UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

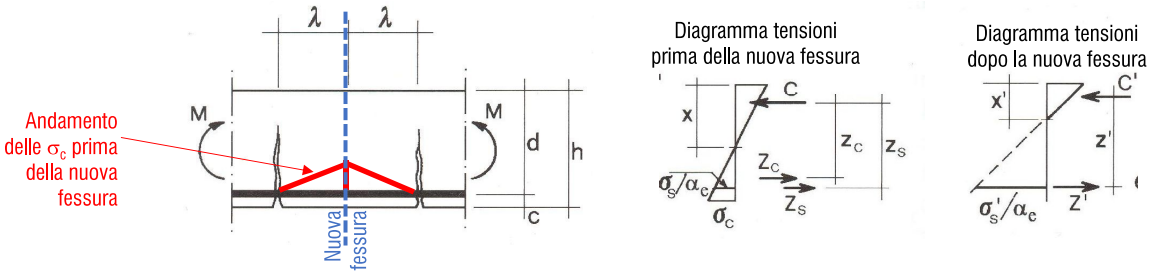
prof. ing. Ingrid Boem
via A. Valerio 6/2
34127 Trieste
ingrid.boem@dia.units.it

6 ELEMENTI INFLESSI – PARTE 2

A. A. 2024-2025
Corso di Tecnica delle costruzioni

LA FESSURAZIONE nella TRAVE INFLESSA

Distanza di fessurazione (si opera analogamente al caso del tirante)



Dall'equilibrio alla rotazione tra forze esterne ed interne di metà parte del concio (rispetto a C) si ha:

- Appena prima della formazione della nuova fessura

$$M = Z_s z_s + Z_c z_c = \sigma_s A_s z_s + \frac{1}{2}\sigma_c b(h-x)z_c$$

- Alla formazione della nuova fessura

$$M = Z' z' = \sigma'_s A_s z'$$

Eguagliando si ha quindi (ponendo $\sigma_c = f_{ctf}$):

$$\sigma'_s = \left\{\frac{1}{2} f_{ctf}\, b(h-x) z_c + \sigma_s A_s z_s\right\} \frac{1}{A_s z'}$$

La variazione di tensione nell'acciaio d'armatura $\Delta\sigma_s$, per effetto della formazione della fessura sarà pertanto

$$\Delta\sigma_s = \sigma'_s - \sigma_s$$

Sostituendo

$$= \left\{\frac{1}{2} f_{ctf}\, b(h-x) z_c + \sigma_s A_s z_s\right\} \frac{1}{A_s z'} - \sigma_s$$

$$= \frac{1}{2} f_{ctf} b(h-x) \frac{z_c}{A_s z'} + \sigma_s \frac{z_s}{z'} - \sigma_s$$

$$= \frac{1}{2} f_{ctf} b(h-x) \frac{z_c}{A_s z'} + \sigma_s \left(\frac{z_s}{z'} - 1\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{2} \frac{z_c}{z'} + \frac{\sigma_s}{f_{ctf}} \left(\frac{z_s}{z'} - 1\right) \frac{A_s}{b(h-x)}\right\} f_{ctf} \frac{b(h-x)}{A_s}$$

$$= \left\{\frac{1}{2} \frac{z_c}{z'} + \frac{\sigma_s}{f_{ctf}} \left(\frac{z_s}{z'} - 1\right) \rho^*_s\right\} \frac{f_{ctf}}{\rho^*_s}$$

Chiamiamolo γ

$$= \left\{\frac{1}{2} \frac{z_c}{z'} - \alpha_e \rho^*_s \frac{d-x}{h-x} \left(1 - \frac{z_s}{z'}\right)\right\} \frac{f_{ctf}}{\rho^*_s} \longrightarrow \boxed{\Delta\sigma_s = \gamma \frac{f_{ctf}}{\rho^*_s}}$$

