

A riprova dell'esattezza delle costruzioni eseguite, si osservi che le coppie di lati opposti $A'B'$, $D'C'$ e $A'D'$, $B'C'$, si secano in due punti di f'_a , in quanto immagini di coppie di rette parallele appartenenti al piano α , di cui quei punti sono le rispettive fughe.

16.2. Rappresentazione del cerchio. Coniche

Al problema della rappresentazione del cerchio, premettiamo alcune considerazioni. Assegnata nello spazio proiettivo una curva piana γ e un punto V non appartenente al piano di γ , dicesi *cono* di *vertice* V e *direttrice* γ , la superficie individuata dalle rette per V e che si appoggiano ai punti di γ . Queste rette diconsi *generatrici* del cono.

Si consideri ora il cono avente per direttrice una circonferenza γ e per vertice un punto proprio V esterno al piano di γ . Le curve γ' ottenute come intersezioni del cono con piani qualsiasi prendono il nome di *sezioni coniche* o semplicemente *coniche*; in particolare, quelle parallele al piano di γ sono circonferenze (Parte I, III, 3).

Le sezioni ottenute con piani passanti per il vertice sono proiezioni di γ da V su questi piani, cioè immagini di γ in prospettiva di centro V , e come tali conservano le proprietà proiettive della circonferenza: in particolare il numero di punti che la circonferenza ha in comune con una retta r del suo piano, nonché il numero delle tangenti che si possono condurre da un punto P dello stesso piano. Come è noto, il numero di tali punti (e di tali tangenti) è due. Se i due punti sono reali e distinti, la retta r dicesi *secante*, se reali e coincidenti, la retta dicesi *tangente*, se complessi coniugati, la retta dicesi *esterna* alla conica γ' . Le tangenti condotte dal punto P alla conica possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate, secondo che il punto P sia esterno, appartenente oppure interno alla conica, rispettivamente.

In conformità a quanto detto sopra, i punti che una conica γ' ha in comune con la retta impropria del suo piano, sono ancora due. In base alla natura di tali punti si effettua la *classificazione affine* delle coniche, si studia cioè la posizione della conica rispetto alla retta impropria.

Siano α ed α' il piano della circonferenza γ e un piano secante il cono di vertice V e direttrice γ , rispettivamente. Se la retta limite di α nella

prospettività dal centro V tra i piani α ed α' è esterna, tangente, secante alla circonferenza γ , allora la retta impropria del piano α' è esterna, tangente, secante alla conica γ' , corrispondente a γ nella prospettiva.

Nel primo caso, la conica γ' , che ha in comune con la retta impropria due punti complessi coniugati (cioè non ha alcun punto reale improprio), è una curva chiusa al finito costituita da infiniti punti reali propri e prende il nome di *ellisse*.

Nel secondo caso, la conica, avendo in comune con la retta impropria due punti reali e coincidenti, è costituita da infiniti punti reali propri e da uno improprio: è dunque una curva non limitata, che si chiude all'infinito nell'unico suo punto improprio, e prende il nome di *parabola*.

Nel terzo caso, infine, la conica, avendo in comune con la retta impropria due punti reali e distinti, è costituita da infiniti punti reali propri e da due impropri: è dunque una curva non limitata che prende il nome di *iperbole*.

Le sezioni coniche mediante piani passanti per il vertice diconsi *coniche degeneri*.

Ciascuna di esse è costituita da una coppia di rette, cioè dalle due generatrici secondo cui un piano $\bar{\alpha}$ per V interseca il cono. Infatti se r è la retta intersezione di $\bar{\alpha}$ con il piano α del cerchio γ , $\bar{\alpha}$ ha in comune con il cono i due punti comuni ad r e γ ; ma poiché contiene anche il vertice, allora $\bar{\alpha}$ ha in comune con il cono due generatrici, le rette che congiungono V con ciascuno di quei punti. Secondo la natura dei punti che r ha in comune con γ (se cioè la retta r è secante, tangente o esterna al cerchio γ), le due generatrici possono essere reali e distinte, reali e coinci-

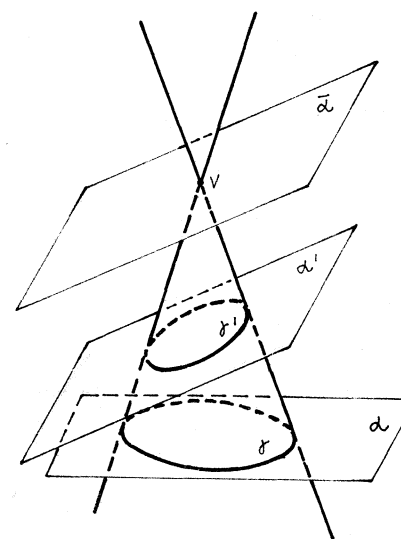


Fig. 69

denti, complesse coniugate, rispettivamente (figg. 69, 70, 71).

