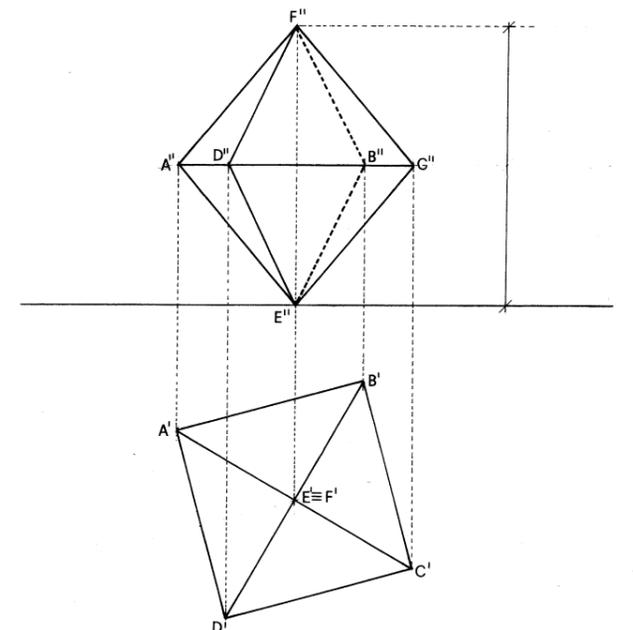


Fig. 79

5. *Dodecaedro*. Data una faccia pentagonale $ABCDE$ in π_1 , con un lato, ad esempio $A'E'$, parallelo alla linea di terra (fig. 80), la faccia opposta, ruotata rispetto alla prima di 180° , appartiene a un piano ancora orizzontale, mentre le altre dieci facce sono disposte in modo che cinque di esse abbiano ciascuna un lato sul perimetro della faccia orizzontale inferiore e le altre cinque facce abbiano un lato sul perimetro della faccia superiore; inoltre i due gruppi dei cinque vertici di quelle facce, opposti a quei lati, appartengono ciascuno a un ideale pentagono orizzontale. Tale circostanza consente la costruzione della prima immagine del poliedro: infatti i cinque vertici del pentagono ideale più basso (come i cinque del pentagono più alto) si trovano in prima proiezione sul cerchio circoscritto a tale pentagono, precisamente ciascun vertice, ad esempio L' , cade sul raggio che passa per un vertice del pentagono-faccia dato su π_1 , e si determina nel modo seguente: considerando la faccia $ABCDE$ come la ribaltata della faccia $ABLMN$ ad essa adiacente lungo il lato comune AB , è possibile costruire il punto L' come omologo del vertice E' , nell'affinità ortogonale avente per asse il lato comune $A'B'$: dunque L' deve trovarsi simultaneamente sulla perpendicolare all'asse $A'B'$ condotta per il punto E' , e sul raggio per A' ; tracciato il cerchio circoscritto al primo pentagono ideale, questo si può costruire con un vertice in L' e i lati paralleli a quelli del primo pentagono base: i vertici di questo nuovo pentagono sono anche vertici delle prime cinque facce laterali.

I cinque vertici residui si possono determinare sulla circonferenza circoscritta mediante i raggi condotti per i vertici della faccia superiore: i segmenti che congiungono nell'ordine i dieci punti trovati, insieme con i segmenti dei raggi compresi tra i vertici dei due pentagoni-basi del poliedro completano la prima proiezione del dodecaedro.

Per costruire la seconda proiezione è sufficiente determinare le quote dei due gruppi di cinque vertici dei due pentagoni ideali: la quota dei primi si può conoscere ribaltando il piano che proietta un lato in prima proiezione, ad esempio, il lato DQ , e con esso il triangolo rettangolo DHQ in $D'H'Q^*$, la cui ipotenusa $D'Q^*$ sia uguale al lato del pentagono base e dunque al lato del dodecaedro: l'altro cateto fornisce la quota h di Q e degli altri quattro vertici che in seconda proiezione cadono sulla retta orizzontale di quota h e sulle relative rette di richiamo. Ribaltando ora il piano che proietta su π_1 , ad esempio, il lato RS sul piano orizzontale di quota h e, costruendo il triangolo rettangolo $S'R'R^*$, il cateto $R'R^*$ fornisce la diffe-

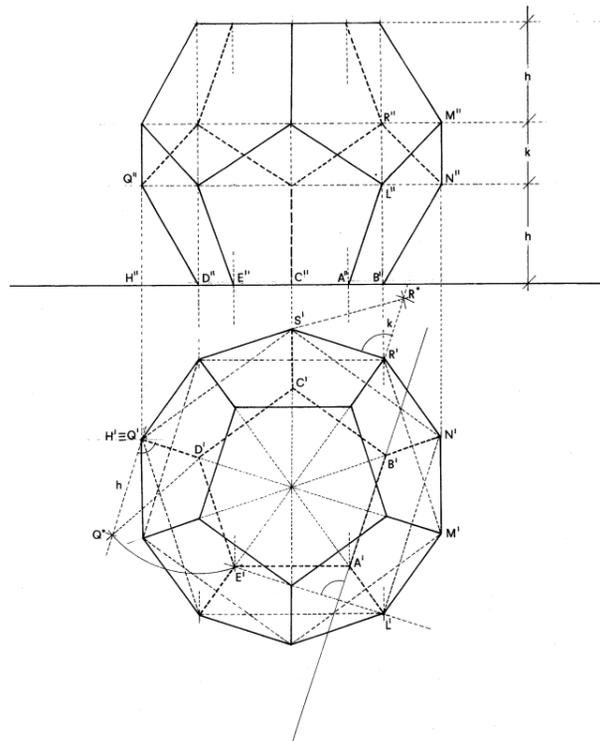


Fig. 80

renza di quota k tra i primi e i secondi cinque vertici, dei quali ultimi si possono ora costruire le seconde proiezioni; infine i vertici della base superiore cadono su una retta orizzontale di quota $2h+k$ e consentono di completare la rappresentazione del dodecaedro.