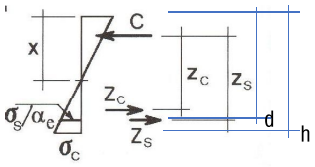
ρ*s percentuale geometrica di armatura in rif.to all'are di cls in zona tesa

$$\rho^*_s = \frac{A_s}{b(h-x)}$$

Per congruenza:

$$\sigma_s / \alpha_e : d-x = \sigma_c : h-x$$

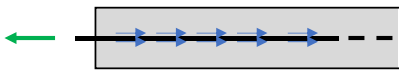
$$\sigma_s = \alpha_e \sigma_c \frac{d-x}{h-x}$$



Scrivendo l'equilibrio delle barre tra la fessura e la sezione di mezzo del concio nell'ipotesi di tensione di aderenza costante si ha (già visto per il tirante – v. lezione su Azione assiale):

$$\Delta\sigma_s n A_s = \tau_{bm} n S_l \longrightarrow \Delta\sigma_s n \frac{\pi\phi^2}{4} = \tau_{bm}\, n \pi \phi \lambda$$

Ma questo vale… $\Delta\sigma_s = \gamma \frac{f_{ctf}}{\rho^*_s}$



Distanza minima tra le fessure (espressione teorica)

$$\lambda = \gamma \frac{\phi}{4\rho^*_s} \frac{f_{ctf}}{\tau_{bm}}$$

L'espressione teorica va corretta per via empirica, per tener conto delle risultanze sperimentali, soprattutto per quanto riguarda la distribuzione delle barre nella sezione.

Distanza minima tra le fessure (espressione empirica)

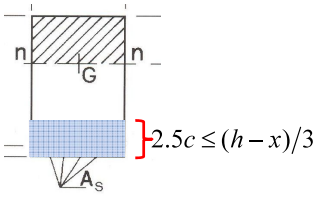
$$\lambda = c_o + \gamma\beta \frac{0.1\phi}{\rho_s}$$

Con

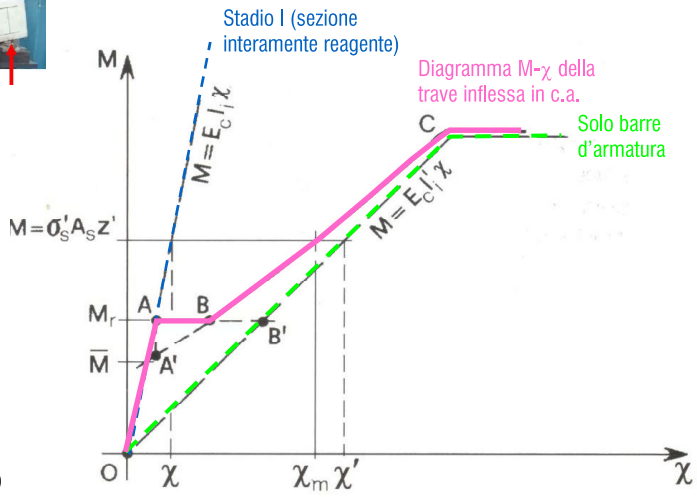
$c_o = c - \phi/2$ è il ricoprimento di calcestruzzo (copriferro netto)

ρ_s è il rapporto geometrico di armatura riferito all'area efficace costituita da una striscia di spessore pari a $2.5c \le (h-c)/3$

Assumendo in via approssimata $z' = z_s$ si può porre $\gamma\beta \sim 1/2$



Il comportamento della trave inflessa, rilevato con prove portate oltre il limite di fessurazione, è descritto in figura (*diagramma M-χ momento curvatura)*



Tratto OA – non fessurato (*I stadio)*

Tratto AB – completa fessurazione

Tratto BC – contributo decrescente del calcestruzzo teso

Se lo scarico delle tensioni di trazione fosse totale si raggiungerebbe B' (barra nuda)

Ampiezza di fessurazione

L'apertura media di fessura (w_m) dipende dall'allungamento della barra e da ~~quello del calcestruzzo~~ Trascurabile

L'allungamento della barra non è altro che il prodotto della deformazione media della barra ε_{sm} per la lunghezza di deformazione (ovvero la distanza tra le fessure λ):

$$w_m = \lambda \varepsilon_{sm}$$

Con $\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s'}{E_s} - \Delta\varepsilon_s$ (deformazione media della barra)