Ed allora la classificazione affine della conica, sezione del cono col piano α' non passante per il vertice, si può effettuare equivalentemente o studiando la posizione del piano α' rispetto alle generatrici del cono, ovvero rispetto al piano $\bar{\alpha}$.

Si hanno i tre casi:

a) se il piano $\bar{\alpha}$, parallelo ad α' e passante per V, interseca il cono secondo due generatrici complesse coniugate (se cioè $\bar{\alpha}$ ha in comune con il cono un solo punto reale, il punto V) allora il piano α' della sezione, non risultando parallelo ad alcuna generatrice, le interseca tutte in punti propri.

La conica γ' , sezione del cono col piano α' , è un'ellisse (fig. 69).

b) Se il piano $\bar{\alpha}$ interseca il cono secondo due rette reali e

coincidenti (se cioè ha in comune con il cono una generatrice g) il piano α' interseca tutte le generatrici in punti propri, tranne la generatrice g , parallela ad α' perché giace in $\bar{\alpha}$. La conica γ' è una parabola (fig. 70).

c) Se il piano $\bar{\alpha}$ interseca il cono secondo due rette reali e distinte (se cioè ha in comune con il cono due generatrici g_1 e g_2) il piano α' interseca tutte le generatrici in punti propri tranne le generatrici g_1 e g_2 , parallele ad α' . La conica γ' è un'iperbole (fig. 71).

E poiché γ' è la proiezione da V su α' della circonferenza γ , gli asintoti dell'iperbole, quali tangenti a γ' nei punti impropri, sono le proiezioni da V su α' delle tangenti t_1 e t_2 alla circonferenza γ nei punti A e B comuni ad $\bar{\alpha}$ e alla circonferenza. Evidentemente gli asintoti risul-

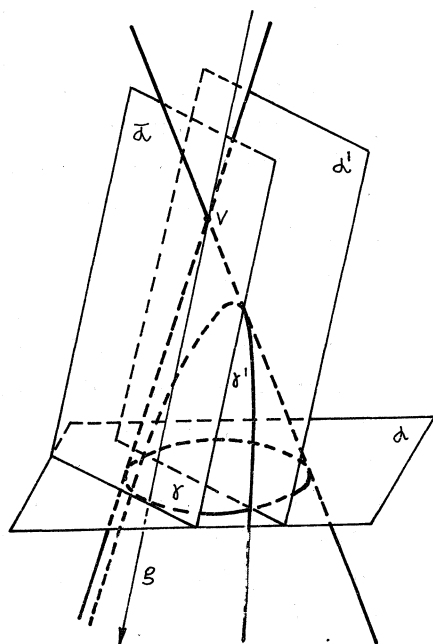


Fig. 70

tano paralleli rispettivamente a g_1 e g_2 , cioè alle rette VA e VB, rispettivamente, e quindi passano per i punti impropri delle due generatrici parallele ad α' .

In proiezione centrale, l'immagine di un cerchio γ è dunque una conica γ' , che può riguardarsi come intersezione con π del cono avente come