6. *Icosaedro*. Se disponiamo il solido con l'asse perpendicolare al primo piano di proiezione π_1 , il vertice O su π_1 e il vertice opposto evidentemente sulla stessa perpendicolare, questi punti sono anche i vertici di due piramidi a basi pentagonali in due piani orizzontali distinti, le facce di ciascuna delle quali coincidono con cinque facce dell'icosaedro; i segmenti che congiungono ciascun vertice del primo pentagono-base con due vertici del secondo (e viceversa) sono lati delle altre dieci facce dell'icosaedro, che così ne completano la rappresentazione. Date in prima proiezione le due basi pentagonali delle suddette piramidi – che in quanto orizzontali si proiettano su π_1 in vera grandezza –, disposte cia-

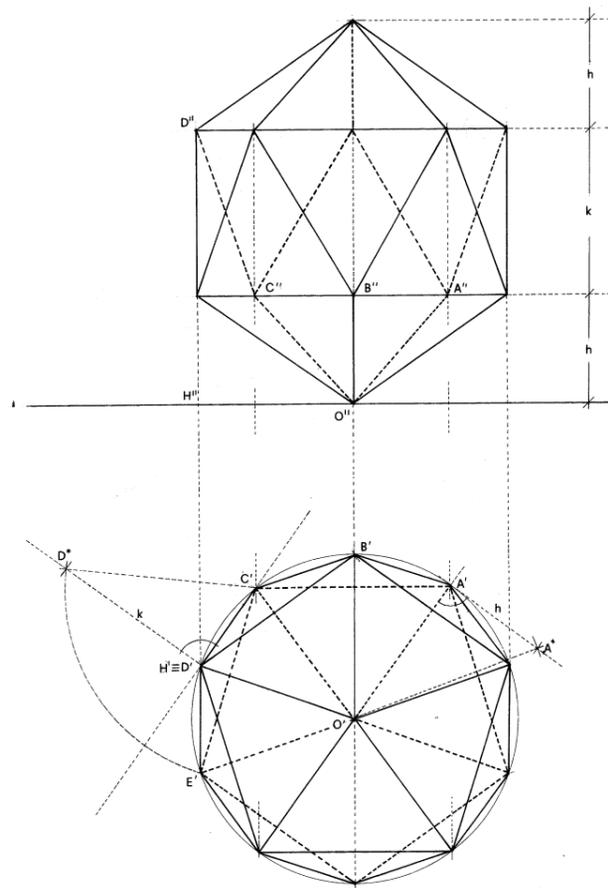


Fig. 81

scuna con un lato parallelo alla linea di terra e ruotata rispetto all'altra di 180° , i raggi di quegli stessi pentagoni e i segmenti che congiungono nell'ordine i vertici dell'uno e dell'altro completano la prima proiezione del solido (fig. 81). Per costruire la seconda proiezione, è sufficiente determinare le quote dei due piani orizzontali dei due pentagoni: allo scopo, ribaltato il piano che proietta su π_1 uno spigolo obliquo, ad esempio OA , e con esso il triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa OA^* sia uguale al lato del pentagono dato – e quindi al lato di ciascun triangolo-faccia –, l'altro cateto $A'A^*$ fornisce la quota h dei cinque vertici del primo pentagono-base. Per conoscere la quota del secondo pentagono ideale, si può ribaltare il piano che proietta ortogonalmente su π_1 uno spigolo obliquo, ad esempio CD , e con esso il triangolo

rettangolo $C'H'D$ in $C'H'D^*$, la cui ipotenusa $C'D^*$ sia uguale al lato $C'E'$ del poliedro: il cateto $H'D^*$ è uguale alla misura k , valore che, aggiunto ad h , fornisce la quota dei vertici della base della piramide superiore, consentendo la rappresentazione su π_2 delle dieci facce laterali; aggiungendo a questa quota ancora una volta la misura h si determina sulla verticale per O il vertice della seconda piramide, mediante il quale si completa la seconda proiezione dell'icosaedro.

3.7 Intersezione di due superfici

1. *Generalità*. In architettura, i cui spazi sono definiti da superfici murarie, piane e non, l'aspetto configurativo delle strutture è determinato, oltre che dalle superfici, soprattutto dalle loro reciproche intersezioni, che ne definiscono i limiti formali. La più semplice e comune linea-intersezione è quella tra due superfici piane, cioè la *linea retta*: sono evidentemente rettilinei tutti gli spigoli verticali e orizzontali, o comunque inclinati, che appartengono a coppie di parametri murari piani. Il *profilo di un arco* è l'intersezione di una superficie muraria, piana o curva, con una superficie cilindrica – l'intradosso dell'arco –, di cui quel profilo è una direttrice: se la parete è piana, il profilo dell'arco è evidentemente una *curva piana*; se la parete è curva, quel profilo, in quanto intersezione di due superfici curve, è invece una *curva sghemba* (cfr. 3.4.6.). Sono generalmente linee sghembe le intersezioni tra diversi tipi di volte, oppure quelle tra superfici murarie di forma cilindrica o conica.