La tensione nell'acciaio in corrispondenza della sezione fessurata (v. Stadio II) è:

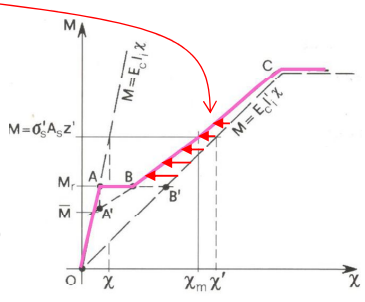
$$\sigma_s' = \alpha_e \frac{M}{I_i'} y_s' \qquad y_s' = d - x' \qquad I_i' = \frac{bx'^3}{3} + \alpha_e A_s (d-x')^2$$

Mom. inerzia sez. fessurata

Può assumersi per la trave inflessa un modello iperbolico di "tension stiffening" (effetto irrigidente del cls fra fessura e fessura), per cui si ha:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s'}{E_s}\left[1 - 0.5\,\beta_a \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\bar{\sigma}_s'}{\sigma_s'}\right)^2\right] \qquad per\ \sigma_s' \geq \bar{\sigma}_s'$$

(β_1 = 1, β_2 = 1)



b_a rapporto d'area efficace $\beta_a \leq 1$

b_1 tiene conto delle caratteristiche di aderenza ($\beta_1 = 1$ per barre ad ad.migliorata)

b_2 tiene conto della durata del carico ($\beta_2 = 1$ per carico breve durata)

Verifica SLE della fessurazione (metodo diretto)

NTC 2018

Stato limite di apertura delle fessure

Il valore caratteristico di apertura delle fessure (w_k) non deve superare i valori nominali w_1, w_2, w_3 secondo quanto riportato nella Tab. 4.1.IV.

L'ampiezza caratteristica delle fessure w_k è calcolata come 1,7 volte il prodotto della deformazione media delle barre d'armatura ε_{sm} per la distanza media tra le fessure Δ_{sm}:

$$w_k = 1.7\,\varepsilon_{sm}\Delta_{sm} \qquad [4.1.14]$$

Ad es. la Circ. n.7 del 21.01.2019

Per il calcolo di ε_{sm} e Δ_{sm} vanno utilizzati criteri consolidati riportati in documenti di comprovata validità.

Tab. 4.1.IV - *Criteri di scelta dello stato limite di fessurazione*

Gruppi di Esigenze	Condizioni ambientali	Combinazione di azioni	Armatura			
			Sensibile		Poco sensibile	
			Stato limite	w_k	Stato limite	w_k
A	Ordinarie	frequente	apertura fessure	$\le w_2$	apertura fessure	$\le w_3$
		quasi permanente	apertura fessure	$\le w_1$	apertura fessure	$\le w_2$
B	Aggressive	frequente	apertura fessure	$\le w_1$	apertura fessure	$\le w_2$
		quasi permanente	decompressione	-	apertura fessure	$\le w_1$
C	Molto aggressive	frequente	formazione fessure	-	apertura fessure	$\le w_1$
		quasi permanente	decompressione	-	apertura fessure	$\le w_1$

$w_1 = 0{,}2$ mm

$w_2 = 0{,}3$ mm

$w_3 = 0{,}4$ mm

Tab. 4.1.III – *Descrizione delle condizioni ambientali*

Condizioni ambientali	Classe di esposizione
Ordinarie	X0, XC1, XC2, XC3, XF1
Aggressive	XC4, XD1, XS1, XA1, XA2, XF2, XF3
Molto aggressive	XD2, XD3, XS2, XS3, XA3, XF4