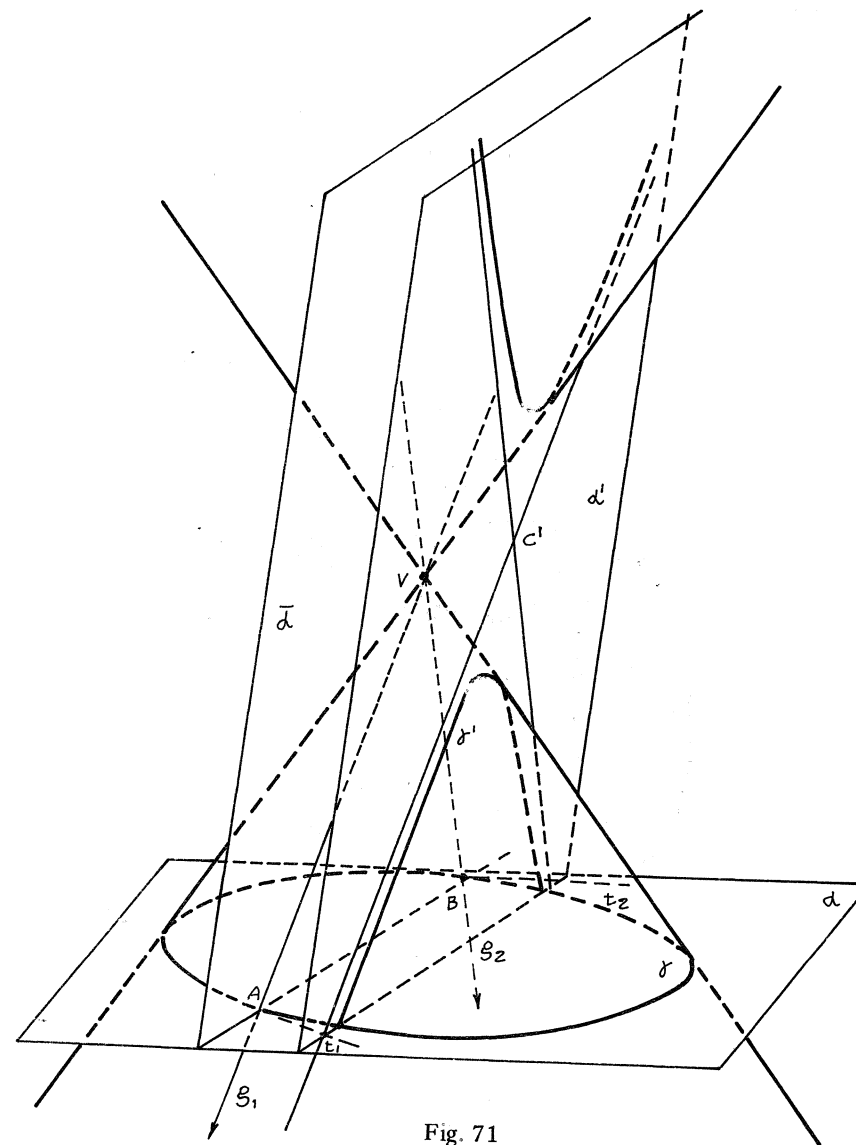


Fig. 71

curva direttrice γ e come vertice il centro di proiezione O (figg. 72, 73, 74).

Sia dato dunque il problema:

Costruire l'immagine di un cerchio γ , assegnati il centro C , di immagine C' , il raggio e il piano α (t_α, f'_α) cui γ appartiene.