Appare allora evidente come per la rappresentazione dell'architettura, tanto in sede di rilievo che in sede di progetto, sia prioritaria la conoscenza della genesi configurativa delle superfici e quindi delle curve che ne sono le reciproche intersezioni, affinché sia possibile la traduzione, nel piano del disegno, delle une e delle altre.

Se la linea intersezione di due superfici è una *curva algebrica*, si dice *ordine della curva* il prodotto degli *ordini* delle superfici stesse, cioè il prodotto dei due numeri che indicano il *grado* di ciascuna delle due equazioni delle superfici: così l'ordine della linea intersezione di due piani, superfici di ordine uno perché rappresentate da equazioni di primo grado, è ancora uno, e dunque, come è evidente, trattasi di una *retta*; l'intersezione di un piano (superficie di ordine uno) e una quadrica (superficie di ordine due) – specializzata, come i coni e i cilindri, o non – è una curva ancora del secondo ordine, cioè una *conica*;

l'intersezione di due superfici quadriche, entrambe del secondo ordine, è una curva generalmente sghemba del quarto ordine, detta perciò *quartica*. (cfr. 2.3.2.).

La *quartica* è generalmente costituita da due rami distinti; ma se le superfici si toccano in un punto, la curva è continua e ivi presenta un punto doppio (cfr. 2.1.2.); oppure, se l'intersezione è parziale, la curva è continua e priva di punto doppio; se infine le due superfici quadriche hanno in comune una conica, la residua intersezione è costituita da una ulteriore conica, la quartica cioè si spezza in *due curve piane del secondo ordine*. Nel caso di due coni che abbiano una generatrice in comune, la quartica intersezione, costituita in parte da una retta – la generatrice comune –, è completata da una curva sghemba del terzo ordine, detta appunto *cubica sghemba*.

Lo studio delle curve, intersezioni di due superfici, oltre che indispensabile per la conoscenza e la rappresentazione degli spazi dell'architettura, appare ancora necessario per la *determinazione delle ombre*, in particolare di ombre autoportate da elementi architettonici su se stessi o su altre superfici curve (Parte IV., 5.1.).

Come sappiamo, il mezzo per la costruzione di una linea è quello della determinazione di alcuni suoi punti e/o tangenti: per la linea retta, sono evidentemente necessari e sufficienti due punti; per un (arco di) cerchio tre punti, o due punti e la tangente in uno di essi, oppure un punto e il centro, o ancora il centro e la misura del raggio. Tuttavia solo la proiezione di una retta è ancora una retta (S.-V., p. 22), mentre qualsiasi altra linea piana viene rappresentata in vera forma solo se il suo piano è parallelo al piano iconico; se invece la curva, in particolare il *profilo di un arco circolare*, è contenuta in un piano obliquo rispetto al quadro, la sua immagine risulta deformata dalla proiezione in una semiellisse, e pertanto è necessario individuarne un numero maggiore di punti e/o tangenti, ricordando che il numero cinque di tali enti, necessario perché la conica dia determinata, ma insufficiente per il suo corretto tracciamento, ne consente tuttavia la costruzione di altri punti⁹.

Per la rappresentazione di una *curva sghemba*, intersezione di due superfici curve, si ricorre a un opportuno piano ausiliario variabile. Se le superfici sono entrambe rigate, il problema è più semplice quando le loro mutue posizioni consentono la scelta di un piano variabile che sechi entrambe le superfici secondo rette: i punti comuni alle rette intersezioni di quel piano con l'una e con l'altra superficie appartengono alla curva cercata.

2. *Intersezione di due quadriche*. Come abbiamo visto, la curva intersezione di due quadriche è in generale una *curva sghemba del quarto ordine* – detta perciò *quartica* – costituita generalmente da due rami. È ancora una *quartica* l'intersezione di due quadriche specializzate, come i coni e i cilindri, caso quest'ultimo frequente in architettura, (cfr. 4.2. e 4.3.), oppure nella costruzione delle ombre (Parte IV, 2.3.).

Se le superfici sono *due coni quadrici*, affinché il piano variabile li sechi entrambi secondo generatrici è necessario che tale piano contenga sia il vertice dell'uno che il vertice dell'altro, che appartenga cioè al fascio di piani il cui asse è la retta a che congiunge i vertici: i quattro punti (non sempre tutti reali) comuni di volta in volta alle coppie di generatrici, secondo cui l'uno e l'altro cono sono secati da ciascuno di tali piani, sono punti della quartica, generalmente due per ciascuno dei due rami della curva: le due generatrici, sezione di ciascuno dei coni con il piano variabile, sono quelle che congiungono i punti in cui la prima traccia del piano seca la direttrice in π_1 (detta anche *traccia del cono*), con il relativo vertice. A seconda che il punto S_a , prima traccia della retta a , cada all'interno di entrambe le tracce dei coni, di una sola, o all'esterno di entrambe si verificano rispettivamente i casi di *penetrazione mutua*, *penetrazione semplice*, *sfaldamento*. Nella figura 82 il piano α , la cui prima traccia s_α seca entrambe le tracce dei coni, fornisce un gruppo di quattro punti della quartica.

