SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \quad \leftarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad \text{vero} \quad \forall t$$

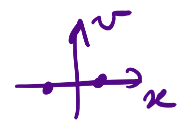
Ci sono delle soluzioni particolari che sono funz. costanti, cioè $\bar{x}(t) = \bar{c}$ $\quad \bar{c} \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ con $\bar{c}$ t.c. $\bar{f}(\bar{c}) = 0$

$\uparrow$ cost. indip. da t

Tali soluzioni particolari sono dette "punti di EQUILIBRIO": le loro traiettorie sono pti (curva degenere).

<u>Prop.</u> I PUNTI DI EQUIL. dell'eq. $(*)$ sono tutti e soli i pti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzera ("Punti singolari" del campo vett.)

<u>Corollario</u>. Nel sistema meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $\leftarrow \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$ i pti singolari o di equilibrio sono del tipo



$\bar{c} = (\underset{x}{c}, \underset{v}{0})$ con $f(c, 0) = 0$ $\quad \leftarrow$ Nel piano di fase i pti di equil. giacciono sull'asse delle ascisse

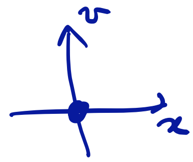
<u>Dim.</u> Pti equil. sono gli zeri di $\bar{f}(x, v)$, cioè soluz. di equaz.
$$\begin{cases} f_1(x,v) = 0 \\ f_2(x,v) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow[\text{sist. mecc.}]{} \begin{cases} v = 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases}$$ //

(Nei pti di equil. $(c, 0)$ la risultante delle forze si annulla)

ES. PARTICELLA LIBERA $\ddot{x} = 0$ $\quad$ f è identicam. nulla e quindi i pti di equil. sono $(c, 0)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

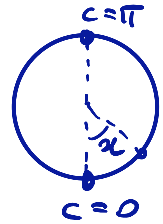
ES. OSCILL. ARM. $\quad f(x,v) = -\omega^2 x$

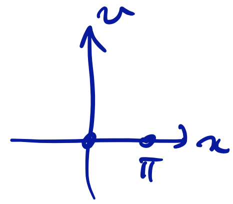
$\rightarrow$ pti equil. $\quad c=0$



ES. PENDOLO $\quad f(x,v) = -\operatorname{sen} x \quad (\omega = 1)$

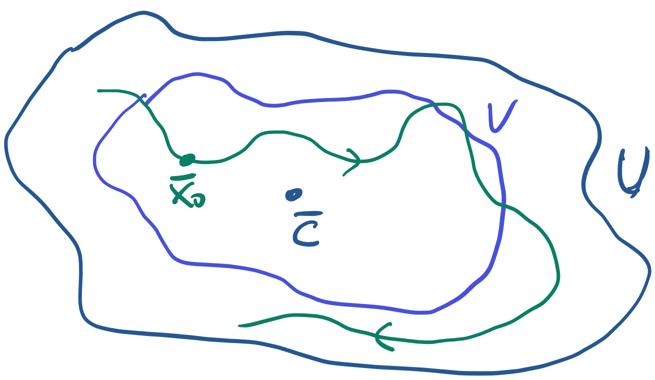
$\rightarrow$ pti equil. $\quad c = 0, \pi$





Attorno ai pti di equilibrio possiamo avere informazioni APPROSSIMATE sulle solut., anche per sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. $\bar{c}$ di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $\quad (\bar{f}(\bar{c}) = 0)$ è detto STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se $\forall$ intorno U di $\bar{c}$, $\exists$ intorno V di $\bar{c}$, t.c. ogni movimento $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 \in V$ resta in U $\forall t$ $\quad (\forall t > 0, \ \forall t < 0)$



($c = 0$ è stab. per il pendolo; $c = \pi$ NON è stab.)

Def. $\bar{c}$ è INSTABILE se non è stabile.

Def. $\bar{c}$ è ASINTOTICAM. STAB. per tempi positivi (negativi) quando

a) è stab. per $t \geq 0$ $\quad (t \leq 0)$ e

b) $\exists B$ intorno di $\bar{c}$ (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c. $\forall \bar{x}_0 \in B$ $\quad \bar{x}(t; \bar{x}_0) \rightarrow \bar{c}$ per $t \rightarrow +\infty$ $\quad (t \rightarrow -\infty)$

TEOREMA DI LJAPUNOV

Se conosciamo la soluzione di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$, possiamo dire se un pto di equilibrio è STABILE o INSTABILE.