In relazione alla posizione della circonferenza γ rispetto al piano

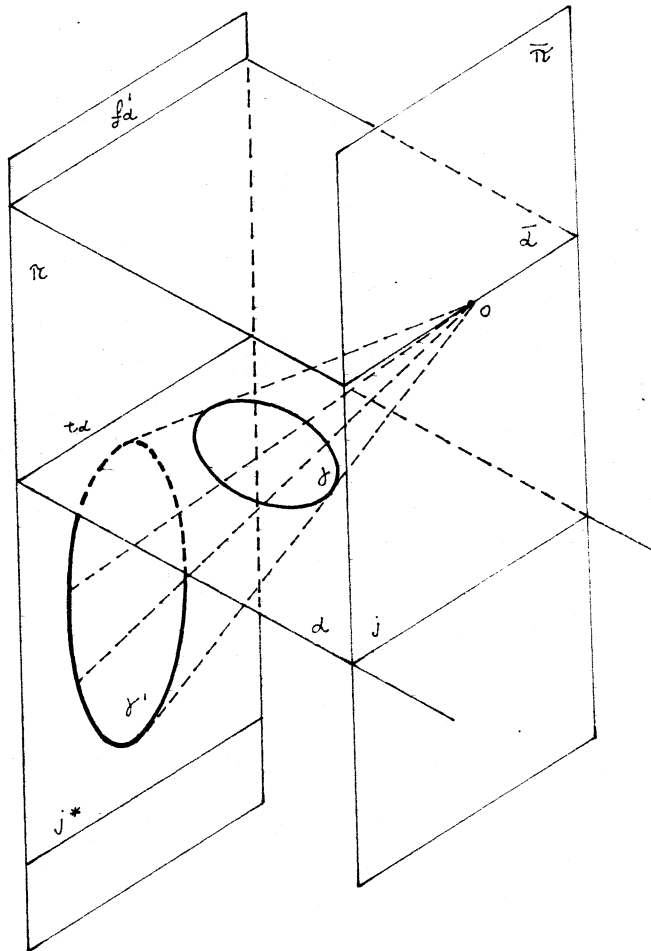


Fig. 72

anteriore $\bar{\pi}$, è possibile stabilire, prima di aver effettuato la costruzione, se γ' è un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Infatti, detta j la retta che il piano α di γ ha in comune con $\bar{\pi}$ e ricordando che essa è l'insieme dei punti del piano α , le cui proiezioni sono i punti impropri del quadro (cfr. 4), si ha: γ' è un'ellisse (fig. 72) se j è esterna a γ (cfr. a)), γ' è una parabola (fig. 73) se j è tangente a γ nel

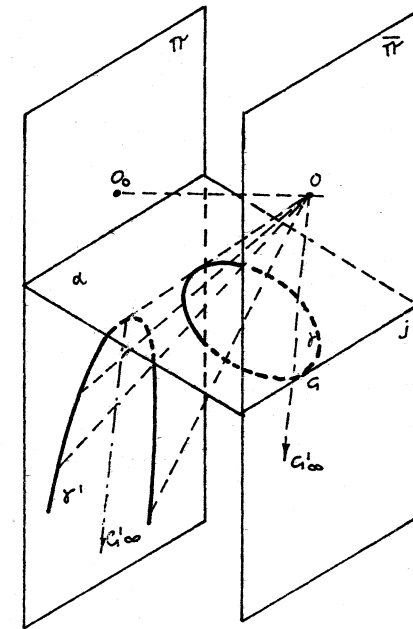


Fig. 73

punto G (cfr. b)), γ' è un'iperbole (fig. 74) se j seca γ in due punti A, B reali e distinti (cfr. c)): gli asintoti dell'iperbole sono le proiezioni da O delle tangenti a γ nei punti A e B , e ciascuno dei due rami dell'iperbole γ' è l'immagine di uno degli archi di γ di estremi A e B .

Per conoscere, nella rappresentazione sul foglio, le mutue posizioni di γ e j , è necessario ribaltare il piano α , determinando i ribaltati γ^* di γ e j^* di j .