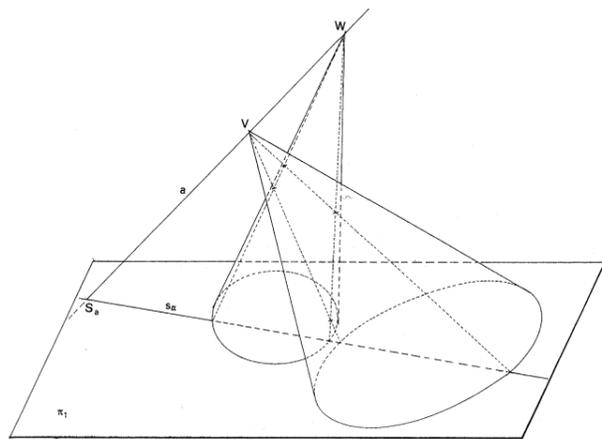


Fig. 82

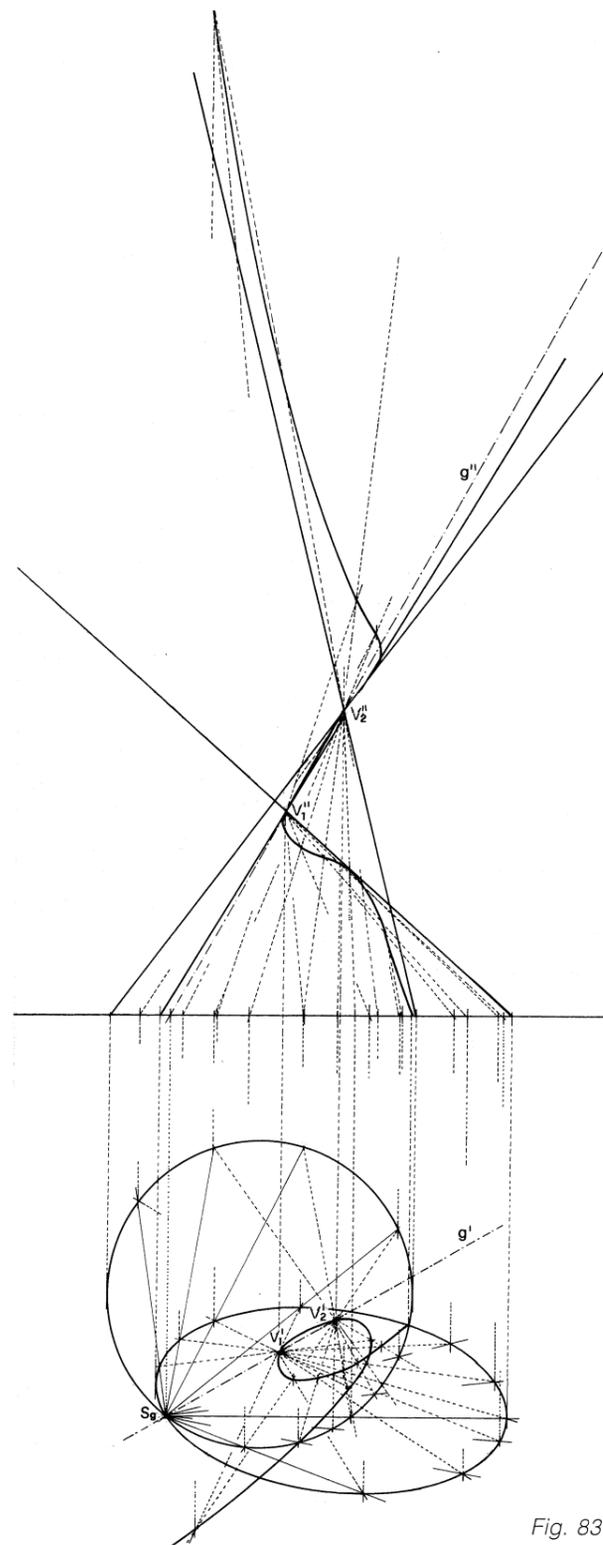


Fig. 83

Se i coni hanno in comune una generatrice, ma in questa non ammettono lo stesso piano tangente¹⁰, la quartica, come abbiamo visto, si spezza in una retta (la generatrice comune) e in una *cubica sghemba* (curva del terzo ordine, cfr. 2.3.2.). I piani ausiliari per la costruzione della cubica, appartenendo allora al fascio avente per asse la generatrice comune, essendo questa la retta che congiunge i vertici (fig. 83), mentre le prime tracce di quei piani appartengono al fascio di rette di centro S_g , prima traccia di quella generatrice; ogni piano seca ciascuno dei coni, oltre che nella generatrice comune, in una seconda: il punto comune alle due seconde generatrici, ulteriori sezioni del piano con l'uno e l'altro cono, appartiene alla cubica.