Ma se non siamo in grado di risolvere $(*)$? C'è seguente teor.:

Prop. Sia $\bar{c}$ un pto di equilibrio per $(*)$ in $\mathbb{R}^\ell$ (cioè $\bar{f}(\bar{c})=0$).
Se in un intorno U_c di $\bar{c}$ $\exists$ una variabile dinamica $W : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ ("funzione di Ljapunov") t.c.

a) W ha un MINIMO STRETTO in $\bar{c}$, cioè
$$W(\bar{x}) > W(\bar{c}) \quad \text{in } U_c \setminus \{\bar{c}\}$$

b) $\mathcal{L}_{\bar{f}} W \le 0$ in U_c (cioè W è non-crescente lungo ogni moto in U_c per t crescente)
$(\ge)$ $(=)$ non-decrescente, costante

$\Rightarrow$ $\bar{c}$ è un punto di EQUILIBRIO STABILE per tempi positivi (negativi) (per tutti i tempi).

[Il teorema di Ljapunov permette di avere informazioni sulla stabilità del pto di equilibrio in modo rapido, senza dover risolvere $(*)$.]

Dim. Dobbiamo dimostrare che $\forall$ intorno U di $\bar{c}$, esiste un intorno V di $\bar{c}$ t.c. $\forall \bar{x}_0 \in V$ la traiettoria stia interamente in U per tempi positivi.
Data W come nelle ipotesi, possiamo sempre costruire l'intorno V nel seguente modo:

- prendiamo una palla B contenuta in $U \cap U_c$ e centrata in $\bar{c}$;

- la sfera ∂B è chiusa e compatta $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $W(\bar{x})$ ha un minimo assoluto su un pto $\bar{b} \in \partial B$
cioè $W(\bar{x}) \geq W(\bar{b}) \equiv l \quad \forall \bar{x} \in \partial B$

- definiamo $V = \{ \bar{x} \in B \mid W(\bar{x}) < l \}$

- V è un intorno di $\bar{c}$, perché siccome $\bar{c} \in V$ per a)

- prendiamo $\bar{x}_0 \in V$; il moto con tale dato iniziale $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ soddisfa per b):

$$W(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) < W(\bar{x}_0) \quad \text{per } t > 0 \qquad (*)$$

perché $\dot{W}(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) = \mathcal{L}_f W(\bar{x}(t; \bar{x}_0)) \leq 0$

- $(*) \Rightarrow \bar{x}(t; \bar{x}_0)$ non può intersecare ∂B per $t > 0$
(il che implica che non può uscire da U)
perché un tale pto $\bar{x}_{int}$ di intersezione avrebbe

$$W(\bar{x}_{int}) \geq l > W(\bar{x}_0)$$

perché $\bar{x}_{int} \in \partial B$ — visto che $\bar{x}_0 \in V$

//

Corollario. Si consideri un sistema meccanico con forze puramente posizionali:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \qquad f(x) = -\frac{V'(x)}{m}$$

Se l'energia potenziale $V(x)$ ha un MINIMO ISOLATO in $x^* \in \mathbb{R}$ allora $\bar{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è un P.TO DI EQUIL. STABILE.

Dim. Se $V(x)$ ha min. stretto in x^*, allora

$$f(x^*) = -\frac{V'(x^*)}{m} = 0 \, ;$$

inoltre $E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$ ha anch'essa un min. isolato, e si trova in $\bar{c} = (x^*, 0) \Rightarrow$ a) del teorema di Lyapunov

Inoltre E è una cost. del moto $\Rightarrow \mathcal{L}_{\bar{f}} E = 0 \Rightarrow$ b) //

Il risultato del corollario si estende a tutti i sistemi meccanici a più gradi di libertà per i quali si può scrivere l'energia totale come somma di EN. CINETICA (def. positiva) ed EN. POTENZIALE.

Stabilità nel futuro persiste anche se aggiungiamo alla forza un termine dissipativo.

ES. $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x - 2\mu v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix} \qquad E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$L_{\bar{f}} E = \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial v} f_2 = \cancel{m\omega^2 x \cdot v} + m v \cdot \left(\cancel{-\omega^2 x} - 2\mu v\right)$$

$$= -2\mu m v^2 \leq 0 .$$

STUDIO ATTORNO AI PUNTI DI EQUILIBRIO

Linearizzazione: studio locale attorno al pto di equilibrio, nel quale si APPROSSIMA il sistema non-lineare ("difficile") con un sistema <u>lineare</u> ("facile")

<u>Sistema lineare</u> in $\mathbb{R}^l$ è un sistema di equazioni differenziali lineari del tipo

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

$\bar{x}$ a valori in $\mathbb{R}^l$ e
A una matrice $l \times l$

Partiamo da un sistema autonomo

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^l \qquad \bar{f}: \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

t.c. $\bar{f}$ ha un punto singolare (pto equil.) in $\bar{c}$
(cioè $\bar{f}(\bar{c}) = 0$).

Siccome vogliamo studiare le soluzioni $\bar{x}(t)$, quando passano per pti vicini a $\bar{c}$, ci interessa il comportamento di $\bar{f}$ attorno a $\bar{c}$, cioè per $\|\bar{x} - \bar{c}\| \ll 1$.