CLASSE	DESCRIZIONE	ESEMPI
1. Nessun rischio		
X0	Calcestruzzo semplice senza attacchi c.a./c.a.p. in ambiente molto asciutto	Interno di edifici con umidità molto bassa
2. Corrosione da carbonatazione		
XC1	Asciutto o permanentemente bagnato	Interno di edifici
XC2	Bagnato, raramente asciutto	Molte fondazioni
XC3	Umidità moderata	Esterni protetti
XC4	Ciclicamente bagnato e asciutto	Strutture in bagnasciuga
2. Corrosione da cloruri		
XD1	Umidità moderata	Atmosfera salina
XD2	Bagnato raramente asciutto	Piscine
XD3	Ciclicamente bagnato e asciutto	Ponti, pavimenti esterni

3. Corrosione da cloruri di acqua marina		
XS1	Atmosfera con umidità marina	Strutture prossime alla costa
XS2	Permanentemente sommerse	Parti di strutture marine
XS3	Zone di bagnasciuga	Parti di strutture marine
4. Attacco di cicli gelo/disgelo		
XF1	Superfici bagnate senza antigelo	Parti verticali alla pioggia
XF2	Superfici bagnate con antigelo	Parti verticali di ponti
XF3	Sature d'acqua senza antigelo	Parti orizzontali alla pioggia
XF4	Sature d'acqua con antigelo	Parti orizzontali di ponti
5. Attacco chimico		
XA1	Ambiente chimico poco aggressivo	Suoli ed acque del terreno
XA2	Ambiente chimico medio aggressivo	Suoli ed acque del terreno
XA3	Ambiente chimico molto aggressivo	Suoli ed acque del terreno

La deformazione unitaria media delle barre ε_{sm} può essere calcolata con l'espressione:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s' - k_t \frac{f_{ctm}}{\rho_{eff}}\left(1+\alpha_e \rho_{eff}\right)}{E_s} \geq 0.6\frac{\sigma_s'}{E_s} \qquad \text{[C4.1.6]}$$

in cui:

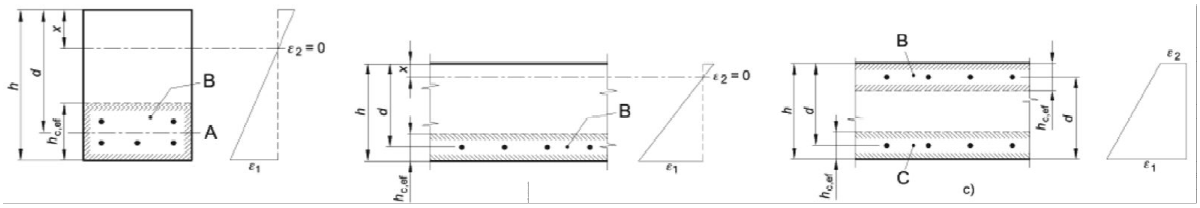
σ_s è la tensione nell'armatura tesa considerando la sezione fessurata;

α_e è il rapporto E_s/E_{cm};

ρ_{eff} è pari a $A_s/A_{c,eff}$

k_t è un fattore dipendente dalla durata del carico e vale: 0,6 per carichi di breve durata, 0,4 per carichi di lunga durata.

$A_{c,eff}$ è l'area efficace di calcestruzzo teso attorno all'armatura, di altezza $h_{c,ef}$, dove $h_{c,ef}$ è il valore minore tra 2,5 (h–d), (h–x)/3 o h/2 (vedere Figura C4.1.10); nel caso di elementi in trazione, in cui esistono due aree efficaci, l'una all'estradosso e l'altra all'intradosso, entrambe le aree vanno considerate separatamente;



Nei casi in cui l'armatura sia disposta con una spaziatura non superiore a 5(c + ϕ/2) (vedi Figura C4.1.11), la distanza media tra le fessure, Δ_{sm}, può essere valutata con l'espressione:

$$\Delta_{sm} = 3.4\,c + 0.425\,k_1\,k_2\,\frac{\phi}{\rho_{eff}} \qquad \text{[C4.1.7]}$$

in cui:

ϕ è il diametro delle barre. Se nella sezione considerata sono impiegate barre di diametro diverso, si raccomanda di adottare un opportuno diametro equivalente, ϕ_{eq}. Se n_1 è il numero di barre di diametro ϕ_1 ed n_2 è il numero di barre di diametro ϕ_2, si raccomanda di utilizzare l'espressione seguente:

$$\phi_{eq} = \frac{n_1\phi_1^2 + n_2\phi_2^2}{n_1\phi_1 + n_2\phi_2} \qquad \text{[C4.1.8]}$$

c è il ricoprimento dell'armatura;

k_1 = 0,8 per barre ad aderenza migliorata,

k_2 = 0,5 nel caso di flessione,

$$w_k = 1.7\,\varepsilon_{sm}\Delta_{sm} \leq w_{k,\lim}$$

Verifica SLE della fessurazione (metodo indiretto)

NTC 2018

Stato limite di apertura delle fessure
La verifica dell'ampiezza di fessurazione può anche essere condotta senza calcolo diretto, limitando la tensione di trazione nell'armatura, valutata nella sezione parzializzata per la combinazione di carico pertinente, ad un massimo correlato al diametro delle barre ed alla loro spaziatura.

L'ampiezza delle fessure causate da distorsioni imposte o da carichi applicati può essere controllata mediante disposizione di una quantità minima di armatura secondo la relazione

$$A_s = k_c\, k\, f_{ctm} \frac{A_{ct}}{\sigma_s}$$

A_{ct} area di calcestruzzo nella zona tesa (prima della formazione della fessura)

σ_s massima tensione ammessa nell'armatura dopo la formazione della fessura

f_{ctm} resistenza media a trazione del calcestruzzo

k_c coefficiente che tiene conto della distribuzione di tensioni prima della fessurazione

k coefficiente che tiene conto degli effetti di tensioni auto-equilibrate non uniformi

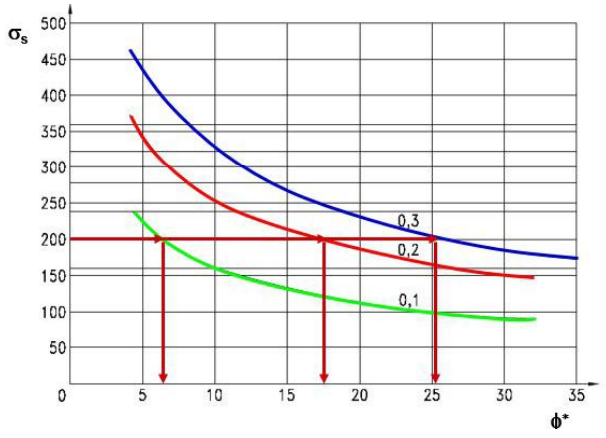
- k_c=1.0 per trazione pura
- k_c=0.4 per flessione pura

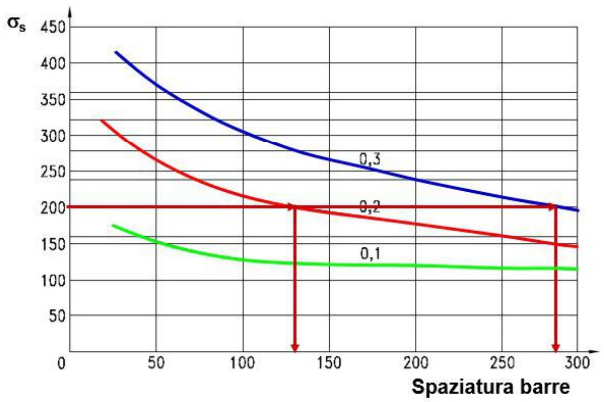
- k=0.8 tens. di traz. dovute a def. intrinseche impedite
- k=1.0 tens. di traz. dovute a def. estrinseche impedite

k=0.8 sez. rett. h<30 cm; k=0.5 sez. rett. h>80 cm

Risoluzione per via grafica:

- Calcolo σ_s (tensione di trazione nelle barre d'armatura) per sezione fessurata (v. Stadio II)
- Dai diagrammi si ricava, per il valore di σ_s calcolato:
  - il diametro massimo ammesso per soddisfare una determinata apertura max;
  - la spaziatura tra le barre massima ammessa per soddisfare una determinata apertura max.