3. Per l'intersezione di *un cono e un cilindro* quadrici – ad esempio un cono circolare retto e un cilindro circolare retto, quest'ultimo con l'asse inclinato rispetto a π_1 , dati nel *metodo di Monge* (fig. 84) –, essendo la scelta più opportuna quella di un piano α variabile che intersechi entrambe le superfici secondo rette, tale piano deve appartenere al fascio avente per asse la retta che congiunge i due vertici V e W_∞ , rispettivamente proprio e improprio delle due superfici, cioè la retta a passante per il vertice V del cono e parallela alle generatrici del cilindro: anche qui la curva intersezione è in generale una quartica costituita da due rami distinti. Condotte rispettivamente per le due proiezioni V'' , V' del vertice del cono le rette a'' , a' parallele ciascuna alla proiezione omonima della direzione W_∞ , i piani ausiliari, come nei casi precedenti, hanno tutti la prima traccia s_α passante per la prima traccia S_a della retta a ; se la retta s_α interseca entrambe le tracce in π_1 (rispettivamente circolare e ellittica) del cono e del cilindro si ottengono quattro punti della quartica richiesta; quando la retta s_α passa per ciascuno degli eventuali punti comuni alle tracce-direttrici, i punti della curva contenuti in α si riducono a tre, di cui uno è quello comune alle direttrici; quando infine s_α è tangente ad una delle due direttrici, ad esempio in un punto T , si ottengono due soli punti, quelli in cui la generatrice passante per T della prima superficie interseca le due generatrici, sezioni del piano α con la seconda: in questi punti la prima generatrice risulta tangente a ciascun ramo della quartica. La curva si costruisce poi congiungendo opportunamente, in prima e in seconda proiezione, i punti ottenuti.

4. Dati due cilindri circolari di diametri diversi, se la giacitura comune alle generatrici dell'uno e dell'altro è quella orizzontale, il piano ausiliario variabile α , ancora orizzontale, interseca entrambi i cilindri secondo coppie di generatrici determinando quattro punti della *quartica*: i cerchi base dei due cilindri appartengono ai piani ortogonali a π_1 e pertanto le seconde proiezioni sono ellissi (fig. 85).

Se i due cilindri hanno in comune una ellisse, la quartica si spezza in due coniche, dunque la residua intersezione delle due superfici – come avviene per le quadriche non specializzate – è una seconda el-

lisce; e se i due cilindri hanno cerchi direttori di uguale diametro, la quartica si spezza in due ellissi uguali, circostanza che si verifica nelle superfici delle volte a crociera e a padiglione (cfr. 4.3.2 e 4.3.3.) Quando le generatrici dei due cilindri definiscono una giacitura diversa da quella orizzontale, la prima traccia di ognuno dei piani ausiliari deve passare per il punto $S_{2\infty}$, intersezione con π_1 della retta (impropria) a_∞ che congiunge i vertici (impropri) dei due cilindri: il punto $S_{2\infty}$ può determinarsi quale direzione della prima traccia di un qualunque piano definito dalle due direzioni dei vertici o, ciò che è lo stesso,