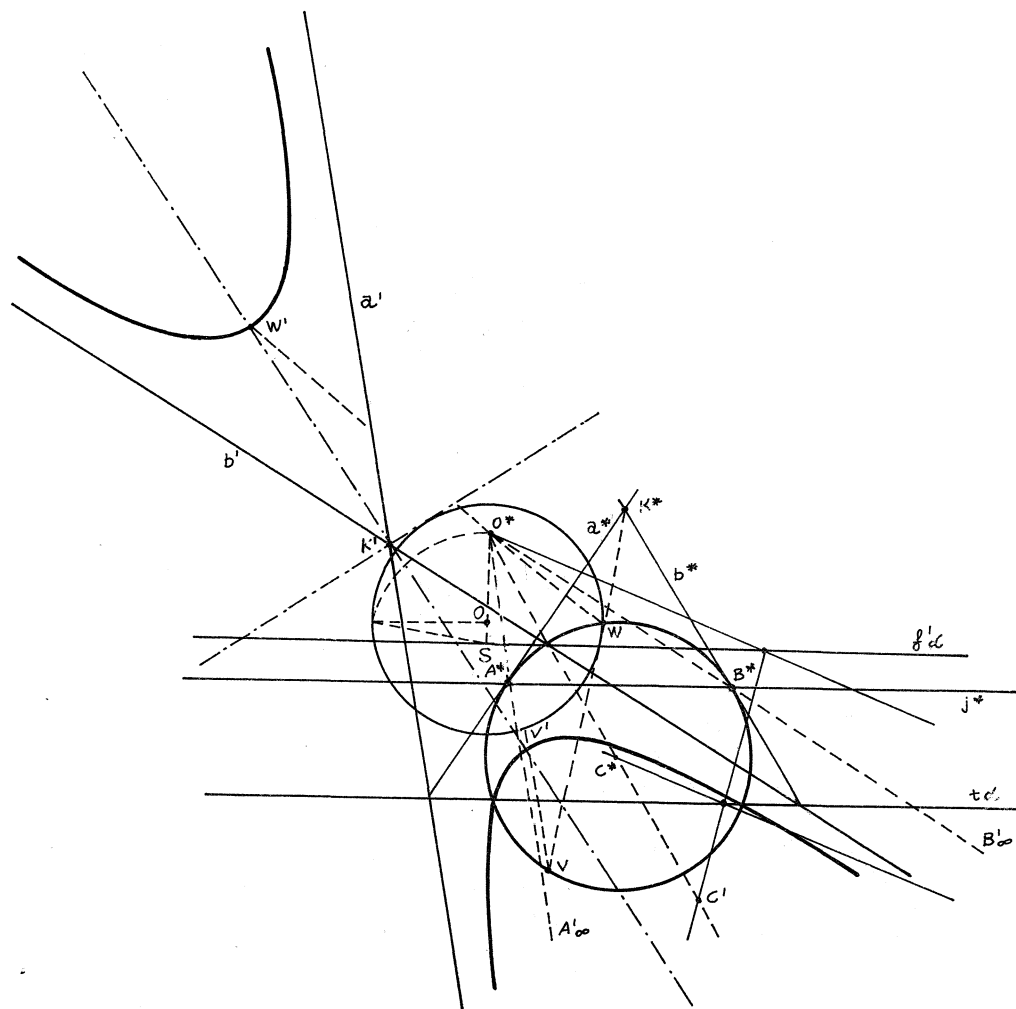


Fig. 77

L'immagine γ' di γ , quale trasformata di γ^* in ω^{-1} , sarà un'ellisse, una parabola o un'iperbole, secondo che j^* sia esterna, tangente o secante γ^* (figg. 75, 76, 77).

Per ottenere un corretto tracciamento della conica γ' , è opportuno servirsi delle proprietà di simmetria delle coniche.

A questo scopo dedichiamo il paragrafo seguente.

16.3. Trasformazioni omologiche delle coniche

Il presente n. presuppone la conoscenza della nozione di polarità rispetto a una conica. L'argomento è trattato nei testi di Geometria Analitica cui il lettore può far riferimento.

Per semplificare la simbologia adotteremo, per le figure da trasformare mediante un'omologia, lettere prive di contrassegni, e per le trasformate, lettere con apice.

Assegnata su un piano π (foglio del disegno) un'omologia, mediante il centro S , l'asse s (entrambi propri) e una retta limite i , è possibile costruire per punti una conica, quale trasformata di un cerchio nella suddetta omologia.

L'omologia, infatti, trasforma coniche in coniche (cfr. 16.2.), poiché la proprietà, caratterizzante le coniche, di avere in comune con una generica retta due punti, è un invariante proiettivo. In generale però l'omologia non conserva il tipo di conica: infatti, se l'assegnata retta i è esterna, secante o tangente la conica data γ , la retta impropria i'_∞ risulta esterna, secante o tangente la conica trasformata γ' , la quale sarà dunque, rispettivamente un'ellisse, un'iperbole o una parabola, indipendentemente dal tipo della conica data γ .

Nelle affinità (omologia affine, omotetia e traslazione), che trasformano in sé la retta impropria, si conserva il tipo di conica: infatti se, ad esempio, γ è un'ellisse, non ha cioè punti reali in comune con la retta impropria i_∞ (e quindi è pure esterna alla retta limite che coincide con i_∞), la trasformata γ' non avrà punti reali comuni con l'omologa $i'_\infty \equiv i_\infty$ della retta limite, e sarà dunque ancora un'ellisse. Analogo ragionamento vale per l'iperbole e la parabola. Un cerchio, che è una particolare ellisse, viene trasformato da una omologia affine ancora in ellisse; da una omotetia in un cerchio; da una traslazione in un cerchio di uguale raggio (cfr. Parte I, VIII, 7).

Solo le omologie che non siano affinità possono trasformare il cerchio (o qualsiasi altra conica) o in ellisse, o in parabola, o in iperbole.

13.3a. Trasformazione omologica del cerchio in ellisse

Un'omologia ω che trasformi il cerchio γ in una *ellisse* è caratterizzata dalla condizione che la retta limite i sia esterna a γ . Asse di ω è una