⇝ facciamo espansione di Taylor attorno a $\bar{c}$

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{\cancel{f_i(\bar{c})}}_{=0} + \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}}_{= A_{ij}} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x} - \bar{c}\|^2)$$

Attorno a $\bar{c}$ la funzione $\bar{f}$ è ben approssimata da

$$\bar{f}(\bar{x}) \approx A\cdot(\bar{x}-\bar{c}) + \dots \quad \text{con} \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{c})$$

Definiamo $\bar{\xi} = \bar{x}-\bar{c} \Rightarrow \bar{\xi}(t) = \bar{x}(t) - \bar{c}$ soddisfa

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{x}} = A(\bar{x}-\bar{c}) + \dots = A\bar{\xi} + \underbrace{\dots}_{\mathcal{O}(\|\bar{\xi}\|^2)}$$

→ L'eq. è approssimata, per $\|\bar{\xi}\| = \|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$, da

$$\dot{\bar{\xi}} = A\cdot\bar{\xi}$$

↳ risolta qta eq. otteniamo $\bar{\xi}(t)$, da cui uno si trova $\bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$.

Se il sistema autonomo viene da

$$\ddot{x} = f(x) \rightsquigarrow \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(c) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi} \quad (*)$$

← sist. di eq. LINEARI OMOGENEE del 1° ordine

⇒ soluz. generale sarà combinazione lineare di ℓ soluzioni particolari indip.

Cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$\bar{\xi}(t) = \rho(t)\,\bar{u} \quad (A) \qquad \bar{u} \in \mathbb{R}^{\ell} \text{ vett. cost.}$$

Siccome ci interessano soluzioni non banali, $\bar{\xi}(t)$ non si annulla mai
($\exists!$ soluz. $\bar{\xi}(t)$ t.c. $\bar{\xi}(t_0)=0$, ed è $\bar{\xi}(t)=0$ $\forall t$. Altre traiettorie non la intersecano)

Sostituiamo ($\circledast$) in ($*$):

$$\dot{\rho}\,\bar{u} = \rho A \bar{u}$$ ← l'uguaglianza è possibile solo se $\bar{u}$ e $A\bar{u}$ sono paralleli, cioè $\exists \alpha$ t.c.

$$\underline{A\bar{u} = \alpha \bar{u}}$$

$$\dot{\rho}\,\bar{u} = \alpha \rho \bar{u}$$

$\Rightarrow$
- $\bar{u}$ deve essere autovettore di A con autovalore α.
- $\dot{\rho} = \alpha \rho \Rightarrow \rho(t) = C e^{\alpha t}$ $\quad (C = \rho(0))$

Per risolvere ($*$) uno deve diagonalizzare A.

Se esiste una base di autovettori (A diagonalizzabile)
$\Rightarrow$ posso scrivere la soluzione generale come

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j\, e^{\alpha_j t}\, \bar{u}_j$$

con α_j autovalori di A e $\bar{u}_j$ i relativi autovettori.

ASIDE: tornerai dopo aver studiato sist. Lagrangiani

Sist. Lagrangiano $L = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}} \cdot A\dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\bar{x} \cdot B\bar{x}$

eq: $A\ddot{\bar{x}} = -B\bar{x}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A\dot{\bar{v}} = -B\bar{x} \\ \dot{\bar{x}} = \bar{v} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ -A^{-1}B\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Soluz. generale:

- autovalori $0 = \det \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ A^{-1}B & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A^{-1}B + \lambda^2\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \det A^{-1} \det(B + \lambda^2 A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = \lambda\bar{u}$$

$$-A^{-1}B\bar{u} = \lambda\bar{w} \qquad \Rightarrow \begin{cases} B\bar{u} = -\lambda^2 A\bar{u} \\ \bar{w} = \lambda\bar{u} \rightarrow \end{cases}$$

Inoltre se A e B sono def. pos. l'eq. $\det(B + \lambda^2 A) = 0$ ha solut. solo se $\lambda^2 < 0$ cioè λ immaginario

$\lambda = \pm i\omega \leftarrow$ in coppie! perchè matrici reali

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\left[C_j e^{i\omega_j}\begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ i\omega_j\bar{u}_j \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solut. reali}}}{C_j^*} e^{-i\omega_j}\begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ -i\omega_j\bar{u}_j \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} u_j \\ i\omega_j u_j \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u_j \\ -i\omega_j u_j \end{pmatrix}$$

due soluz. indip. relative a un λ^2

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{i\omega_j t}\bar{u}_j + \sum_j C_j^* e^{-i\omega_j t}\bar{u}_j$$

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^{n} C_j i\omega_j e^{i\omega_j t}\bar{u}_j + \sum_j C_j^*(-i\omega_j)e^{-i\omega_j t}\bar{u}_j$$