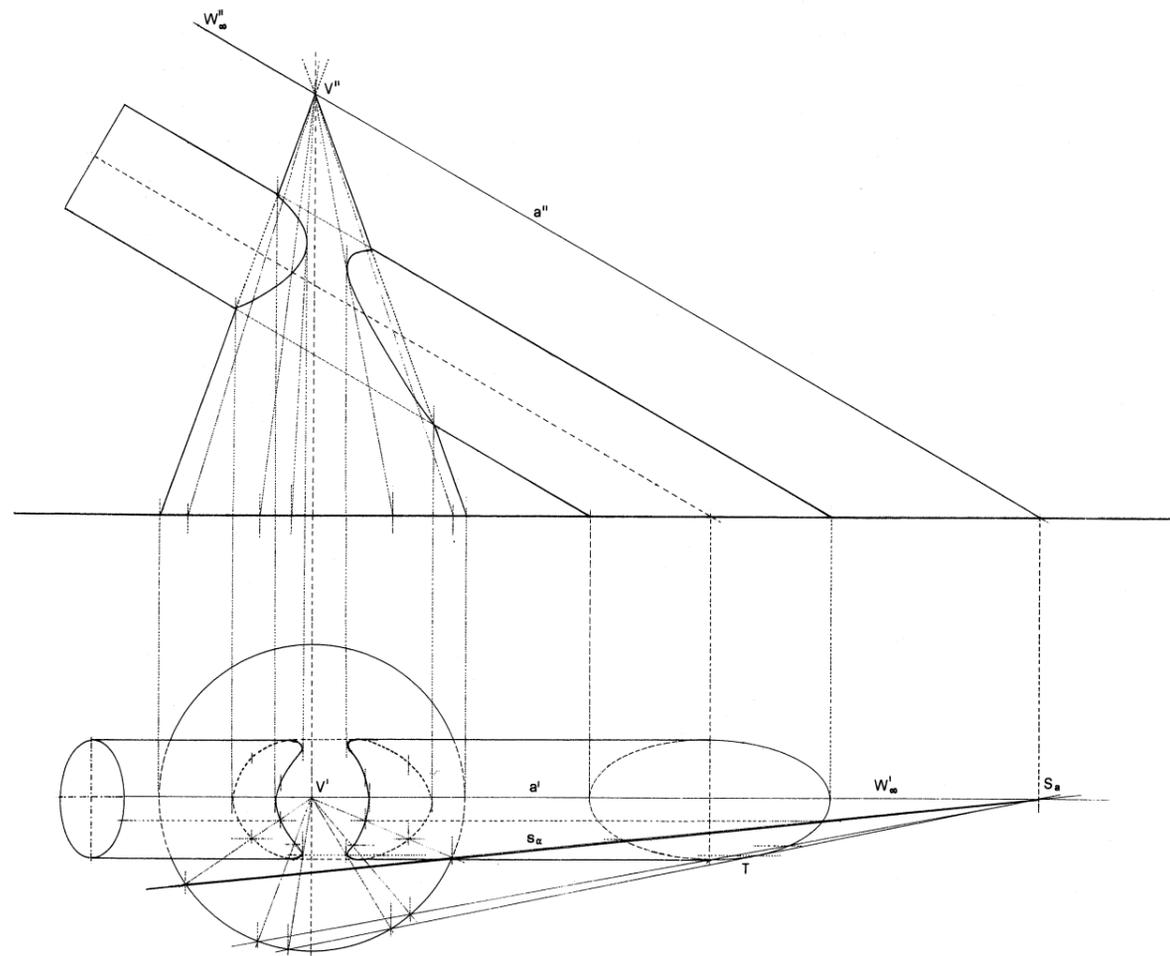


Fig. 84

dalle direzioni delle generatrici dei cilindri: allo scopo, condotte per un qualsiasi punto P le rette p e q rispettivamente parallele alle generatrici dell'uno e dell'altro cilindro, se ne congiungano le prime tracce S_p, S_q mediante la retta s_α il cui punto improprio $S_{2\infty}$ definisce la direzione della prima traccia del piano

ausiliario variabile α . Anche in questo caso la quartica intersezione può essere costituita da due rami distinti, da un solo ramo con un punto doppio, o da un solo ramo privo di punto doppio, secondo le mutue posizioni delle curve direttrici in π_1 dei due cilindri nonché della direzione di $S_{2\infty}$.

