**TEOREMA 3.50** Supponiamo che

(*a*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga assolutamente,

(*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,

(*c*) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$,

(*d*) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Vale a dire, il prodotto di due serie convergenti converge e converge al valore corretto, se almeno una delle due serie converge assolutamente.

DIMOSTRAZIONE Poniamo

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad \beta_n = B_n - B.$$

Allora

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \end{aligned}$$

Sia

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 .$$

Vogliamo dimostrare che $C_n \to AB$. Poiché $A_n B \to AB$, basta dimostrare che

(21) $$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$$

Poniamo

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

[È a questo punto che usiamo la (*a*)]. Sia dato $\varepsilon > 0$. Per la (*c*), $\beta_n \to 0$. Di conseguenza si può scegliere $N$ in modo tale che $|\beta_n| \leq \varepsilon$ per $n \geq N$, nel qual caso

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Tenendo fisso $N$ e facendo tendere $n$ all'infinito, si ottiene

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha,$$

visto che $a_k \to 0$ se $k \to \infty$. Poiché $\varepsilon$ è arbitrario, segue la (21).
Un'altra domanda che ci si può porre è se la serie $\Sigma c_n$, supposta convergente, deve necessariamente avere per somma $AB$. Abel ha mostrato che la risposta è affermativa.

**TEOREMA 3.51** Se le serie $\Sigma a_n$, $\Sigma b_n$ e $\Sigma c_n$ convergono ad $A$, $B$ e $C$ e $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$, allora $C = AB$.

In questo caso non si è fatta alcuna ipotesi sulla convergenza assoluta. Daremo una semplice dimostrazione di questo teorema (dimostrazione che dipende dalla continuità delle serie di potenze) dopo il Teorema 8.2.

## 3.14 RIORDINAMENTI

**DEFINIZIONE 3.52** Sia $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, una successione nella quale ogni intero positivo appare una e una sola volta (cioè, $\{k_n\}$ è una funzione biunivoca da $J$ a $J$, secondo la notazione della Definizione 2.2. Posto

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

diremo che $\Sigma a'_n$ è un *riordinamento* di $\Sigma a_n$.
Se $\{s_n\}$ e $\{s'_n\}$ sono le successioni delle somme parziali delle serie $\Sigma a_n$ e $\Sigma a'_n$, è facile verificare che, in generale, queste due successioni consistono di numeri completamente diversi. Siamo perciò portati a considerare il problema di determinare sotto quali condizioni tutti i riordinamenti di una serie convergente convergano e se le somme siano necessariamente le stesse.

**ESEMPIO 3.53** Consideriamo la serie convergente

(22) $$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots$$

e un suo riordinamento

(23) $$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots$$

nel quale due termini positivi sono sempre seguiti da uno negativo. Se $s$ è la somma della (22), allora

$$s < 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}.$$