Risoluzione tramite tabelle:

- Calcolo σ_s (tensione di trazione nelle barre d'armatura) per sezione fessurata (v. Stadio II)
- Dalle tabelle si ricava, per il valore di σ_s calcolato:
  - il diametro massimo ammesso per soddisfare una determinata apertura max;
  - la spaziatura tra le barre massima ammessa per soddisfare una determinata apertura max.

Tabella C4.1.II *Diametri massimi delle barre per il controllo di fessurazione*

Tensione nell'acciaio	Diametro massimo ϕ delle barre (mm)		
σ_s [MPa]	w_3 = 0,4 mm	w_2 = 0,3 mm	w_1 = 0,2 mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	-

Tabella C4.1.III -*Spaziatura massima delle barre per il controllo di fessurazione*

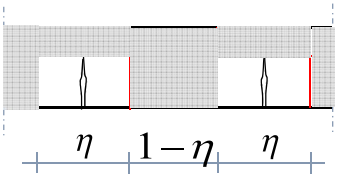
Tensione nell'acciaio	Spaziatura massima s delle barre (mm)		
σ_s [MPa]	w_3 = 0,4 mm	w_2 = 0,3 mm	w_1 = 0,2 mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	-
360	100	50	-

Verifica SLE della deformazione (metodo diretto)

Calcolo freccia

Si fa riferimento ad un modello semplificato che tiene conto del contributo del "tension stiffening"

$$f_m = \eta\, f' + (1-\eta)\, f$$



$$\eta = 1 - \beta^* \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \qquad M_{cr} = \frac{f_{ctd}\, I_i}{y'_c}$$

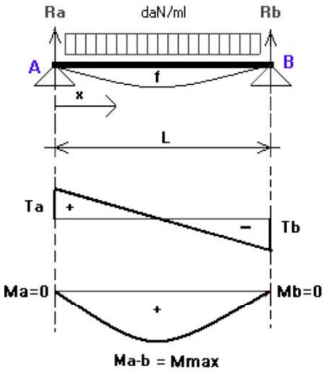
f è la freccia nella condizione di trave non fessurata I_i

f' è la freccia nella condizione di trave fessurata I'_i

β^* = a 1.0 per carico di breve durata, 0.5 per ciclico o lunga durata

Esempio:

TRAVE APPOGGIATA CON CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO



$Ra = \frac{q\,L}{2}$

$Rb = Ra = \frac{q\,L}{2}$

$Ta = Ra$

$Tb = -\,Rb$

$Tx = \frac{q\,(L - 2x)}{2}$

$Ma = 0$

$Mb = 0$

$Mab = \frac{q\,L^2}{8} = Mmax$

$Mx = \frac{q\,x\,(L - x)}{2}$

$f = \frac{5\,q\,L^4}{384\,E\,J}$

$$f_m = \eta\, f' + (1-\eta)\, f$$

$$f = \frac{5}{384}\frac{q\,l^4}{E_c I_i}$$

Momento d'inerzia omogenizzato della sez. **interamente reagente** (v. Stadio I)

$$f' = \frac{5}{384}\frac{q\,l^4}{E_c I_i'}$$

Momento d'inerzia omogenizzato della sez. **perzializzata** (v. Stadio II)

Limiti freccia

I limiti per la freccia sono fissati in funzione delle esigenze d'uso:

1/250 l per solai e travi nella condizione quasi-permanente dei carichi

1/500 l per solai e travi che portano pareti divisorie e di tamponamento nella condizione quasi-permanente dei carichi

Circ. n.7 del 21.01.2019

Per quanto riguarda la salvaguardia dell'aspetto e della funzionalità dell'opera, le frecce a lungo termine di travi e solai, calcolate sotto la condizione quasi permanente dei carichi, non dovrebbero superare il limite di 1/250 della luce.