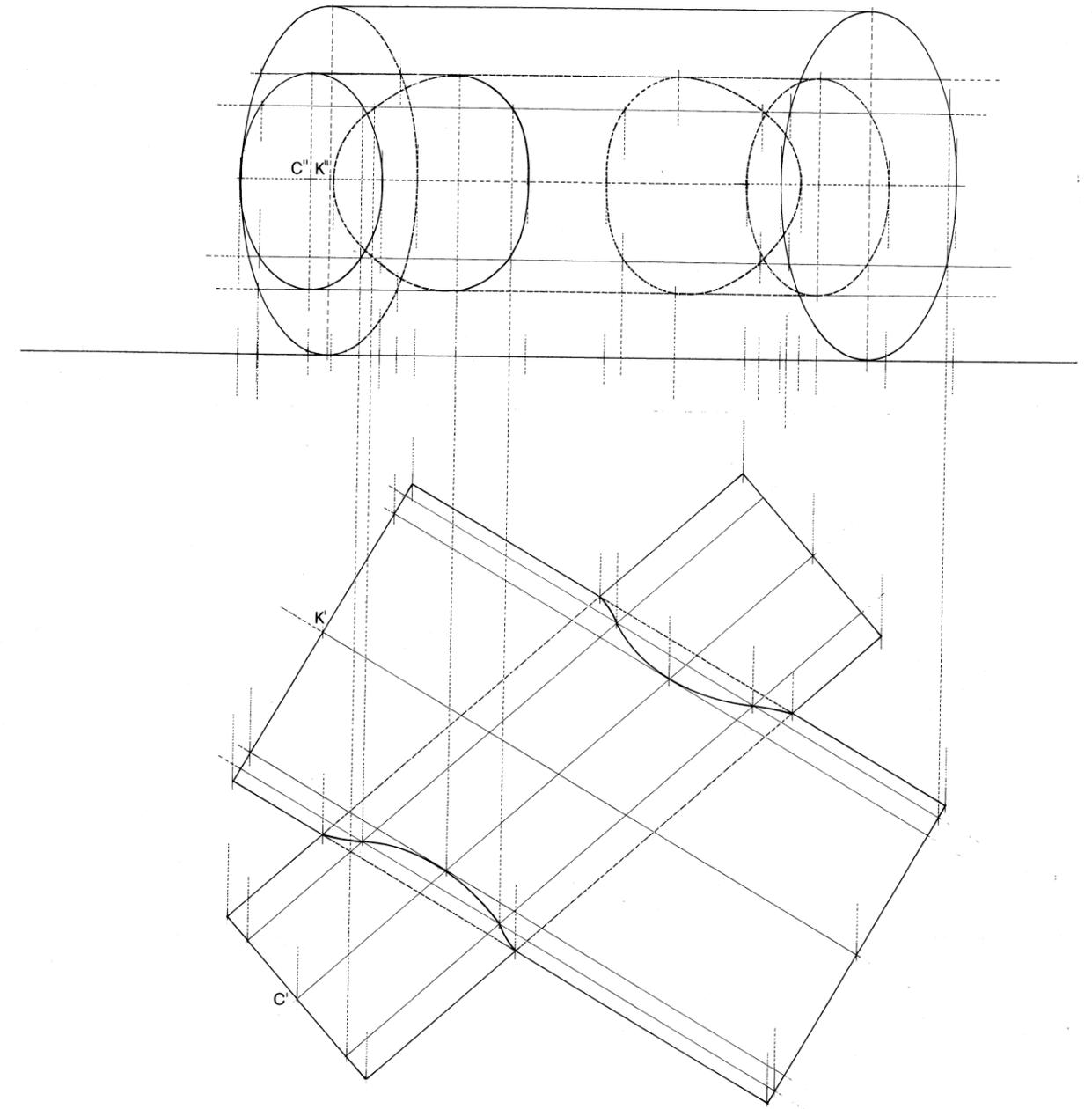


Fig. 85

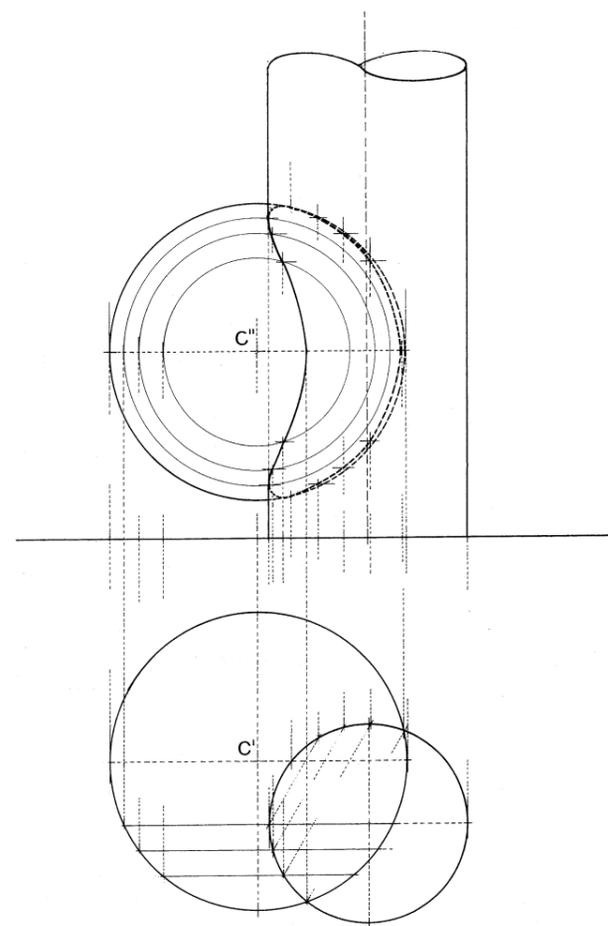


Fig. 86a

5. Se le quadriche non sono specializzate, non sono cioè coni o cilindri, o una sola di esse è tale, per la costruzione della quartica i piani ausiliari vanno scelti caso per caso nel modo più opportuno. Nell'intersezione di un cilindro circolare retto e una sfera, il piano ausiliario variabile passante per una generatrice del cilindro può o meno secare ulteriormente il cilindro secondo un'altra generatrice, e la sfera secondo un cerchio: i quattro (o due) punti comuni di volta in volta alle due generatrici e al cerchio appartengono a ciascun ramo della quartica-sezione (fig. 86a). Se il cilindro ha il diametro uguale al raggio della sfera ed è tangente ad essa internamen-

te, la quartica sezione è una curva (gobba) continua con un punto doppio – quello di contatto tra le due superfici – e prende il nome di *finestra di Viviani*. Per la sua costruzione è opportuno che il piano ausiliario variabile α sia perpendicolare all'asse del cilindro, poiché in tal caso il piano interseca sia la sfera che il cilindro secondo cerchi i cui punti comuni evidentemente appartengono alla curva. Nella figura 86b le generatrici del cilindro sono perpendicolari al primo piano della *rappresentazione mongiana*, dunque i piani ausiliari sono orizzontali; la prima proiezione della quartica coincide con il cerchio direttore del cilindro, la seconda è una curva detta *lemniscata di*

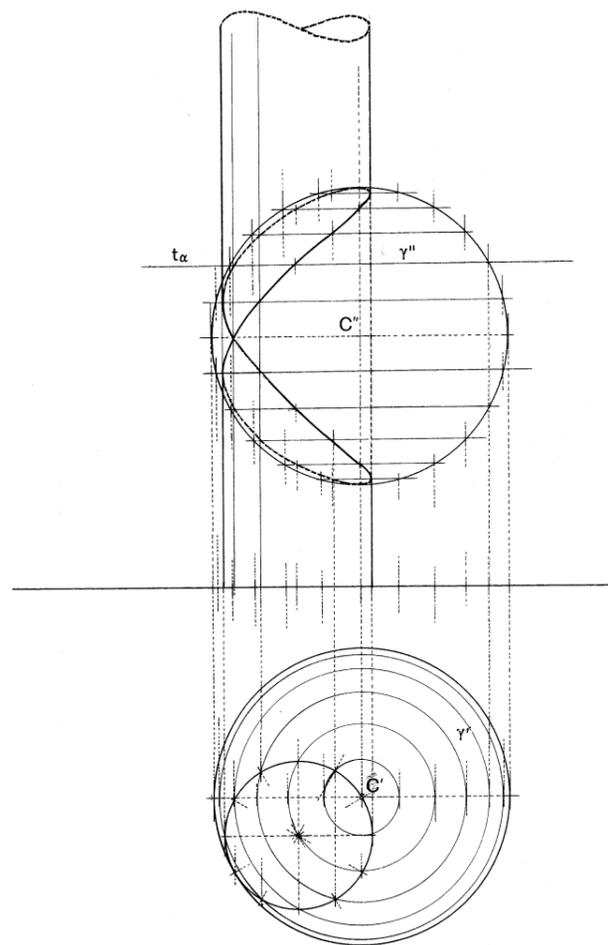


Fig. 86b

Gerono. Se l'asse del cilindro passa per il centro della sfera, la quartica intersezione è costituita da due cerchi, in ciascuno dei quali le curve intersezioni del piano α con il cilindro e con la sfera coincidono.

6. Nel caso di un iperboloido iperbolico e un cilindro, come piano ausiliario variabile si sceglie un piano tangente l'iperboloido, determinato cioè da due rette della superficie (una generatrice e una direttrice);

tale piano interseca il cilindro secondo un'ellisse (che per le reciproche posizioni delle superfici potrebbe anche essere un cerchio): i quattro punti comuni alle due rette dell'iperboloido e alla ellisse, appartengono alla quartica sezione.

7. Se le quadriche sono *entrambe non specializzate*, ma ancora una di esse è *rigata*, la costruzione è analoga alla precedente. La figura 87 propone l'intersezione di un paraboloido e una sfera, con una scelta del riferimento mongiano secondo la quale il quadrilatero sghembo – mediante il quale è assegnato il paraboloido – si proietta in prima proiezione in un quadrato; i piani ausiliari, passanti ciascuno per una direttrice e una generatrice del paraboloido, hanno le prime tracce parallele ai lati del quadrato, e secano la sfera secondo cerchi le cui seconde proiezioni sono ellissi.

Se infine le due quadriche sono *entrambe a punti ellittici*, caso per caso dovrà scegliersi il piano ausiliario più opportuno e determinarne le coniche sezioni con l'una e con l'altra superficie (cfr. 3.3.8.): i quattro punti (al massimo) comuni a ciascuna coppia di tali coniche per ogni posizione del piano ausiliario appartengono alla quartica intersezione richiesta.

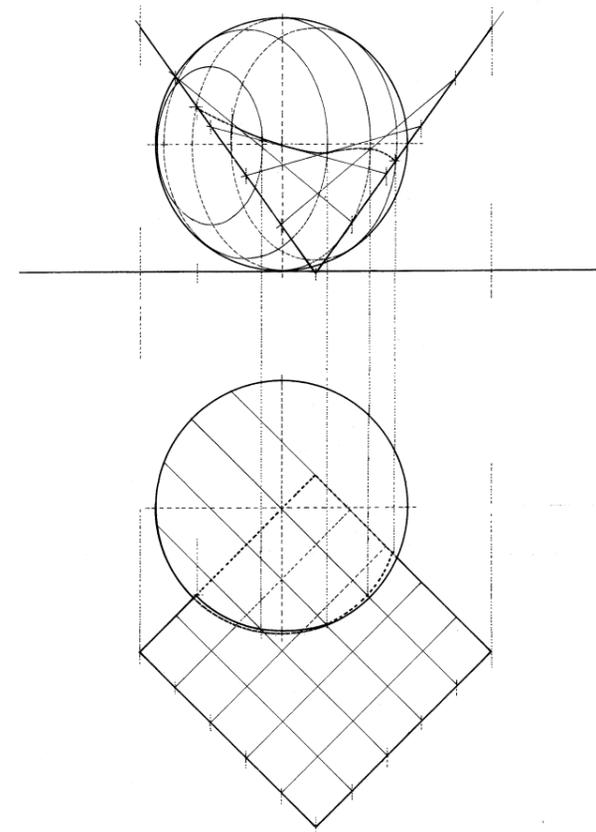


Fig. 87

4 Gli archi e le volte

4.1 Definizioni e genesi

1. L'intradosso delle coperture a volta è costituito generalmente da superfici rigate (3.4.1.) – sviluppabili o non –, o di rotazione, oppure elicoidali, queste ultime generate dal moto di una curva lungo un'elica (cfr. 3.5.3.). Le volte, la cui superficie è una rigata non sviluppabile (cfr. 3.4.3.) – presenti in talune strutture murarie del passato come la volta a sbieco (cfr. 3.4.8.) – sono riservate anche oggi a casi eccezionali, come padiglioni fieristici (ad esempio quello della Philips di Le Corbusier), o come le moderne volte leggere adottate per la copertura di ampi spazi, trattandosi prevalentemente di paraboloidi iperbolici. Ci occuperemo ora di quelle volte che sono più frequenti nell'architettura classica.

Come accennato, la volta a struttura più semplice è quella *cilindrica* comunemente detta *volta a botte*, e viene adottata per la copertura di ambienti a pianta rettangolare; ma anche l'intradosso degli *archi* è una superficie cilindrica: nel caso dell'*arco a tutto sesto*, detto anche *a pieno centro*, si tratta di un semicilindro circolare retto a generatrici generalmente orizzontali, che taglia lo spessore del muro in cui si apre l'arco.