In relazione all'integrità delle pareti portate divisorie e di tamponamento, le frecce di travi e solai, sotto la condizione quasi permanente dei carichi, non dovrebbero superare il limite di 1/500 della luce. In tale verifica la freccia totale calcolata può essere depurata della parte presente prima dell'esecuzione delle pareti. Detto valore si riferisce al caso di pareti divisorie in muratura. Per altri tipi di pareti si dovranno valutare specificatamente i limiti di inflessione ammissibili.

Verifica SLE della deformazione (metodo indiretto)

Circ. n.7 del 21.01.2019

Per travi e solai con luci non superiori a 10 m è possibile omettere la verifica delle inflessioni come sopra riportata, ritenendola implicitamente soddisfatta, se il rapporto l/h tra luce e altezza rispetta la limitazione

$$\frac{l}{h} \le K\left[11 + \frac{0.0015\, f_{ck}}{\rho + \rho'}\right] \cdot \left[\frac{500\, A_{s,eff}}{f_{yk}\, A_{s,calc}}\right] \qquad \text{[C4.1.4]}$$

dove f_{ck} e f_{yk} sono espressi in MPa, ρ e ρ' sono i rapporti tra armatura tesa e compressa, rispettivamente, $A_{s,eff}$ ed $A_{s,calc}$ sono, rispettivamente, l'armatura tesa effettivamente presente nella sezione più sollecitata e l'armatura di progetto nella stessa sezione, e K è un coefficiente correttivo, che dipende dallo schema strutturale.

Per sezioni a **T** aventi larghezza dell'ala almeno tre volte maggiore dello spessore dell'anima, i valori dati dalla [C4.1.4] devono essere ridotti del 20%.

Tabella C4.1.I- *Valori di K e snellezze l/h limite per elementi inflessi di c.a. in assenza di compressione assiale*

Sistema strutturale	K	Calcestruzzo molto sollecitato ρ=1,5%	Calcestruzzo poco sollecitato ρ=0,5%
Travi semplicemente appoggiate, piastre incernierate mono o bidirezionali	1,0	14	20
Campate terminali di travi continue o piastre continue monodirezionali o bidirezionali continue sul lato maggiore	1,3	18	26
Campate intermedie di travi o piastre continue mono o bidirezionali	1,5	20	30
Piastre non nervate sostenute da pilastri (snellezza relativa alla luce maggiore)	1,2	17	24
Mensole	0,4	6	8

Note: Le snellezze limite sono state valutate ponendo, nella formula

$f_{ck} = 30$ MPa e $\left[\frac{500 A_{s,eff.}}{f_{yk} A_{s,calc.}}\right] = 1$.

Travi Solai

Tabella C4.1.I- *Valori di K e snellezze l/h limite per elementi inflessi di c.a. in assenza di compressione assiale*

Sistema strutturale	K	Calcestruzzo molto sollecitato ρ=1,5%	Calcestruzzo poco sollecitato ρ=0,5%
Travi semplicemente appoggiate, piastre incernierate mono o bidirezionali	1,0	14	20
Campate terminali di travi continue o piastre continue monodirezionali o bidirezionali continue sul lato maggiore	1,3	18	26
Campate intermedie di travi o piastre continue mono o bidirezionali	1,5	20	30
Piastre non nervate sostenute da pilastri (snellezza relativa alla luce maggiore)	1,2	17	24
Mensole	0,4	6	8

PREDIMENSIONAMENTO DELL'ALTEZZA DI TRAVI E SOLAI

Luce massima per solaio unidirezionale: ~ 6.5 m (2.5m per sbalzi)

Luce massima per trave principale: ~ 4.5-5 m (travi in spessore) 5.5-6 m (travi fuori spessore)

Es. luce solaio unidirezionale: l ~ 5.5 m → Altezza minima: h ≥ l/20 → h ~ 0.275 m

Es. trave principale: l ~ 4.5m → Altezza minima: h ≥ l/18 → h ~ 0.25 m

Bibliografia

- Toniolo G., Di Prisco M., "Cemento Armato – Calcolo agli stati limite", Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.
- Park R., Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- Mac Gregor J., "Reinforced Concrete – Mechanics and Design", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- Santarella L., "Prontuario del Cemento Armato", XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.